

三 角 學

趙 型 編

中國科學圖書儀器公司

出 版

S. 7 三角學

新定價 ¥ 11,200

三角學

趙 型 編

中國科學圖書儀器公司

出 版

內 容 介 紹

本書為編者在上海南洋模範中學任教實驗之著作，說理透澈，取材新穎，例題特多，便於學習。用表另行裝訂，以作攷試時之應用。

三 角 學

附高中三角學用表一冊

編 者 趙 型

出 版 者 中國科學圖書儀器公司
印 刷 上海延安中路 537 號 電話 64545

總 經 售 中國圖書發行公司

版權所有 ★ 不可翻印

S. 7—0.10 32 開 292 面 155 千字 每千冊用紙 9.42 令

新定價 ¥ 11,200

1946 年 9 月初版 0001—1000

1953 年 12 月 10 版 135001—16500

上海市書刊出版業營業許可證出 027 號

目 次

第一章 銳角之三角函數

1. 銳角三角函數之定義	1
2. 正矢及餘矢	2
習題 一 1—10	4
3. 三角函數間之基本關係	4
4. 三角恒等式	5
習題 二 1—40	6
5. 餘角之三角函數	7
6. 包括不相關角之恒等式	8
7. 以一函數表他函數	9
習題 三 1—20	10
8. $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 之三角函數	11
習題 四 1—15	12
9. 三角函數表	13
10. 函數表用法一——從角求函數	14
11. 函數表用法二——從函數求角	16
習題 五 1—16	17

第二章 直角三角形之解法

12. 直角三角形之解法	18
習題 六 1—10	19
13. 仰角與俯角	20
14. 高與距離之應用問題	20
習題 七 1—12	22
15. 航海用羅盤	23

16. 方向角	23
17. 張角與視角	24
18. 距離與方向之應用問題	24
習題 八 1-10	25

第三章 廣義之三角函數

19. 角的定義之再認識	27
20. 正角與負角	27
21. 角之量法	27
22. 象限	27
23. 坐標	28
24. 廣義三角函數之定義	29
25. 三角函數之正負	29
習題 九 1-8	32

26. 三角函數之線的定義	32
27. 線的正負	33
28. 函數間之關係	35
29. 三角函數之值的變化	36
30. 各函數數值之限制	43
31. 各函數值之週期性	43
32. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 之函數	43
習題 十 1-8	43

第四章 弧度制

33. 弧度	45
34. 弧度與度之關係	45
35. 弧度與度之互化法	45
36. π 弧度之分數	46
習題 十一 1-26	47
37. 弧, 半徑, 及中心角之關係	48

38. 弧長及扇形面積公式	48
習題 十二 1—8	49
39. θ 與 $\tan \theta$, $\sin \theta$ 之比較	49
40. $\frac{\theta}{\sin \theta}$ 及 $\frac{\theta}{\tan \theta}$ 之極限	50
41. 很小角之 $\sin \theta$ 及 $\tan \theta$	50
42. 很大角之範圍	51
習題 十三 1—6	51

第五章 特別關係角之三角函數

43. $180^\circ - \alpha$ 及 α 之函數關係	53
44. $180^\circ + \alpha$ 及 α 之函數關係	54
45. $360^\circ - \alpha$ 及 α 之函數關係	54
46. $360^\circ + \alpha$ 及 α 之函數關係	55
47. $-\alpha$ 及 α 之函數關係	55
48. 函數關係式之普遍性	56
49. 五組關係式之記憶法	57
習題 十四 1—20	58
50. $90^\circ - \alpha$ 及 α 之函數關係	58
51. $90^\circ + \alpha$ 及 α 之函數關係	59
52. $270^\circ - \alpha$ 及 α 之函數關係	59
53. $270^\circ + \alpha$ 及 α 之函數關係	60
54. 函數關係式之普遍性	60
55. 四組關係式之記憶法	61
習題 十五 1—20	62

第六章 複角, 倍角及半角之函數

56. 複角公式一 和角之正弦及餘弦	63
57. 複角公式二 差角之正弦及餘弦	64
58. 和差公式之普遍性	65

習題 十六 1—20	67
59. 複角公式三 正切及餘切	69
習題 十七 1—15	70
60. 15° 及 75° 之函數	70
61. 複角公式之逆用	71
習題 十八 1—18	71
62. 二倍角公式	72
63. 二倍角公式之推廣	73
習題 十九 1—24	74
64. 三倍角公式	75
65. $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$ 之函數	76
習題 二十 1—16	78
66. 半角公式	78
67. $22\frac{1}{2}^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ$ 之函數	81
習題 二十一 1—10	82
第七章 三角恆等式	
68. 恆等式之證明	83
69. 倍角式之變形	85
習題 二十二 1—26	86
70. 函數積化函數和差公式	87
習題 二十三 1—20	88
71. 函數和差化函數積公式	89
習題 二十四 1—20	91
72. 函數和差及積之互化	91
習題 二十五 1—32	93
73. 任意三角形三角之函數恆等式	94
習題 二十六 1—20	98
74. 恆等式總習題	99

習題 二十七 1—32	99
-------------	----

第八章 三角方程式

75. 三角方程式	102
76. 三角方程式根之表示法	102
77. 特值解三角方程式法	103
習題 二十八 1—40	105
78. 終止邊相同之角之通值	106
79. 餘弦正割相同之角之通值	107
80. 正切餘切相同之角之通值	108
81. 正弦餘割相同之角之通值	109
82. 函數絕對值相同之角之通值	111
83. 通值解三角方程式法	112
習題 二十九 1—36	114
84. 三角方程式雜例	115
習題 三十 1—24	118

第九章 反三角函數

85. 反三角函數之定義	119
86. 反三角函數與三角函數之比較	119
87. 反三角函數之主值及通值	119
88. 求反三角函數之函數值	120
習題 三十一 1—10	120
89. 反三角函數之變形	121
習題 三十二 1—16	121
90. 反三角函數恒等式	122
習題 三十三 1—16	123
91. 反三角函數方程式	124
習題 三十四 1—14	125
62. 以反三角函數表方程式之根	125

習題 三十五 1—12	126
-------------	-----

第十章 任意三角形解法

93. 正弦定理	128
94. 已知二角一邊, 求解三角形, (a.s.a)及(s.a.a)	128
習題 三十六 1—8	129
95. 已知二邊一對角, 求解三角形 (s.s.a)	130
96. 已知二邊一對角之三角形之研究	131
習題 三十七 1—10	133
97. 餘弦定理	133
98. 已知三邊, 求解三角形 (s.s.s)	134
99. 已知二邊一夾角, 求解三角形 (s.a.s)	136
習題 三十八 1—12	137
100. 半角定理 (以三邊表半角之函數)	137
101. 正切定理	139
102. 用半角定理及正切定理解三角形	140
習題 三十九 1—8	141
103. 三角形之面積	141
104. 三角形之外接圓半徑	142
105. 三角形之內切圓半徑及傍切圓半徑	143
習題 四十 1—10	144
106. 三角形總習題	144
習題 四十一 1—10	144

第十一章 對數之理論及應用

107. 對數之定義	146
習題 四十二 1—12	146
108. 自然對數及常用對數	146
109. 對數的整數與小數部份	147
110. 常用對數的整數部份	147

習題 四十三 1—10	148
111. 常用對數的小數部份	148
112. 對數表	149
113. 對數查表法	149
習題 四十四 1—20	150
114. 函數對數表	150
習題 四十五 1—12	152
115. 對數運算定律	153
116. 對數運算定律之應用	154
117. 餘對數	155
118. 餘對數之求法	155
119. 餘對數之應用	155
習題 四十六 1—10	156
120. 用對數解三角形	156
習題 四十七 1—10	160
121. 對數式之展開及簡縮	161
習題 四十八 1—28	162
122. 指數方程式	163
123. 對數底的轉換	164
習題 四十九 1—18	165
第十二章 應用問題	
124. 名詞的解釋	166
125. 在一平面內之高與距離問題	167
習題 五十 1—12	168
126. 不在一平面內之高與距離問題	169
習題 五十一 1—10	171
127. 張角問題	172
習題 五十二 1—10	173

128. 斜坡問題	174
習題 五十三 1—8	175
129. 切圓定理	176
130. 逆定理	176
131. 共圓定理	177
132. 切圓共圓問題	177
習題 五十四 1—8	180
133. 應用雜題	181
習題 五十五 1—30	181
134. 地球與經緯度	185
135. 經緯線與赤道之半徑	186
136. 同經航行	186
137. 同緯航行	187
習題 五十六 1—8	188
138. 短距離航行	188
習題 五十七 1—4	189
第十三章 三角形及多邊形之性質	
139. 三角形之邊角關係	190
習題 五十八 1—30	192
140. 面積, 外接圓半徑, 內切圓半徑, 傍切圓半徑	194
習題 五十九 1—24	198
141. 傍心三角形	199
142. 垂足三角形	199
習題 六十 1—14	200
143. 圓內接四邊形之面積公式	201
144. 圓內接四邊形之對角線公式	202
習題 六十一 1—8	203
145. 正多邊形	203

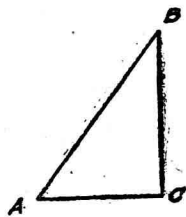
習題 六十二 1—8	205
146. 雜題	205
習題 六十三 2—12	206
第十四章 三角級數之總和	
147. 正弦級數 (成等差級數之各角之正弦之和)	208
148. 餘弦級數 (成等差級數之各角之餘弦之和)	209
習題 六十四 1—12	210
149. 函數平方式立方之級數	211
習題 六十五 1—8	212
150. 其他級數	212
習題 六十六 1—12	215
第十五章 三角式之代數性質	
151. 極大極小	217
習題 六十七 1—12	218
152. 極大極小定理	218
習題 六十八 1—12	221
153. 三角不等式	222
154. 二次方程式根之性質	223
習題 六十九 1—7	224
155. 根與係數之關係	225
習題 七十 1—14	227
156. 以 $\frac{2n\pi}{k}$ 之函數為根之代數方程式	228
習題 七十一 1—8	232
157. 複數之三角表示法	233
習題 七十二 1—12	235
158. 第美弗氏定理	235
159. 第美弗氏定理之應用	236

習題 七十三 1—12	237
第十六章 三角消元法	
160. 消元法與消元式	238
習題 七十四 1—12	239
161. 消元法雜例	240
習題 七十五 1—12	242
162. 三角之方程之消元法	243
習題 七十六 1—8	245
第十七章 造表法略論及表之精確度	
163. 二項式級數	247
164. 指數級數與 e	247
165. 以無盡級數表 $\sin x$ 及 $\cos x$	248
166. 歐拉氏公式	250
167. 歐拉氏公式之利用——負數之對數	250
習題 七十七 1—12	250
168. 近似值與誤差率	250
169. 表之精確度	251
170. 有效數字位數與小數位數	251
習題 七十八 1—6	251
171. 以近似值運算所得數值之誤差率	252
172. 同一問題內各值之精確度	255
習題 七十九 1—5	256
答案	257—279

三角學

第一章 銳角之三角函數

§1. 銳角三角函數之定義 有一銳角 A ，若從其一邊上任意點 B 作 BC 垂直於另一邊，則成一直角三角形 ABC ， AB 叫斜邊， BC 叫角 A 的對邊， AC 叫角 A 的鄰邊，三邊兩兩所成的比，共六種，分別定名如下。



$$\frac{BC}{AB} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \sin A \text{ (角 } A \text{ 之正弦)}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos A \text{ (角 } A \text{ 之餘弦)}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \tan A \text{ (角 } A \text{ 之正切)}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} = \cot A \text{ (角 } A \text{ 之餘切)}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} = \sec A \text{ (角 } A \text{ 之正割)}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} = \csc A \text{ (角 } A \text{ 之餘割)}$$

[註] \sin 爲 $sine$ 之簡寫

\cos 爲 $cosine$ 之簡寫

tan 爲 tangent 之簡寫 cot 爲 cotangent 之簡寫

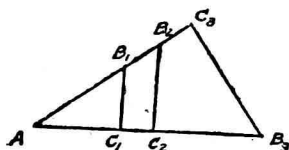
sec 爲 secant 之簡寫 csc 爲 cosecant 之簡寫

此六比之比值，當角 A 不變時，不隨 B 點之位置而變

〔證例〕 $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3$

各對應邊成比例

$$\therefore \sin A = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3}$$



故 $\sin A$ 不變。

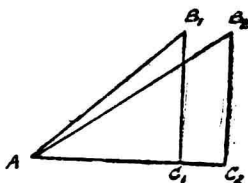
但當角 A 變動時，此六比之比值，亦隨之而變。

〔證例〕 如 $\angle B_1AC_1 > \angle B_2AC_2$

取 $B_1C_1 = B_2C_2$ ，則 $AB_1 < AB_2$

$$\therefore \frac{B_1C_1}{AB_1} > \frac{B_2C_2}{AB_2}$$

$$\therefore \sin B_1AC_1 > \sin B_2AC_2$$



故此六比值，叫做角 A 之三角函數。

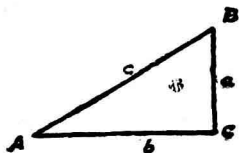
§2. 正矢及餘矢 在此六個三角函數之外，尚有正矢(versed sine)及餘矢(coversed sine)二函數，亦常用到，其定義如下。

$$\text{vers } A = 1 - \cos A \quad \text{covers } A = 1 - \sin A$$

〔例題〕(1) 已知直角 $\triangle ABC$ 之 $a=3$ ， $b=4$ ， $C=90^\circ$ ，求 A 及 B 之各三角函數。

$$〔解〕 \quad C = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} \quad \cos A = \frac{4}{5}$$



$$\tan A = \frac{3}{4} \quad \cot A = \frac{4}{3} \quad \sec A = \frac{5}{4} \quad \csc A = \frac{5}{3} \quad \text{vers } A = \frac{1}{5}$$

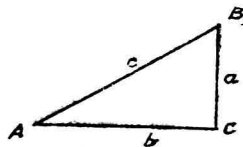
$$\text{covers } A = \frac{2}{5} \quad \sin B = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \quad \cos B = \frac{3}{5} \quad \tan B = \frac{4}{3}$$

$$\cot B = \frac{3}{4} \quad \sec B = \frac{5}{3} \quad \csc B = \frac{5}{4} \quad \text{vers } B = \frac{2}{5} \quad \text{covers } B = \frac{1}{5}$$

〔例題〕(2) 已知 $\triangle ABC$ 之 $C=90^\circ$, $c=2a$, 求 A 之各三角函數

〔解〕 $c=2a$ $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

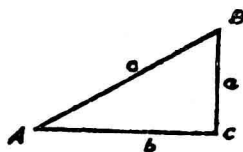


$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cot A = \sqrt{3} \quad \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \csc A = 2$$

$$\text{vers } A = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{covers } A = \frac{1}{2}$$

〔例題〕(3) 已知 $\sin A = \frac{2}{3}$, 求 A 之其他函數

〔解〕 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{2}{3}$



設 $a=2$, 則 $c=3$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5}$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cot A = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \sec A = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \csc A = \frac{3}{2} \quad \text{vers } A = \frac{3 - \sqrt{5}}{3}$$

$$\text{covers } A = \frac{1}{3}$$