普通高等教育"十二五"规划教材

微积分

王中兴 主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

微 积 分

王中兴　主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以培养学生的数学素质为目标，阐述了微积分学的基本内容、基本方法和相关应用. 全书共10章，内容包括函数极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分及其应用、微分方程初步、无穷级数和差分方程初步等. 各章节后都配有适量的习题，书后附有习题参考答案与提示.

为了方便教师拓展教学和扩大学生的知识面，本书将各专业不同需求的数学内容有机融合在一起，并介绍其在自然科学、工程技术、经济和管理等领域中的应用案例；部分例题及习题选自历年考研真题，以满足学生个性发展的需要.

本书可作为普通高等院校、独立学院，以及具有较高要求的成教学院、民办院校等本科院校相应专业的数学基础课教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/王中兴主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-034622-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第191648号

责任编辑：昌 盛 王胡权/责任校对：林青梅
责任印制：阎 磊/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012年8月第一次印刷 印张：20 1/4
字数：450 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《微积分》编委会

主　编　王中兴

主　审　刘新和

编　者　（按姓氏拼音排序）

洪　玲　黄敢基　蓝　敏　刘德光

刘　芳　莫利柳　谭洁群　王中兴

席洁珍　曾凡辉　朱光军

前　言

高等数学(微积分)是高等院校一般理工科、经济、管理各专业的一门重要基础课.它不仅是学习后续课程的基础,而且对启发学生思维、培养学生的数学素质和解决实际问题的能力都起着非常重要的作用.

本书在吸取国内外同类教材优点的基础上,根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的"本科数学基础课程教学基本要求"编写而成.全书以培养学生的数学素质为目标,阐述了微积分学的基本内容、基本方法和相关应用.内容包括函数极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分及其应用、微分方程初步、无穷级数和差分方程初步等.各章节后都配有适量的习题,书后附有习题参考答案与提示.

为了方便教师拓展教学和扩大学生的知识面,本书将各专业不同需求的数学内容有机融合在一起.一方面,便于教师根据各院校、各专业方向对微积分教学要求的实际,有选择地使用;另一方面,使不同专业的学生可以了解到高等数学(微积分)中的相关知识在其他专业中的应用,可以满足目前多数学生希望跨学科获取更多知识的愿望.

本书在内容安排与编写方面具有如下特点:

1. 简易性.秉承经典教材结构严谨、逻辑清晰的优点,在达到"高等数学(微积分)课程教学基本要求"的前提下,从培养学生的能力和提高素质的角度,内容选取尽量少而精,并有选择地保留了定理、性质的证明,而省略一些繁琐、冗长的推导与证明.

2. 通俗性.从直观的几何意义或实际背景引入和解释概念和定理,便于学生对相关概念和定理的理解和掌握.在内容叙述上也由浅入深,循序渐进,力求清楚易懂.

3. 应用性.注重理论联系实际,每章都有介绍微积分学在自然科学、工程技术、经济和管理等领域中的应用案例,方便教师拓展教学,着力培养和提高学生应用数学方法解决实际问题的能力,加强学生应用意识和创新能力的培养.

4. 层次性.书中未加"★"标志的内容为各专业必修内容,加"★"标志的内容为不同专业选修内容.另外,加"*"标志的例题及习题选自历年考研真题,这些例题及习题,一方面供学有余力或立志考研的学生选读;另一方面,使学生了解考研并非高不可攀,激发学生的学习积极性.

本书可作为普通高等院校、独立学院,以及具有较高要求的成教学院、民办院校等本科院校相应专业的数学基础课教材.

本书的编写工作由王中兴教授主持.全书共 10 章,蓝敏编写第 1 章,席洁珍编写第 2 章 2.1～2.5 节及 2.7 节,谭洁群编写第 3 章及第 2 章 2.6 节,莫利柳编写第 4 章,刘芳编写第 5 章,朱光军编写第 6 章,曾凡辉编写第 7 章,王中兴、刘德光编写第 8 章,洪玲编写

第 9 章，黄敢基编写第 10 章，王中兴负责全书的统稿工作. 广西大学数学与信息科学学院刘新和教授审阅全书并提出了许多宝贵的意见和建议，曾友芳副教授及潘就和等公共数学系老师对本书的修改提出了中肯的意见和建议. 在本书编写过程中，我们参考了众多著作和教材，在此谨向有关作者和老师表示衷心感谢!

本书是广西壮族自治区教育厅高校精品课程立项建设和新世纪广西高等教育教学改革工程的一项成果，本书的出版得到了广西大学教材建设基金的资助，科学出版社的编辑也为本书的出版付出了辛勤劳动. 在此向支持和关心本书编写和出版的领导和有关人员致以诚挚的谢意!

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免存在疏漏及不足之处，诚恳地希望专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月于广西大学

目　　录

第 1 章　函数极限与连续

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的数学反映，是微积分学的主要研究对象. 极限理论与方法是微积分的理论基础. 本章主要介绍函数、极限和连续等基本概念及其性质.

1.1　函　　数

一、常量与变量

在观察自然现象的过程中，常常会遇到两种不同的量，一种是在观察过程中保持不变的量，称为**常量**；另一种是在观察过程中变化着的量，称为**变量**.

例如，当密闭的容器被加热时，其中气体的体积和分子数保持不变，它们都是常量；而容器的温度和压强在加热过程中是变化的，因此它们是变量. 一个量是常量还是变量，常与考察的过程有关. 例如，上述容器加热时，若容器有一小孔与外界相通，则容器中气体分子数和温度都是变量，而气体压强是常量.

习惯上，常量用字母 a,b,c 等表示，变量用 x,y,t 等表示. 常量在数轴上表示一个点，对于变量，常用一个区间或邻域表示它的变化范围.

二、区间与邻域

设 a,b 为实数，且 $a<b$，则区间的记号和定义如下：

(1) 开区间：$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$，如图 1.1(a)所示.

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，如图 1.1(b)所示.

(3) 半开半闭区间：$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

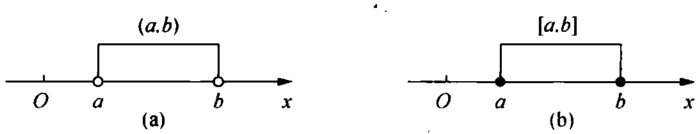

图 1.1

以上区间都称为有限区间，a 和 b 称为区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

(4) 无限区间：$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$ 如图 1.2(a)所示；$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$如图 1.2(b)所示；$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in \mathbf{R}\}$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数集.

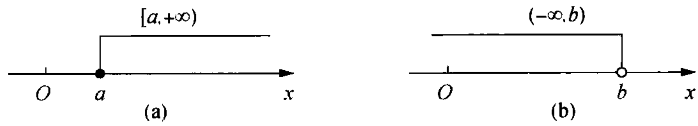

图 1.2

要注意$-\infty$，$+\infty$都只是表示无限性的一种记号，它们都不是某个确定的数，因此其不能参与数的运算.

为了叙述方便，以下均用“区间 I”表示各种类型的区间.

当考虑某点附近的点所构成的集合时，常用邻域来描述.

设 $\delta>0$，以点 x_0为中心的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为 x_0的 δ **邻域**，记作$U(x_0,\delta)$，其中 x_0称为邻域的中心点，δ 称为邻域的半径，当不需要强调 δ 时，简记作$U(x_0)$. 而

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

称为 x_0的 δ 去心邻域，记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$，其中$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0的**左邻域**，$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0的**右邻域**，分别记作$U_-(x_0)$，$U_+(x_0)$.

三、函数的概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集合，若有一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的**函数**，或称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**，也记作 D_f.

当 $x_0\in D$ 时，称 $f(x)$在点 x_0处有定义，与 x_0所对应的值 y_0，称为函数 $y=f(x)$在点 x_0处的**函数值**，记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$，即 $y_0=f(x_0)$.

函数 $y=f(x)$的函数值全体组成的集合称为其**值域**，记作 R_f或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

注　(1)一般函数 $y=f(x)$的定义域就是使数学表达式 $f(x)$有意义的一切 x. 例如，$y=\sqrt{1-x}$的定义域为$(-\infty,1]$，而 $y=\ln(1+x)$的定义域为$(-1,+\infty)$. 但在实际问题中，除了考虑数学表达式本身的意义外，还应考虑函数的实际意义. 例如，圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数 $S=\pi r^2$，由于圆的半径应该大于 0，所以定义域为$(0,+\infty)$.

(2)若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 若无特别声明，本教材中的函数均指单值函数.

(3)函数的定义域与对应法则称为函数的**两个要素**. 两个函数相同的充要条件是它

们的定义域和对应法则均相同. 例如,$y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$是不相同的函数.

函数 $y=f(x)$中表示对应关系的记号 f 也可以用其他字母,如 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$等. 在同一问题中涉及几个不同函数时,需用不同的记号表示不同的函数.

在平面直角坐标系 xOy 中,点集

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$的**图形**. 图形是函数的直观几何表示,对理解函数的性质十分有用.

下面举一些函数的例子.

例 1.1.1 初等数学中的**幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数**,是最基本的函数,许多函数都是由它们"构成"的,所以它们称为**基本初等函数**. 它们的定义域、值域以及性质都应熟练掌握,这里不再赘述(见附录).

例 1.1.2 常数函数

$$y=k \quad (k\text{ 为常数})$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{k\}$,它图形是一条平行于 x 轴的直线(如图 1.3).

例 1.1.3 绝对值函数

$$y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,见图 1.4.

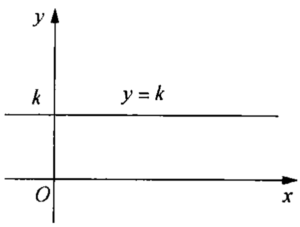

图 1.3

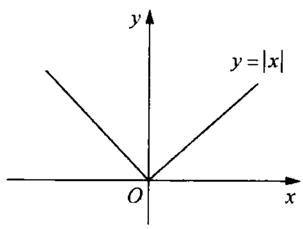

图 1.4

例 1.1.4 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2,\end{cases}$

该函数在$|x|=1$ 时无定义,它的定义域为 $D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$,其图形见图 1.5.

在例 1.1.4 中看到,有时一个函数在其定义域内的不同部分,其对应法则由不同的算式表达,这样的函数通常称为**分段函数**,对于例 1.1.4,$x=-1$ 和 $x=1$ 称为其**分段点**.

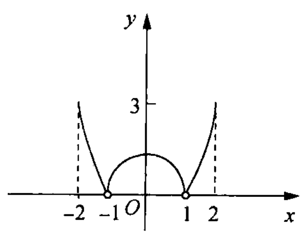

图 1.5

四、函数的特性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$.

1. 函数的有界性

若存在一个正数 M,使得对于任一 $x\in X$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上是**有界函数**,称 M 为它的**界**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内无界,因为当 x 趋近区间左端时,$\dfrac{1}{x}$ 的值可以任意变大.

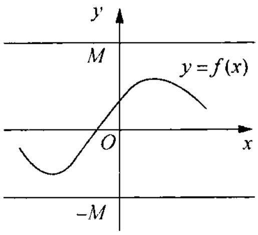

图 1.6

但 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 内却是有界的,因为对任一 $x\in[1,+\infty)$,都有 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$,从而 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

函数 $y=f(x)$ 在一个区间 I 上有界的几何解释是:$y=f(x)$ 在该区间上的图形位于两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间,见图 1.6.

2. 函数的单调性

若对于任意两点 $x_1,x_2\in X$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\,(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上是**单调增加(减少)函数**. 若总有

$$f(x_1)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是**严格单调增加(减少)函数**.

单调增加函数与单调减少函数,统称为**单调函数**.

有时一个函数在其整个定义域上不是单调的,而在定义域中的部分区间上是单调的,这些部分区间称为该函数的**单调区间**. 例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设 X 关于原点对称,若对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(-x)=f(x)\,(f(-x)=-f(x))$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上为**偶(奇)函数**.

例如,x^2、$\cos x$ 是偶函数,x^3、$\sin x$ 是奇函数,$x+x^2$ 既非奇函数,又非偶函数.

根据定义不难证明:奇函数与奇函数的和(差)是奇函数;偶函数与偶函数的和(差)是偶函数;奇函数与奇函数的乘积,偶函数与偶函数的乘积都是偶函数;奇函数与偶函数的乘积却是奇函数.

例 1.1.5　判断函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^{x}}{1+2^{x}}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$为奇函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，而奇函数的图形是关于原点对称的.

4. 函数的周期性

若存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x\in X$，都有 $x+T\in X$，且关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $y=f(x)$在 X 上是**周期函数**，常数 T 称为 $f(x)$的一个周期，通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如，函数 $\sin x,\cos x$ 是以 2π 为周期，$\tan x,\sin 2x$ 是以 π 为周期.

周期函数的特点是其图形为一条周期性重复的曲线，只要作出函数在长度为周期 T 的一个区间上的图形，就可通过平移得到整个函数的图形.

五、反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的，有时不仅需研究变量 y 随变量 x 的变化，有时也需研究变量 x 随变量 y 变化而变化的情况. 例如，以速度 v 匀速行驶的汽车，其行驶距离 s(因变量)与行驶时间 t(自变量)的函数关系为 $s=vt$. 则要行驶距离 s，所需的时间为 $t=\dfrac{s}{v}$，此时，s 为自变量，t 为因变量. 这启发我们引入反函数的概念.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 R_f，如果对于 $y\in R_f$，都有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，则该 x 也是 y 的函数，记作 f^{-1}，即 $x=f^{-1}(y)$，称之为函数 $y=f(x)$的**反函数**.

从图形上看，函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$为同一图形.

由于人们习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，常将反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$. 此时，称 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$为**互为反函数**. 显然，$y=f^{-1}(x)$的图形和 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.7).

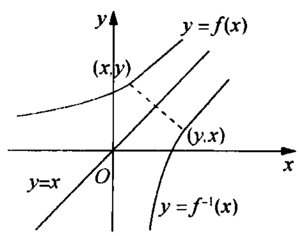

图 1.7

指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$互为反函数；三角函数与反三角函数，例如，$y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$与 $y=\arcsin x$ 也互为反函数. 但是，并非所有的函数都存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$就不存在反函数(为什么?).

下面给出**反函数存在定理**：