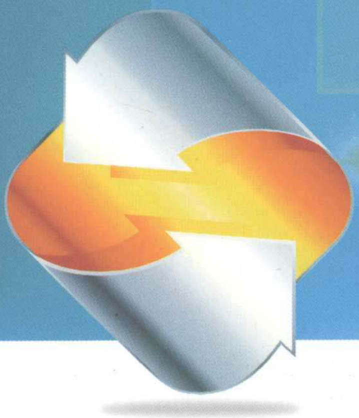
高等学校电子信息类规划教材

0100101101110011011 0011

1001000110100011010100101 01

1001000110100011010100101 01



# 电磁场与电磁波

卢智远　朱满座　侯建强　编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校电子信息类规划教材

# 电磁场与电磁波

卢智远　朱满座　侯建强　编

西安电子科技大学出版社

## 内容简介

本书从经典电磁理论及其数学基础知识出发，系统地描述了电磁场和电磁波的基本规律。全书内容包括：矢量分析基础、静电场、恒定电场与恒定磁场、静态场的解、时变电磁场、均匀平面电磁波、电磁波的反射和折射、导行电磁波、电磁波的辐射及天线基础共9章。内容讲述深入浅出，对电磁理论既有严格的数学公式推导，又注重其物理意义的讲述。书中有大量的例题，每章附有习题，书末附有常用矢量公式、$\delta$函数、特殊函数、考研试题精选和部分习题答案。

本书适合作为高等院校电子工程、通信工程、电子信息工程、微电子和应用电子技术等本科专业的"电磁场与电磁波"及"电磁场理论"课程教材，也可作为电子工程技术人员的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

**电磁场与电磁波**/卢智远，朱满座，侯建强编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2012.8

高等学校电子信息类规划教材

ISBN 978-7-5606-2776-2

Ⅰ. ① 电…　Ⅱ. ① 卢…　② 朱…　③ 侯

Ⅲ. ① 电磁场—高等学校—教材　② 电磁波—高等学校—教材　Ⅳ. ① O441.4

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 054516 号**

策　　划　张　媛
责任编辑　杨宗周　张　媛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张 23.5
字　　数　560千字
印　　数　1～3000册
定　　价　41.00

ISBN 978-7-5606-2776-2/O・0129

**XDUP 3068001-1**

***如有印装问题可调换***

# 前　言

电子信息技术的各个领域如通信、广播、电视、导航、遥感遥测遥控、电子仪器仪表等都离不开电磁波的发射、控制、传播与接收，工业自动化、家用电器、地质勘探、交通、电力及医用电子设备等方面也涉及到电磁理论的应用，而且电磁理论过去一直是将来仍是新兴学科的孕育点和增长点。学习电磁场课程，对于培养学生严谨的科学学风、科学方法及抽象思维能力、创新精神等，具有十分重要的作用。

本书的编写注重内容体系的链接，注重对解决问题思路的体现和对导出结论的深入定性说明，并参考了国内外最近几年不同风格的教材。编写采用数理并重的方式，在经典的范围内，从静态场一直到电磁波的辐射，推演出电磁场与电磁波的物理和数学特性，对其定理及场的基本方程的描述，既有严格的数学推导演义，又有物理意义的描述。为了使该书适用于不同层次的读者，增加了各向异性媒质中的平面波、电磁波的反射、折射和辐射等部分内容。为了帮助学生掌握内容和思考问题，本书适当地增加了例题和课后习题的数量，并对一些有难度的习题作了提示，而绝大部分的习题均附有答案。书末还附有近年来西安电子科技大学电磁场与微波专业攻读硕士研究生学位的入学考试试题。

本书作者均为长期从事通信、电子信息、电子技术、探测制导、电磁场与微波技术及微电子专业的“电磁场与电磁波”课程教学工作的一线教师。书中融入了编者长期的教学经验和体会，力求抽象概念形象化，同时注重教学规律，力争做到重点突出、难点分散。

本书适合作为电子工程、通信工程、电子信息工程、微电子和应用电子技术等本科专业的“电磁场与电磁波”及“电磁场理论”课程教材，作适当取舍也可以作为其他相关专业的教材和参考书。

全书共 9 章，第 1 章为矢量分析基础，介绍了矢量与标量及场的概念，给出了常用的定理、公式和恒等式，并引出亥姆霍兹定理以作为理解电磁场理论问题的基础。第 2 章为静电场，介绍了电场强度和电位的计算方法。第 3 章为恒定电场与恒定磁场，介绍了它们的基本规律和性质。第 4 章为静态场的解，基于前述的三种静态场的位函数可将其归结为同类别的边值问题，故可用同样的方法求解。第 5 章为时变电磁场，介绍了它的基本规律及反映宏观电磁现象的麦克斯韦方程组。第 6 章为均匀平面电磁波，介绍了平面电磁波在各种媒质中传播的特性。第 7 章为电磁波的反射和折射。第 8 章为导行电磁波。第 9 章为电磁波的辐射及天线基础。书末附录列出了常用矢量公式、$\delta$ 函数和特殊函数。

本书第 1、2、4 章及书后的附录由朱满座执笔，第 3、6、7 章及硕士研究生入学试题由卢智远执笔，第 5、8、9 章由侯建强执笔。全书由卢智远统稿。

在本书的编写过程中，西安电子科技大学电子工程学院的研究生韩日霞、何曼曼、李鹏杰、熊瑞君、王瑞华等为本书录入了部分初稿，计算了部分习题答案。西安电子科技大学牛中奇教授提出了许多宝贵的意见和建议，在此对他们表示衷心的感谢。同时对西安电子科技大学出版社给予的大力支持和帮助表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中不当之处在所难免，衷心希望使用本教材的老师和同学批评指正。

编　者

2012年4月

# 目　录

# 第 1 章　矢量分析基础

## 1.1 矢量分析

矢量分析讨论矢性函数的求导、积分等内容，它是矢量代数的继续，也是场论的基础。在物理学和工程实际中，许多物理量本身就是矢量，如电场强度、磁场强度、流体的流动速度、物质的质量扩散速度及引力等。采用矢量分析研究这些量是很方便的。有些物理量本身是标量，但是描述它们的空间变化特性用矢量较为方便。如物体的引力势，描述它的空间变化就需要用引力。再比如，空间的电位分布，描述其变化采用电场强度较为方便。

### 1.1.1 矢性函数

我们知道，模和方向都不变的矢量称为常矢量。而在许多科技问题中，常会碰到模和方向或其中之一会改变的矢量。这种矢量称为变矢量。为分析变矢量，需要引入矢性函数的概念。

设有数性变量 $t$ 和变矢量 $\boldsymbol{A}$，如果对于 $t$ 在某个范围内的每一个值，$\boldsymbol{A}$ 都有一个确定的矢量与之对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 $t$ 的函数，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$。

如果将此矢量 $\boldsymbol{A}$ 放置在直角坐标中，并令其起点与坐标原点重合，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量 $A_x$、$A_y$、$A_z$都是 $t$ 的数性函数，故矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以写为

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$分别为沿三个坐标轴正向的单位矢量。

在以后的讨论中，我们仅限于自由矢量。所谓自由矢量是指当二矢量的模和方向都相同时，就可以认为此二矢量是彼此相等的一类矢量。如在讨论刚体平动问题时，力是自由矢量；在讨论刚体的定轴转动时，力矩是自由矢量。

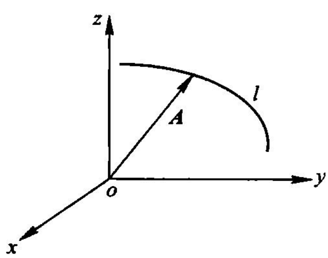



图 1-1　矢端曲线

为了直观地表示矢性函数的 $\boldsymbol{A}(t)$变化状态，我们可以把 $\boldsymbol{A}(t)$的起点平移至坐标原点。这样，当数性变量 $t$ 变化时，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终端将会描出一条曲线 $l$，参看图 1-1，这条曲线称为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的矢量端曲线。而式(1-1)常称为矢量端曲线的矢量方程。

### 1.1.2 矢性函数的求导与积分

**1. 矢性函数的导数**

设有矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$（矢量的起点均相同），当数性变量从 $t$ 变到 $t+\Delta t$ 时，对应的矢量分别为

$$\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{oM};\quad \boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{oN}$$

则矢性函数的增量为

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

我们将矢性函数的增量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 与对应的 $\Delta t$ 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 时的极限，称为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 $t$ 处的导数，如图 1－2 所示，记作$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$或$\boldsymbol{A}'(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}\tag{1-2}$$

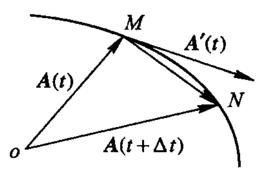


图 1－2 矢量导数

若 $\boldsymbol{A}(t)$ 由式（1－1）给出，且 $A_x$、$A_y$、$A_z$ 可导，则有

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z\tag{1-3}$$

此式把求矢性函数的导矢量，归结为求三个数性函数的导数。

**2. 矢性函数的积分**

矢性函数的积分与数性函数相似，也分为不定积分与定积分两种。且不论是不定积分还是定积分，矢性函数的积分均可归结为三个数性函数的积分。

$$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_x\int A_x(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_y\int A_y(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_z\int A_z(t)\mathrm{d}t\tag{1-4}$$

$$\int_a^b\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_x\int_a^b A_x(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_y\int_a^b A_y(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_z\int_a^b A_z(t)\mathrm{d}t\tag{1-5}$$

## 1.2 场　论

### 1.2.1 场的基本概念

如果在全部空间或部分空间的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，就说在这空间里确定了该物理量的场。如果这物理量是数量，就称这个场为标量场；若是矢量，就称这个场为矢量场。如温度场、电位场、密度场等都是标量场；而引力场、速度场、电场等则是矢量场。标量场和矢量场包含了科学技术问题中的大多数。但是也有些问题本身比标量场和矢量场复杂，比如刚体的转动惯量、磁化铁氧体的磁导率等，它们一般是空间一个点对应 9 个分量，这些量叫做二阶张量。我们仅仅讨论标量场和矢量场的问题。

如果场中的物理量不随时间变化，则称为稳定场或稳态场；如果随时间变化，则称为不稳定场或时变场。我们仅仅讨论随空间和时间确定变化的场，不涉及随机分布的场。本节的分析以稳定场为例，但是其结论可以推广到时变场的情况。

### 1.2.2　标量场的等值面

我们抛开具体的物理量，仅分析场随空间的分布和变化。把标量场理解为一个标量函数 $u$ 随空间的位置而变化。就是说把标量场看做是一个物理量在空间的函数。当然这个函数应该是单值函数，就是说一个空间点对应一个物理量的值(暂且不考虑物理量在空间随机分布的随机场问题)。若用直角坐标系表示空间的点，则空间某点 $M$ 就和一组有序实数 $(x, y, z)$ 对应。标量场中各点处的数量就表示为 $u(x, y, z)$。也可简写成 $u(M)$。

为了直观地研究物理量 $u$ 的分布状况，常常需要考察场中有相同物理量的点，也就是使 $u(x, y, z)$ 取相同数值的各点为

$$u(x, y, z) = c \qquad (c \text{ 为常数})$$

此方程在几何上一般表示一个曲面，称为标量场的等值面，如图 1-3 所示。例如温度场的等值面，就是温度相同的点组成的等温面；电位场的等值面，就是电位相同的点组成的等位面。显然，通过标量场的每一点有一个等值面，且一个点只在一个等值面上。

若问题的本身就是两个变量的函数，这种情形叫做平面标量场。此时，标量场一般可以写为 $u(x, y)$。标量场具有相同数值的点，就组成标量场的等值线，等值线方程为

$$u(x, y) = c$$

比如地图上的等高线，地面上方给定高度的等温线等。图 1-4 是地图上的等高线。

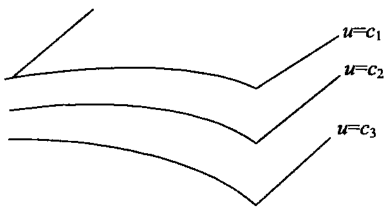



图 1-3　等值面

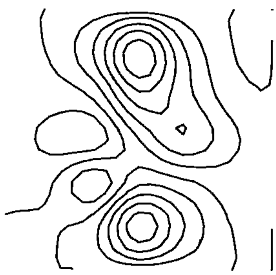


图 1-4　等高线

**例 1-1**　若两个点电荷产生的电位为 $u(x, y, z)=\dfrac{kq}{r}-\dfrac{kAq}{r_1}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$r_1=\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}$，$A$、$q$ 和 $k$ 是常数。求电位等于零的等位面方程。

**解**　令 $u=0$，则有 $1/r=A/r_1$，即 $Ar=r_1$，左右同时平方，得

$$A^2(x^2+y^2+z^2) = (x+a)^2+y^2+z^2$$

化简后得到

$$\left(x-\frac{a}{A^2-1}\right)^2+y^2+z^2 = \frac{A^2a^2}{(A^2-1)^2}$$

这个曲面是球心在 $\dfrac{a}{A^2-1}$，半径为 $R=\dfrac{Aa}{|A^2-1|}$ 的球面。

### 1.2.3 矢量场的矢量线

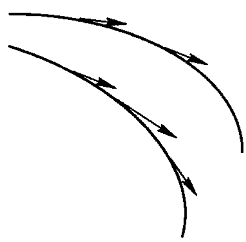


图 1-5 矢量线

矢量场中物理量是空间位置的矢性函数，即可以记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(M)$；为了直观地表示矢量的分布状况，需要矢量线的概念。所谓矢量线，是指在曲线上面每一点处，场的矢量都位于该点的切线上，如图 1-5 所示。矢量线满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x}=\frac{\mathrm{d}y}{A_y}=\frac{\mathrm{d}z}{A_z} \tag{1-6}$$

通过求解上述常微分方程组，就可以得出矢量线的方程。

**例 1-2** 求矢量场 $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{e}_x+x\boldsymbol{e}_y+x\boldsymbol{e}_z$ 通过点 $M(1,0,0)$ 的矢量线方程。

**解** 矢量线的方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{x}$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}$ 得出 $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$，积分得到 $x^2+y^2=c_1$；

由 $\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{x}$ 得出 $\mathrm{d}z-\mathrm{d}y=0$，积分得到 $z-y=c_2$。

最后，把矢量线通过的点的坐标代入，定出系数，得到所求的矢量线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=y \end{cases}$$

这是圆柱面和平面的交线，为一个椭圆。至于矢量线的方向，要依据给定点矢量场的方向判定。

**例 1-3** 求矢量场 $\boldsymbol{A}=(x^2+2xy)\boldsymbol{e}_x-xy\,\boldsymbol{e}_y+xz\,\boldsymbol{e}_z$ 过点 $M(1,\ 1,\ 1)$ 的矢量线方程。

**解** 矢量线的方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2xy}=\frac{\mathrm{d}y}{-xy}=\frac{\mathrm{d}z}{xz}$$

由 $\frac{\mathrm{d}y}{-xy}=\frac{\mathrm{d}z}{xz}$ 得出 $\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}z}{z}=0$，积分得到 $\ln(yz)=c_1$；

由 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2xy}=\frac{\mathrm{d}y}{-xy}$ 得 $\frac{\mathrm{d}x}{x+2y}=\frac{\mathrm{d}y}{-y}$，对该式的左右用和比公式，即分子加分子，分母加分母，得到 $\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}=\frac{\mathrm{d}y}{-y}$，积分得到 $\ln[(x+y)y]=c_2$。最后，把矢量线通过的点的坐标代入，定出系数，得到所求的矢量线为

$$\begin{cases} xy+y^2=2 \\ yz=1 \end{cases}$$

方程 $xy+y^2=2$ 是以 $z$ 轴为母线的双曲柱面，方程 $yz=1$ 是以 $x$ 轴为母线的双曲柱面。所求矢量线是这两个柱面的交线。

求解矢量线方程时，一般要使用和比公式、差比公式及其和差比公式，有时还要左右同时乘以一个叫做积分因子的函数，从原来的矢量线微分方程组，构造两个可以积分的全微分。如果不是全微分，一般是积分不出来的。

## 1.3　标量场的方向导数和梯度

我们可以借助等值面来了解标量场的分布状况，但这只能了解到标量场总的分布，是一种整体性的了解。而研究标量场的另一个重要方面，是了解它的局部性。为此，要引入方向导数的概念。

**1. 方向导数的定义**

设 $M_0$ 为标量场 $u(M)$ 中的一点，从点 $M_0$ 出发引一条射线 $\boldsymbol{l}$，在 $\boldsymbol{l}$ 上点 $M_0$ 的附近取一动点 $M$，记 $M_0M=\rho$，如图 1－6 所示，若当 $M \to M_0$ 时，式

$$\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\overline{M_0M}}$$

的极限存在，则称它为标量场 $u(M)$ 在 $M_0$ 点处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$，即

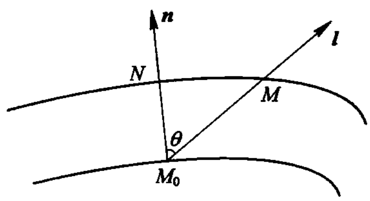


图 1－6　梯度和方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\overline{M_0M}} \tag{1-7}$$

**2. 方向导数的计算公式**

设有向线段 $\boldsymbol{l}$ 的单位矢量为 $\boldsymbol{l}^\circ=\boldsymbol{l}/l$，这个单位矢量的方向余弦为 $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$，则标量场在某点的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

这个公式的推导，我们在高等数学的多元微积分中学习过。在此，我们就略去它的证明过程。

**3. 梯度的定义**

方向导数解决了标量场在给定沿某个方向的变化率问题。然而从场中的给定点出发，可以有无穷多个方向。这使得用方向导数分析标量场不太方便。观察图 1－6，可以看出，在等值面的法向 $\boldsymbol{n}$ 上，方向导数有最大值。我们用这一最大值连同取最大值的方向组成标量场的梯度。一般而言，有如下定义。

若在标量场 $u(M)$ 中的一点处，存在这样的矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向为标量场在 $M$ 点处变化率最大的方向，其模也正好是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为标量场在点 $M$ 处的梯度，记作 $\mathrm{grad}u$。

梯度的定义是与坐标系无关的，它是由标量场中数量 $u(M)$ 的分布所决定的。我们借助方向导数的公式和图 1－6，可以推导出它在直角坐标系中的表示式。图 1－6 绘出了两个等值面，分别过 $M_0$ 点和 $M$ 点，令 $M_0M=\Delta l$，$M_0N=\Delta n$，我们有 $\Delta n=\Delta l\cos\theta$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial n}\cos\theta$$

假定 $u(M)>u(M_0)$，用 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{l}^\circ$ 分别表示单位矢量，可以知道在 $M_0$ 点处的梯度就是 $\boldsymbol{n}\,\frac{\partial u}{\partial n}$，因而，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial n}\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}$$

此式表明，标量场沿任意方向 $l$ 的方向导数等于这一点处的梯度在方向 $l$ 上的投影。我们可以用此式推出梯度在直角坐标中的计算公式，分别计算出标量场沿 $x$、$y$、$z$ 三个方向的方向导数，也就得到了梯度在 $x$、$y$、$z$ 三个方向的投影，因而有：

$$\mathrm{grad}u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

从梯度的定义及图 1-6 可知，标量场在某一点的梯度，一定垂直于过该点的等值面，且指向等值面增加的一侧。

**例 1-4** 求标量场 $u=xy^2+yz^3$ 在点 $M(2,-1,1)$ 处的梯度，及在方向 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$ 上的方向导数。

**解** $\mathrm{grad}u=y^2\boldsymbol{e}_x+(2xy+z^3)\boldsymbol{e}_y+3yz^2\boldsymbol{e}_z$，$\mathrm{grad}u|_M=\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$。

$l$ 方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{l}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_y-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_z$$

于是有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=(\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_y-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_z\right)=-\frac{1}{3}$$

为了方便，引入一个矢性微分算符

$$\nabla\equiv\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

叫做哈密尔顿算符(读作“del”或“nabla”)。记号 $\nabla$ 是一个微分运算符号，但同时又要当作矢量看待。其运算规则是：

$$\nabla u=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

可以看出，用算符 $\nabla$ 可以将梯度简记为 $\mathrm{grad}u=\nabla u$。

**例 1-5** $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{e}_x+y'\boldsymbol{e}_y+z'\boldsymbol{e}_z$，$R=r-\boldsymbol{r}'$，求：$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 及 $\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$。

**解**

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{x-x'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{y-y'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{z-z'}{R^3}$$

所以

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^3}[\boldsymbol{e}_x(x-x)+\boldsymbol{e}_y(y-y)+\boldsymbol{e}_z(z-z)]=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

同理，

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

**例 1-6**　求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(1，1，2)处的法向。

**解**　根据梯度与等值面互相垂直的性质，我们令 $u=x^2+y^2-z$，曲面 $z=x^2+y^2$ 是标量场 $u$ 的一个等值面($u=0$)，先计算 $u$ 的梯度

$$\nabla u = 2x\boldsymbol{e}_x+2y\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla u\big|_{(1,1,2)} = 2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$$

过点(1，1，2)的正法向与该点的梯度矢量同向，所以待求的法向为

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}(2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)=\pm\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)$$

梯度运算是一致线性运算，可以利用线性性质和一些基本公式简化计算，如：

$$\nabla(cu)=c\nabla u\quad(c\text{ 为常数})$$

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$$

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v)$$

$$\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$$

对一个标量场做梯度运算，产生一个矢量场，这个矢量场的量纲等于原标量场的量纲除以长度的量纲。

## 1.4　矢量场的通量及散度

我们假定：以后所讲到的曲线都是简单曲线，即光滑曲线或者分段光滑曲线(分段的数目应该是一个有限量)，而光滑曲线一般具有连续变动的切向；所讲到的曲面也都是简单曲面，即光滑曲面或者分片光滑曲面(分片的数目同样应该是有限量)，光滑曲面具有连续变化的法向。此外，为了区分曲面的两侧，常常取定其中的一侧作为曲面的正侧，并规定曲面的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 是指向正向的；如果曲面是封闭的，则按习惯总是取其外侧为正侧。这种取定了正侧的曲面，叫做有向曲面。当然，有些曲面是无法定向的，我们仅仅考虑可定向曲面。

### 1.4.1　通量

先看一个例子，设有流速场 $\boldsymbol{v}(M)$，其中流体是不可压缩的(即流体的密度是不变的)，为了简便，不妨假定其密度为 1 。设 $S$ 为场中一有向曲面，我们求在单位时间内流体向正侧穿过 $S$ 的流量 $Q$ 。(有的参考书中把单位时间流过的体积定义为流量。)

为此，在 $S$ 上取一面元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$M$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 上任一点，由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 甚小，可以将其上每一点处的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与法矢量 $\boldsymbol{n}$ 都近似地看做不变，且都与 $M$ 点的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 相同。这样，流体穿过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的流量 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}$，就近似地等于以 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为底面积，$v_n$ 为高的柱体体积（如图 1－7 所示），即 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}=v_n\,\mathrm{d}S$，或 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是点 $M$ 处的有向面元，其方向与 $\boldsymbol{n}$ 一致，其模等于 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，因而在单位时间内向正侧穿过曲面 $S$ 的流量，就可以用曲面积分表示为

$$Q=\int_S v_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-8}$$

这种形式的曲面积分，以后常常碰到，为便于研究，将形如上述的曲面积分概括为通量的概念。

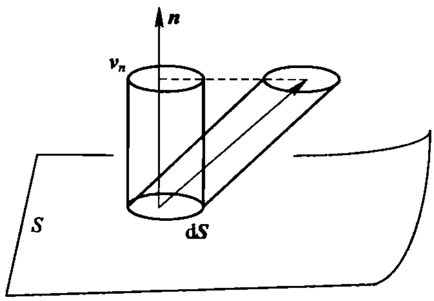



图 1－7　通量

我们称矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向曲面 $S$ 的曲面积分

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-9}$$

为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 向正侧穿过曲面 $S$ 的通量。

在直角坐标中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

如果 $S$ 是一个闭曲面，则用 $\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 从闭合面流出的通量。

**例 1－7**　若矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x$，求 $\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的值，其中 $S$ 是由 $x^2+y^2=r^2$，$z=0$，$z=h$ 组成的闭合曲面（如图 1－8 所示）。

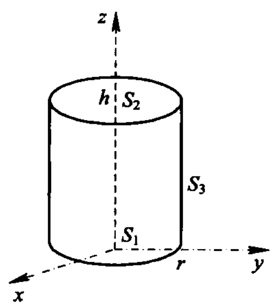



图 1－8　例 1－7 图

**解**　我们用 $S_1$，$S_2$，$S_3$ 分别表示 $z=0$，$z=h$ 和 $x^2+y^2=r^2$，则

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_{S_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

且在 $S_1$，$S_2$ 上，因矢量场与有向面元的法向互相垂直，因而积分为零。在 $S_3$ 上，将 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 代入后积分，并且考虑在曲面 $S_3$ 上，有 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。所以有

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{S_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{S_3}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi r^2 h$$

现在，我们以流体为例，说明流量的物理意义。当通量为正时，表示有净流量流出，说