

大學用書

解題導向的 數學教學策略

吳德邦・吳順治 編譯



五南圖書出版公司 印行



大 學 用 書

解題導向的
數學教學策略

吳德邦

國立台灣師範大學數學研究所碩士
台中師範學院數理教育學系講師

吳順治

國立成功大學航空太空研究所博士班肄

五南圖書出版公司 印行



解題導向的
數學教學策略

編譯者／吳德邦・吳順治
責任編輯／王翠華

發行人／楊榮川
發行所／五南圖書出版有限公司
登記證：局版台業字第 0598 號
地址：台北市銅山街 1 號
電話：3569060～5
傳真：3932365
劃撥：0106895-3

印刷所／茂榮印刷事業有限公司
地址：臺北市西園路二段 140 巷 49 號
電話：3089357・3061972

中華民國 78 年 7 月初版一刷
中華民國 80 年 7 月初版二刷

ISBN 957-11-0327-6

基本定價 6.6 元

(如有缺頁或倒裝，本公司負責換新)

簡 序

身處於 20 世紀末葉，再過十一年即邁入 21 世紀，而科技正以驚人的速度在改變人類的生活，未來的社會到底是怎樣的一個世界，我們實在是很難去預測。目前正在國民小學低年級就讀的學童，直到他們大學畢業邁入社會，成為社會的中堅份子，那時候的年代已經是 21 世紀了。因此，世界各國的科學家及教育工作者，莫不希望能好好規畫現代的教育，能在 21 世紀來臨的時候，有足夠的人才進入社會中，讓自己的國家快速發展，並列於先進國家之林。

因此，世界各國之教育學者一致認為「問題解決」(Problem-Solving) 是當今教育之主流，數學教育亦不例外。由於科技的快速改變，我們很不容易去預測，社會未來的主人翁需要何種型式之數學，以適應未來生活的需要。事實上，由於電算器 (electronic calculators) 和電腦 (computer) 之快速變化，現在通行的許多課程將來很可能會被認為是過時的，尤以那些繁雜的計算過程和必須動手去做的課業為然。不過「問題解決」這個主題將會永久的保留下來，蓋因不論時間如何更替，科技如何進步，人們總是必須面對問題，諸如工作上或是遊戲上的問題、升學的問題、就業的問題等，而設法去解決這許許多多的問題。電算器的操作以及電腦程式的設計，將有助於提供正確的答案，也唯有類人的智慧才能解決這些問題。我們必須使我們的學生具備「問題解決」的基本能力，也使得他們將來離開教室而進入「實際的世界」時，會使用這些基本技巧以及數學

邏輯觀念，去解決他們所面對的問題。

吳德邦老師係本校六十八級畢業之校友，曾任教於私立竹林小學，服務成績優異，尤其可佩的是他在小學服務期間，利用夜間就讀於國立台灣師範大學數學系，後來又以高分考取該校數學研究所。本院為借重其專才，在其取得碩士學位之後，特予延攬回母校服務；三年多以來，教學認真負責，頗獲學生敬愛。吳老師平時在學術研究上亦孜孜不倦，完成學術論文數篇及專書數本；其中，「我國與美國波斯頓市小學數學課程比較研究」曾獲國科會成果獎助，「國民小學數學問題解決的教學模式」一書獲得教育廳研究獎助。在輔導各縣市小學數學教育，亦不遺餘力。如今吳老師又不辭辛勞，利用課餘之暇，完成「解題導向的數學教學策略」一書，這實在是數學教育界之幸事。本書不但可以讓師院在學學生閱讀，以充實數學教育之知識，更適合現任之小學教師參閱，以改善教學。相信本書之出版與發行，對我國數學教育界，必能產生相當之貢獻。

簡 茂 發

民國 78 年 6 月

序於台灣省立臺中師範學院

陳 序

作者吳德邦先生，師專出身，曾服務國民小學多年，服務期間以在職進修方式，再進入國立台灣師範大學數學系攻讀。畢業後又考入該校數學研究所研修，專研究國民小學數學教材教法，以師專出身，再進而研究此項題目，對小學教育之貢獻，自必較為具體。其碩士畢業論文，由筆者指導，題為「我國與美國波斯頓市小學數學課程比較研究」。因美國波斯頓市原來資料為「幼稚園到國中二年級的數學課程」（K-8），其後面國中部份由其數學研究所同學李源順君為之譯述，合為「中美國民中小學數學課程比較研究」，由筆者與其兩人合著，由板橋教師研習會出版。該書對我國小學數學課程之修訂，相信應具參考價值。

吳德邦先生現任職於台中師院，平時勤於研究及著述，出版國小及幼稚園實用教材教法參考用書多種。近又以「解題導向的數學教學策略」一書，徵序于余。翻閱之下，深覺其立言平實，方法新穎，實用之例證尤多。美國自「數學革命」之後，小學之數學課程，已「返回基本」（Back-to-Basics），特別重視四則方法之演算教材，更加強調「問題解決」（Problem-Solving）題材，所謂「解題教學」是也。良以目前計算機械發明，一般之計算技術，都可用計算器械來替代，但必須知道為何「解答問題」，知道了如何解題，才可運用操作器械為之計算，否則，空有最好之工具，亦無法為之使用。這是美國現在學校課程「返回基本技巧」，又特別重視「解題教學」

之理由。我國目前日常經濟生活，也已到了此一與美國相似地步，所以小學數學教育，應重視「解題」題材，也是必然趨勢。深望因此書之出版，對我國國民小學解題教學，有所幫助，則幸甚焉。

陳 梅 生

民國 78 年 6 月
序於中國醫藥學院



1976 年，美國之「全美數學輔導人員協會」(The National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM) 在亞特蘭大市 (Atlanta) 召開年會，與會人士超過一百人，建議中小學數學教育，除了應重新重視基本計算技巧的數學之外，並訂下廣義返回基本的範圍作為數學教育的方向。1977 年元月公佈會議記錄，發表了「數學基本技巧宣言」一文，文中宣佈了十個基本數學技巧，茲將十個基本數學技巧介紹如下：

1. 解題 (Problem Solving)
2. 應用數學於日常生活情境中 (Applying)
3. 警覺於結果的合理性 (Alertness to the reasonableness of results)
4. 估計與近似 (Estimation and Approximation)
5. 適度的計算技能 (Appropriate Computational Skills)
6. 幾何 (Geometry)
7. 實測 (Measurement)
8. 圖表的讀法，解釋及繪製 (Reading Interpreting and Constructing Tables, Charts and Graphs)
9. 利用數學去預測結果 (Using Mathematics to Predict)

10.電腦普及教育 (Computer Literacy)

此一宣言發表後，美國數學教育從此揚棄了新數學，在「返回基本」(Back-to-Basics) 的呼聲中，開始實施其基本技巧的課程及教材。

1977年元月，「全美數學輔導人員協會」(NCSM) 發表了「數學基本技巧宣言」，為了說明及詮釋所公佈的基本技巧，「全美數學教師協會」(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 在1980年又出版了「數學行動大綱」(An Agenda for Action)，對於1980年代的數學教育方向，提供了建設性的說明，茲摘述如下：

1. 「問題解決」(Problem Solving) 將是1980年代中小學數學教育的重心；
2. 定義數學基本技巧(Basic Skills) 的範圍應比計算能力更為廣泛；
3. 中小學各年級中的數學教材，必須重視電算器(Caculator) 以及電子計算機(Computer) 的能力所帶來的影響；
4. 數學的教學必須應用效果以及效率兩者的標準；
5. 數學教學的成功與否以及學生學習成績的好壞；除了應用傳統普通的測驗方式來評鑑之外，更應發展更廣泛、更客觀的評量方式；
6. 要求所有的學生研讀更多的數學，並且設計富有較大選擇，較有彈性的課程，以供學生不同的需要；
7. 數學教師應要求自己以及他們的同事提昇專業知識的水準；
8. 個人及社會應該了解數學的重要性，進而提高社會大眾對數學教學的支持。

由上述可知，「問題解決」是數學教育之重心，亦是世界數學教育的趨勢，日本不但加以吸收，更進而推廣成為「問題發展」，且有關之書籍和論文極多。

我國行政院國家科學委員會，對於科學教育一向非常重視，亦早已密切注意到以問題解決為導向的教學方式，於民國七十四年四月成立「數學教育部門規畫小組」，該小組提出四大項目作為未來科學教育研究發展之重點和方向，其中一點即是「解題導向的數學教學」，但是，在國內有關之書籍和論文尚不多。本書之出版與發行，不只提供了此一問題解決導向的教學策略，作為數學教師從事教學之參考，更適合各師範學院學生研讀，以充實數學教育之新知，以便將來成為優秀之數學教師。

臺灣省立臺中師範學院
數理教育學系 系主任

劉 湘 川

民國 78 年 6 月

自序

在這科技快速改變的時代中，我們實在很難去預測我們的下一代需要何種型式的數學，加上電算器（calculators）和電腦（computer）的快速成長和發展，我們將會發現，現在通行的許多數學課程很有可能會被認為是過時的，不過有一個主題，會被永久保留下來，那就是「問題解決」（problem-solving），因為無論時間經歷多久，科技如何發達，人們總是必須去面對並解決許多的問題，科技能找得到答案，但是只有人類的頭腦和智慧才有辦法解決問題，於是才有：「問題解決將是1980年代中小學數學教育的重心」這種呼籲。

我們覺得要進行問題解決的教學方式應該強調並發展下列問題解決的基本技巧，使得兒童具有解題的能力：

1. 閱讀問題；
2. 探究問題；
3. 選擇策略；
4. 解決問題；
5. 複習，回顧和驗證解答。

本書中提供了許多的教學活動設計以及158頁的「複印用紙」，教學活動係供教師指導活動參考之用，複印用紙是供學生練習之用，老師可以剪下來立即影印或油印大量製造，讓每位學生都有一份可以

練習，藉此以訓練學生解決問題的技巧，俾使我們的下一代，能適應「資訊化社會」高科技的生活方式。

筆者非常感謝臺灣省立臺中師範學院 簡院長茂發博士和中國醫藥學院 陳院長梅生博士於日理萬機百忙之中，為本書賜序。臺灣省立臺中師範學院數理教育學系系主任 劉主任湘川博士，給予本書許多的指正，並賜序，在此，致上十二萬分的謝意。同時，感謝五南圖書公司董事長楊榮川先生之熱心幫忙，才使得本書能如此順利的出版。最後，對於馬秀蘭小姐細心的校正，以及林淑玲小姐將原稿鍵入電腦，倍極辛勞，在此致上十二萬分的感激。

筆者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尚乞學界先進不吝賜予指正，當無限感激。

吳德邦・吳順治

謹識於民國 78 年 6 月

解題導向的
數學教學策略

目 次

簡 序

陳 序

劉 序

自 序

圖表目次

複印用紙目次

第〇章 前言.....—

第 1 章 數學教學的新趨勢——問題解決.....三

1.1 「問題解決」之沿革 / 4

1.2 以問題解決為重心之數學教育產生的原因 / 7

1.3 「問題解決」將是 1980 年代中小學數學教育的重心
/ 10

第 2 章 解題導向的數學教學策略.....一九

2.1 什麼是一個問題？ / 21

2.2 什麼是問題解決？ / 23

2.3 問題解決的策略 / 23

- 2.4 問題解決的子技巧 / 26
- 2.5 如何使用本書的「複印用紙」以及「教學活動」
/ 28
- 2.6 如何評量問題解決的活動 / 29

第3章 「閱讀問題」基本技巧的訓練……………三一

- 3.1 教學活動 3.1 / 32
- 3.2 教學活動 3.2 / 33
- 3.3 教學活動 3.3 / 33
- 3.4 教學活動 3.4 / 34
- 3.5 教學活動 3.5 / 35
- 3.6 教學活動 3.6 / 35
- 3.7 教學活動 3.7 / 36
- 3.8 教學活動 3.8 / 36
- 3.9 教學活動 3.9 / 37
- 3.10 複印用紙第1頁至第21頁 / 37

第4章 「探究問題」基本能力的培養……………八三

- 4.1 教學活動 4.1 / 84
- 4.2 教學活動 4.2 / 84
- 4.3 學生自己出題目 / 85
- 4.4 教學活動 4.3 / 85
- 4.5 教學活動 4.4 / 86

4.6 教學活動 4.5 / 86

4.7 複印用紙第 22 頁至第 53 頁 / 86

第 5 章 選擇並使用策略.....一五一

5.1 認識模式 / 153

5.2 簡化與變形 / 159

5.3 實驗與模擬 / 163

5.4 推測與驗證 / 169

5.5 邏輯推演 / 174

5.6 編制表格 / 176

5.7 逆推法 / 180

5.8 複印用紙第 54 頁至第 91 頁 / 182

第 6 章 問題解決.....二五九

6.1 教學活動 6.1 / 260

6.2 教學活動 6.2 / 260

6.3 複印用紙第 92 頁至第 97 頁 / 261

第 7 章 複習，回顧和驗證解答.....二七七

7.1 推算出來的答案和估計的答案之比較 / 278

7.2 教學活動 7.1 / 278

7.3 教學活動 7.2 / 279

7.4 教學活動 7.3 / 279

7.5	教學活動 7.4	/ 279
7.6	教學活動 7.5	/ 279
7.7	教學活動 7.6	/ 280
7.8	複印用紙第 98 頁至第 106 頁	/ 280

第 8 章 策略性遊戲的蒐集.....三〇一

8.1	教學活動 8.1	/ 302
8.2	教學活動 8.2：西洋棋盤	/ 308
8.3	教學活動 8.3：多方面的策略性遊戲	/ 311
8.4	複印用紙第 107 頁至第 125 頁	/ 315

第 9 章 非例行性問題的蒐集.....三五三

9.1	適合小學程度的非例行性問題	/ 354
9.2	適合國中程度的非例行性問題	/ 361
9.3	適合高中程度的非例行性問題	/ 375
9.4	複印用紙第 126 頁至第 159 頁	/ 386

第 10 章 結 語.....四五三

參考文獻.....四五七

圖表目次

表 1-1	怎樣解題提示表	5
圖 2-1	解題過程之流程圖	24
圖 2-2	解題的七個策略	26
圖 2-3	問題解決的技巧	27
圖 5-1	徐立德喜歡或不喜歡的東西	155
圖 5-2	陳秀芳喜歡或不喜歡的東西	157
圖 5-3	寄出的信件	158
圖 5-4	新新錄音帶公司銷售量	159
圖 5-5	街道圖	162
圖 5-6	街道圖的走法	162
圖 5-7	長方體的木架	166
圖 5-8	圍個圓圈	168
圖 5-9	飛標靶	171
圖 5-10	正五邊形的總和	171
圖 5-11	正五邊形總和之解答	172
表 5-12	十二種不同的組合方式	177
表 5-13	牲畜之統計表	178
圖 5-14	圍個花園	178
表 5-15	怎麼買最省錢	179
表 5-16	解題步驟之比較	181
表 5-17	玩撲克牌	182