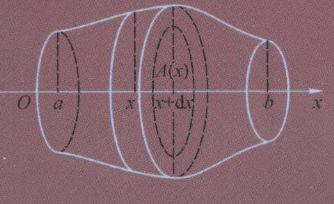
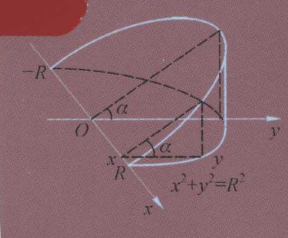
自主创新
方法先行

高等数学

（第一分册）

主　编　李寿贵　李德宜
副主编　张　青　徐树立　李春丽　张学英





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

高等数学

（第一分册）

主　编　李寿贵　李德宜
副主编　张　青　徐树立　李春丽　张学英

Gaodeng Shuxue

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”（项目编号：2009IM010400）子课题“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果。

本书是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，结合最新《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的。在教材编写的过程中，注意将科学思维、科学方法贯穿于知识传授与能力培养的始终，注意与中学数学教学相衔接，注重现代科学技术的灵活体现，注重理论与实践的有机结合，力求做到全书结构严谨、逻辑清晰、叙述详尽、通俗易懂、便于自学，力求做到有利于培养学生的创新精神和能力，有利于加强学生的数学素养，有利于提高学生的实践动手能力。

全书共分为三个分册。本书是第一分册，其主要内容为：预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程等。

本书适合普通高等院校理工类各专业的学生作为教材使用，也可作为其他各类高校师生和相关科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．第 1 分册/李寿贵，李德宜主编．—北京：高等教育出版社，2013.4

ISBN 978-7-04-036185-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　②李…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 031227 号

策划编辑　王　强　　责任编辑　贾翠萍　　封面设计　于　涛　　版式设计　童　丹
插图绘制　宗小梅　　责任校对　胡晓琪　　责任印制　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.75	版　　次	2013 年 4 月第 1 版
字　　数	320 千字	印　　次	2013 年 4 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.20 元

物 料 号　36185-00

前　言

本书是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，结合最新《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的。

全书共分为三个分册。第一分册的主要内容为预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程；第二分册的主要内容为无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分；第三分册的主要内容为数学实验部分，编有MATLAB环境、MATLAB的数组及其运算、MATLAB的程序设计、一元函数图形绘制、收敛性判别、二元函数图形绘制、泰勒逼近与数据拟合、函数最优化、非线性方程求解、插值、数值微分、数值积分、微分方程求解等13个实验。

在编写的过程中，注意将科学思维、科学方法贯穿于知识传授与能力培养的始终，注意与中学数学教学相衔接，注重现代科学技术的灵活体现，注重理论与实践有机结合，力求做到全书结构严谨、逻辑清晰、叙述详尽、通俗易懂、便于自学。书中以小字体的形式配有很多与概念和定理等相关的小知识窗口，每章后还附有与本章知识相关的阅读材料，增强可读性，便于拓展读者知识面，激发读者学习兴趣。书中每节配有习题，每章末配有总习题，书末附有习题答案，以便在检查学习效果以及复习方面发挥作用。本书力求做到有利于培养学生的创新精神和能力，有利于加强学生的数学素养，有利于提高学生的实践动手能力。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请专家、同行、读者提出宝贵意见，以便再版时修订。

编者

2012年3月

目　录

第〇章 预备知识

高等数学是研究变量的科学，恩格斯(Friedrich Von Engels)曾说过："数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学. 有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了."变量与变量之间的联系就是函数关系. 本章从集合、映射的概念出发引出函数、反函数的概念，接着介绍三角函数、反三角函数等重要函数的概念与性质，最后简单介绍极坐标系.

第一节　函　　数

世界是普遍联系的，数学则是揭示事物之间数量联系的工具. 例如：水的沸点随海拔的增高而变化，圆的面积与其半径有关等. 这些现象、规律都是变量与变量之间函数关系的反映. 函数的概念是建立在集合、映射上的. 下面介绍集合、映射的概念.

一、函数的概念

1. 集合的概念

所谓集合是指若干事物所构成的总体，简称集. 用 $A,B,C\cdots$ 表示. 组成集合的事物称为集合的元素. a 是集合 M 的元素表示为 $a\in M$.

集合的表示可采用列举法或描述法. 所谓列举法是把集合的全体元素一一列举出来. 如 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；而描述法是指若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，即 M 可表示为 $M=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$. 例如圆心在原点的单位圆上的点构成的集合可表示为 $\{(x,y)\mid x,y$ 为实数，$x^2+y^2=1\}$.

下面是高等数学中常用的几个数集(元素全是数的集合称为数集)：

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集，$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$\mathbf{N}_+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合，称为实数集.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合，称为整数集，$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合，称为有理数集.

2. 映射的概念

定义 1　设 X,Y 是两个非空集合，f 是一个对应法则，使得对 X 中每个元素 x，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\to Y,$$

$$x\mapsto y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$，X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记为 R_f，或 $f(x)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

需要注意的是：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定有 $R_f=Y$.

例 1　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=|x|$.

显然，f 是一个映射，$D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的. 如 $y=1$ 的原像就有 $x=1$ 和 $x=-1$ 两个.

定义 2　设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）.

图 0－1 清楚地表明了单射、满射、双射之间的关系.

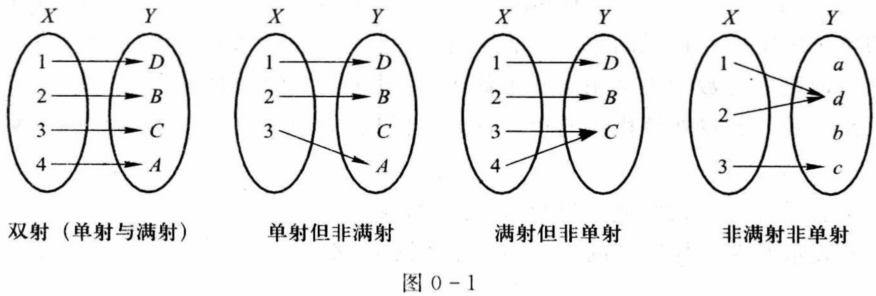


图 0－1

定义 3 设 f 为 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即 $g:R_f\to X$. 对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射.

定义 4 设有两个映射 $g:X\to Y_1$，$f:Y_2\to Z$，其中 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定义一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即

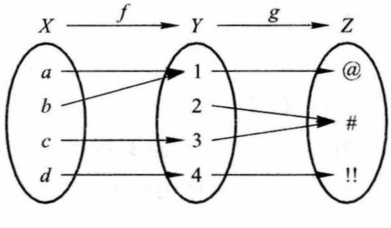


图 0-2

$$f\circ g:X\to Z,$$
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in X.$$

如图 0-2 所示.

3. 函数的概念

定义 5 设数集 $D\subset \mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数定义中，对每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$，因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 例如，函数 $f(x)=x$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 定义域相同，但对应法则不同，值域也不同，从而是两个不同的函数.

前面讲到的 $f(x)=|x|$，是用写出函数表达式表示函数的方法，称为解析法（公式法），其特点是全面、准确. 此外还可用列表法、图形法表示函数，所谓列表法，就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系，列表法无需经过计算就能知道函数在某些情况下的取值. 而用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{M(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形. 其特点是表现方式直观、形象，如心电图、股市走向图等.

4. 函数举例

例 2 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 称为符号函数.

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，如图 0-3 所示.

例 3 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$.

函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

如：$[-7.6]=-8$，$[-\sqrt{2}]=-2$，$[0]=0$，$\left[\dfrac{9}{4}\right]=2$，$[\pi]=3$，如图 0-4 所示.

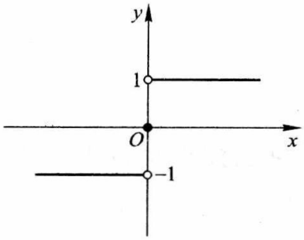


图 0-3

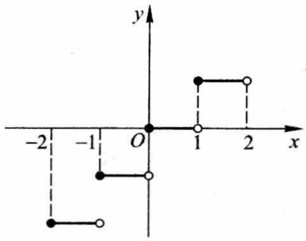


图 0-4

(1) 分段函数

在实际应用中我们经常会遇到在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，即分段函数. 例如：

例 4 函数 $y=\begin{cases}1+x, & x<1\\ 1+\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$.

这是一个分段函数，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=(-\infty,2]$.

例如，$f(-3.5)=-2.5$，$f(\sqrt{6})=1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，如图 0-5 所示.

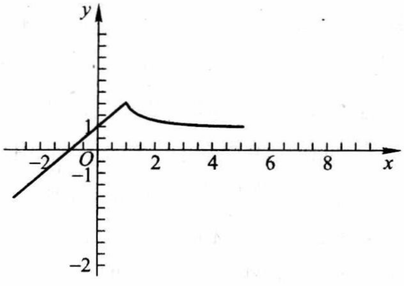


图 0-5

(2) 双曲函数

双曲正弦：$\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，

双曲余弦：$\operatorname{ch} x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，

双曲正切：$\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

如图 0－6，图 0－7 所示.

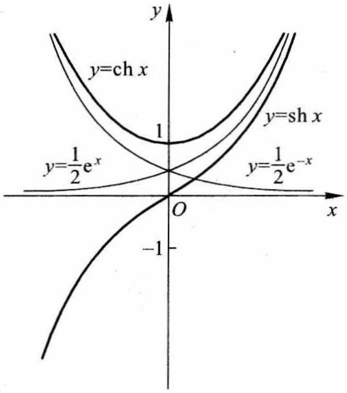


图 0－6

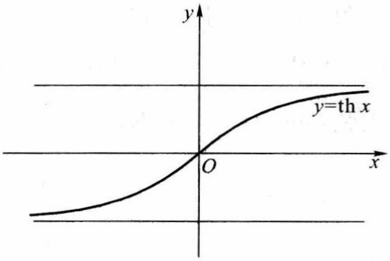


图 0－7

双曲函数的性质：

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,\quad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x.$$

下面证明：

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y:$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y&=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

二、三角函数

自然界和现实生活中的许多运动、变化都有着循环往复、周而复始的现象，这种变化规律称为周期性.例如：潮汐的变化、钟摆的运动等.这种周期性的运动、变化需要用周期函数来描述，三角函数就是其中一种重要的周期函数.

定义 6 设 $f(x)$ 是定义在数集 M 上的函数，如果存在非零常数 T，有 $x+T\in M$，且具有性质：$f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是数集 M 上的周期函数，常数 T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 如果在所有正周期中有一个最小的，则称它是函数 $f(x)$ 的最小正周期.

下面介绍三角函数的概念.

1. 任意角的三角函数

在角 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$，记：

$r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，如图 0－8 所示.

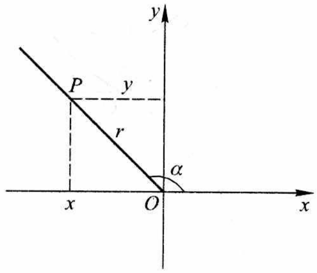


图 0－8

正弦：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}, x\in\mathbf{R}$，

余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}, x\in\mathbf{R}$，

正切：$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

余切：$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

正割：$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

余割：$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

小知识 平面三角学

平面三角学是专门研究平面上三角形的边和角的关系、三角函数及其性质及应用. 古埃及人和希腊人在生活和生产实践中早已认识到三角形诸元素间具有的各种关系. 希腊喜帕恰斯(Hipparchus)曾作出第一个与目前使用的三角函数表相仿的弦表. 雷格蒙塔努斯(Regiomontanus)于 1464 年完成《论一般三角形》，这在欧洲是一本系统的三角形学论著，包括平面三角形和球面三角形两部分，其中论述了直角三角形性质、正弦定理、余弦定理等. 另外他还制作出了相当精密的三角函数表. 瑞士科学家欧拉(Euler, L.)的显著功绩是发现三角函数，并指出，若令圆半径为单位长，那么所有的三角函数都可大大简化. 这使三角学从只是静态地研究三角形解法的狭隘天地中解放出来，有可能去反映现实世界一切可用三角函数反映的运动或变化过程.

以上六种函数都称为三角函数，其中正弦、余弦、正切、余切曲线如图 0－9 所示.

显然 2π 就是上述三角函数的最小正周期.

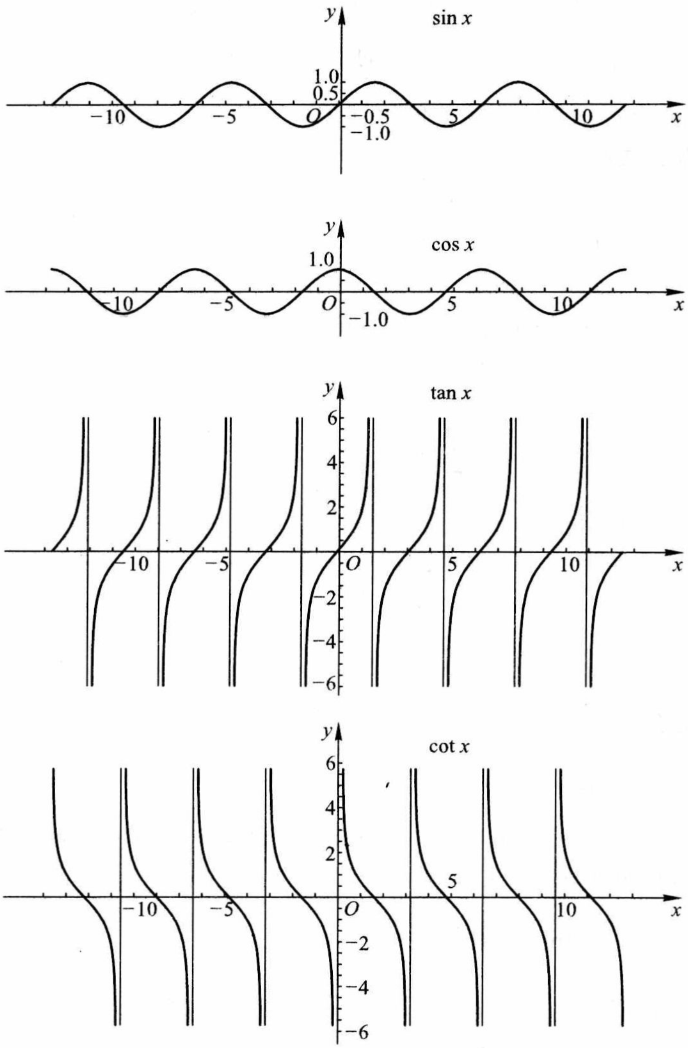


图 0－9

2. 同角三角函数的基本关系式

倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha.$

3. 诱导公式

(1) $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z}),-\alpha,\pi+\alpha,\pi-\alpha,2\pi-\alpha$ 的三角函数值，等于 α 的同名函

数值,前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

(2) $\frac{\pi}{2}+\alpha,\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{3\pi}{2}+\alpha,\frac{3\pi}{2}-\alpha$ 的三角函数值,等于 α 的异名函数值,前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

4. 和角公式和差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$,

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

5. 二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

6. 万能公式

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

万能公式告诉我们,单角的三角函数都可以用半角的正切来表示.

7. 和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

8. 积化和差公式

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$,

$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$,

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$,

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

我们可以把积化和差公式看成是和差化积公式的逆应用.

9. 辅助角公式

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

其中:角 φ 的终边所在的象限与点(a,b)所在的象限相同,并且有

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\varphi=\frac{b}{a}.$$

三、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 7 设函数 $f:D\to f(D)$是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称此映射 f^{-1}为函数 f 的反函数.

按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有 $f^{-1}(y)=x$.这就是说,反函数 f^{-1}的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

一般地,$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数,则 $f:D\to f(D)$是单射,于是 f 的反函数 f^{-1}必定存在,而且容易证明 f^{-1}也是 $f(D)$上的单调函数.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$来说,原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.把函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

指数函数和对数函数在一定条件下互为反函数,下面是一些重要的反函数.

2. 反双曲函数

双曲函数 $y=\operatorname{sh}x,y=\operatorname{ch}x(x\geqslant0),y=\operatorname{th}x$ 的反函数依次为

反双曲正弦:$y=\operatorname{arsh}x$,

反双曲余弦:$y=\operatorname{arch}x$,

反双曲正切:$y=\operatorname{arth}x$.

下面推导反双曲正弦函数表达式:

$y=\operatorname{arsh}x$ 是 $x=\operatorname{sh}y$ 的反函数,在 $x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$中令 $u=e^y$,则有 $u^2-2xu-1=0$.这是一个关于 u 的二次方程,它的根为 $u=x\pm\sqrt{x^2+1}$.因为 $u=e^y>0$,于是 $u=x+\sqrt{x^2+1}$.