

上海市中学教师进修教材

代数与初等函数

上

册

江西人民出版社

上海市中学教师进修教材

代数与初等函数

上册

王 国 樑	章 正 华	编
刘 铁 楼	周 世 继	
余 元 希	施 毓 湘	

校

上海市中学教师进修教材编写组

上海市中学教师进修教材

代数与初等函数

上 册

上海市中学教师进修教材编写组编

江西人民出版社出版

(南昌百花洲3号)

江西省新华书店发行 江西新华印刷厂印刷

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 14.75 字数 344,000

1980年5月第1版 1980年5月第1次印刷

印数 1—115,000

统一书号: 7110·235 定价: 1.10 元

内 容 提 要

全书分上、下两册，上册内容有数与式，方程与不等式，下册内容有排列与组合，代数函数与超越函数。书中对许多重要的理论问题作了较为详细的论述，并附有一定数量的例题和习题，可供中学数学教师自学、进修或教学参考之用。

前 言

本书是中学数学教师的进修教材。

中学数学教师的进修，除了学习和总结教学经验、系统地学习数学教学法以外，对教材内容本身的研究也很重要。例如，中学数学中的基本概念和方法，只有对它的来源与归宿有深入的了解，才有可能居高临下地指导教学。

中学数学教材里有许多重要的理论问题，限于青少年年龄特征的关系，没有作详尽的论述。因此，有必要作为教师进修的内容提出来进行讨论。其中有些问题可由进修高等数学来解决。但有部分问题，中学数学里不讲，高等数学里也不讲。如将真分式化为部分分式的理论，方程的同解理论等就是如此；另有些问题，在高等数学里采用了不同于初等数学的观点和方法，如多项式在高等代数里是未定元的形式的表达式，而在中学课程里它则是变数的函数等；还有一些问题，虽然在高等数学教材里可以找到，但不宜于直接作为进修的内容，如微积分中的实数理论等就是如此。本书的任务，就是要与相应的几何教材一起对中学数学课的内容进行较为深入地、系统地、有科学根据地阐述。

对数学习题的归纳与研究是研究教材的另一方面。本书在讲述理论的同时也列举了一些例题，并附有少量的习题给读者练习，其中一部分是为了对理论的验证和补充，另一部分是对常见解题方法的归纳，试图给读者的一点启示。它并无解题“指南”的性质，题海浩瀚、本书只能挂一而漏万了。对这方面有需要的读者，可参阅各种初等数学习题集。

为了便于读者自学，在本书中增加了部分供参考的内容。在教学中对于标有星号的材料可根据学员的实际情况作必要的删节。

本书编写工作在上海市教育局的领导下，在编写过程中得到上海市虹口区教师进修学院、南市区教师进修学院、宝山县教师进修学院和刘元章同志的大力支持，在此一并表示感谢。

限于编者水平，加上时间仓促，其错误和不妥之处，希望读者和使用本书的老师予以批评指正。

中学教师进修教材编写组

1979年6月

目 录

前言

第一章 数集、数环和数域	(1)
§ 1 集合的基本概念	(1)
1.1 集合的概念	(1)
1.2 集合的表示方法	(3)
1.3 包含关系	(5)
1.4 一一对应和等价	(8)
1.5 集合的运算	(11)
§ 2 自然数	(23)
2.1 自然数	(23)
2.2 自然数的大小比较	(24)
2.3 自然数的运算	(26)
2.4 零	(30)
§ 3 自然数的序数理论*	(31)
3.1 加法	(33)
3.2 乘法	(35)
3.3 自然数的大小比较	(37)
§ 4 分数	(38)
4.1 分数的意义	(38)
4.2 分数的大小比较	(39)
4.3 分数的运算	(42)
§ 5 有理数	(47)

5.1	负数	(48)
5.2	有理数的定义	(49)
5.3	有理数的绝对值	(50)
5.4	有理数的大小比较	(50)
5.5	有理数的运算	(52)
5.6	有理数集的性质	(58)
§ 6	实数	(64)
6.1	无理数	(64)
6.2	实数	(69)
6.3	实数的连续性和不可数性	(83)
§ 7	复数	(86)
7.1	复数的概念	(87)
7.2	复数与实数的关系	(90)
7.3	复数的代数式	(91)
7.4	共轭复数	(93)
7.5	复数运算的几何意义	(94)
7.6	复数的乘方与开方	(102)
§ 8	数环与数域	(108)
习题一		(113)

第二章 代数式的恒等变形 (122)

§ 1	代数式	(122)
1.1	解析式	(122)
1.2	恒等变形	(124)
1.3	代数式	(125)
§ 2	多项式	(125)
2.1	基本概念	(125)

2.2	多项式的恒等	(129)
§ 3	多项式的加法、减法、乘法	(131)
3.1	多项式对加、减、乘运算的封闭性	(131)
3.2	多项式的和、差与积的次数	(132)
3.3	分离系数法	(133)
§ 4	乘法公式	(135)
4.1	乘法公式	(135)
4.2	恒等变形的举例	(137)
§ 5	待定系数法	(143)
§ 6	多项式的除法	(146)
6.1	带余式的除法	(146)
6.2	分离系数除法与综合除法	(149)
6.3	多项式的整除性	(152)
§ 7	最高公因式	(157)
7.1	最高公因式及其存在定理	(157)
7.2	辗转相除法	(161)
7.3	互质多项式	(165)
§ 8	多项式的根	(167)
8.1	余式定理	(167)
8.2	整系数多项式有理根的求法	(171)
§ 9	因式分解	(174)
9.1	因式分解的一般概念	(174)
9.2	因式分解的特殊方法	(181)
9.3	关于一元多项式因式分解一般方法的问题	(189)
§ 10	对称多项式	(191)
10.1	对称多项式的一般形式	(192)
10.2	对称多项式的性质	(193)

10.3	对称多项式的因式分解	(197)
10.4	轮换对称多项式	(200)
§ 11	有理分式	(201)
11.1	基本概念	(201)
11.2	有理分式的约分	(203)
11.3	有理分式的运算	(205)
11.4	部分分式	(210)
§ 12	根式	(219)
12.1	根式与无理式	(219)
12.2	根式的运算	(219)
12.3	共轭根式	(225)
12.4	根式 $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 的化简	(229)
习题二		(233)

第三章 方程和方程组 (241)

§ 1	方程的一般概念	(241)
1.1	等式与方程	(241)
1.2	同解方程	(243)
1.3	方程的变形	(245)
§ 2	整式方程	(250)
2.1	一元一次方程	(250)
2.2	一元二次方程	(252)
2.3	一元 n 次方程	(259)
2.4	一些特殊高次方程的解法	(278)
§ 3	方程组的一般概念	(294)
3.1	方程组	(294)
3.2	方程组的变形	(295)

§ 4	行列式与线性方程组	(306)
4.1	二阶与三阶行列式	(306)
4.2	三阶行列式的性质	(309)
4.3	行列式按一行(或列)的展开	(314)
4.4	n 阶行列式	(318)
4.5	线性方程组的求解公式(克莱姆法则)	(323)
§ 5	二元二次方程组	(337)
5.1	第一型的二元二次方程组的解法	(337)
5.2	第二型的二元二次方程组的解法	(340)
5.3	结式、消去法	(349)
5.4	其他一些特殊整式方程组	(353)
§ 6	分式方程与无理方程	(357)
6.1	分式方程	(358)
6.2	无理方程	(365)
习题三		(376)

第四章 不等式 (386)

§ 1	不等式的一般概念	(386)
1.1	不等式和它的性质	(386)
1.2	数的区间	(389)
1.3	同解不等式	(391)
§ 2	不等式的解法	(395)
2.1	一元一次不等式(组)	(395)
2.2	一元二次不等式(组)	(401)
2.3	一元 n 次不等式	(405)
2.4	一元分式不等式	(408)
2.5	一元无理不等式	(409)

2.6	含有绝对值的不等式.....	(412)
2.7	二元不等式组.....	(416)
§ 3	不等式的证明.....	(425)
3.1	不等式的证明.....	(425)
3.2	几个著名的不等式.....	(435)
3.3	含有绝对值的不等式.....	(440)
§ 4	应用不等式求最大值和最小值.....	(444)
习题四		(455)

第一章 数集、数环和数域

数的概念是数学中最主要的概念之一。在中小学阶段，学生已经学过自然数、零、正分数、有理数、实数和复数等概念，但是限于学生当时的实际水平，因此，一般都采用直观描述的方法，而不追求理论上的严谨。

要严格地建立数的理论，需要用到高等数学的知识，这超出了本书的范围。为了使教师能更好地掌握中学数学教材中关于这一部分的内容，这一章里将应用初等数学为工具，对建立数的理论的知识，作扼要的阐述。为了需要，首先要学习关于集合的一些初步知识，最后还将联系数的运算的封闭性，引进“数环”和“数域”的概念。

§ 1 集合的基本概念

1.1 集合的概念

集合（或称集）是数学中最基本的原始概念之一，它的含意就是把具有某种同一属性的事物放在一起，形成的一个集体。例如，一只手的手指的集合，组成这个集合的事物是这只手上的大拇指、食指、中指、无名指和小指；方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的根的集合，组成这个集合的事物是方程的根 1 和 4；……。我们把组成集合的每一个事物叫做集合的元素。在本书中，我们将用大写字母 A 、 B 、 C 、……、 M 、 N 、……等表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c 、……、 m 、 n 、……表示集合的元素。

如果 a 是某个集合 A 的一个元素，我们就说，元素 a 属于集合 A ，记作

$$a \in A.$$

这里符号“ $\in$ ”读作“属于”。

从上面的例子中可以看出，集合中所包含的元素都具有同一属性的，这种具有同一属性的元素是可以通过某种法则（或某种概念的种属关系上）来判定它是否属于这个集合。

例如，方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ ，通过二次方程的求根公式（指的某种法则），可以得到它的根是 1 与 4，这些确定的根，就是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的根的集合里的元素。

设 A 为方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的根的集合，那么

$$1 \in A; 4 \in A.$$

如果 a 不是某个集合 A 的一个元素，我们就说，元素 a 不属于集合 A ，并记作

$$a \notin A.$$

这里符号“ $\notin$ ”读作“不属于”。

我们知道，-1 和 -4 不是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的根，那么，

$$-1 \notin A; \quad -4 \notin A.$$

又如，一个三角形的底为 6cm，高为 4cm，我们按三角形面积公式 $\Delta = \frac{1}{2}ah$ （某种法则），可以知道它的面积等于 12cm^2 。

因此，我们可以说，底为 6cm，高为 4cm 的三角形是“所有面积等于 12cm^2 的三角形的集合里的一个确定的元素。而一个底为 7cm，高为 4cm 的三角形就不是所有面积等于 12cm^2 的三角形的集合里的一个确定的元素。

由此可知，任何一个确定元素对某一个集合来说，或者属于那个集合，或者不属于那个集合，二者必居其一。

在上面所有的例子中，一只手的手指的集合，它所含的元素是 5 个；方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的根的集合，它所含的元素是 2 个，这两个集合里的元素的个数都是有限的，我们把元素的个数是有限个的集合叫做有限集合（或有穷集合）。而所有面

积等于 12cm^2 的三角形的集合，就有无数多个元素，我们把元素的个数是无限个的集合叫做无限集合（或无穷集合）。但是，集合并不意味着它一定要有一个以上的元素。例如，方程 $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ 的实数根的集合，它所含的元素中有一个实数 1，这样的集合叫做单元集合。又如，方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数根的集合，因为它没有实数根，所以它的根的集合，显然是空的，我们把不包含任何元素组成的集合叫做空集合。空集合一般我们用符号“ ϕ ”来表示，读作“空集”。

1.2 集合的表示方法

表示集合和元素之间的从属关系的方法，除了前面学过的 $a \in A$, $a \notin A$ 等之外，通常还有下列三种表示集合的方法。

1. 列举法

把集合里所包含的元素一一列举出来，逐一写在一个大括弧 $\{ \}$ 里。例如，所有小于 6 的正整数的集合，这个集合的元素是 1, 2, 3, 4, 5，而且除了这 5 个元素之外，再无其它了，我们可以把它记作

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

应该注意，对于括弧里的元素排列顺序是无关紧要的。例如，

$$\{5, 3, 1, 4, 2\};$$

$$\{3, 4, 1, 5, 2\}$$

等都表示同一集合。很明显，这种方法对于较多的元素的集合显然是不适用的。例如，所有 $-10^{10} \leq x \leq 10^{10}$ 的整数的集合；由 200 个元件组成的集成线路的部件等等，至于对具有无穷多个元素的集合则更无意义了。例如，整数的集合； $x > 10$ 的 x 的集合等等。但是，有时为了叙述上的需要，也把一些有很多元素的有限集合或无限集合只列举出几个，用列举法表示。例如，

$$\{1, 2, 3, \dots, 10^{10}\}$$

表示从 1 起到 10^{10} 的有限集合；

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

表示所有正偶数组成的无限集合。

这里必须指出，应该区分元素 a 与含有唯一元素 a 的集合 $\{a\}$ 之间的差异。 a 表示元素，而 $\{a\}$ 表示只含一个元素 a 的集合。它们之间的关系只能写成 $a \in \{a\}$ ，而不能写成 $a = \{a\}$ 。

2. 描述法

把集合里所包含的元素，用描述方法，揭露其同一属性，写在一个大括弧 $\{ \}$ 里。括弧中间用短纵线 “ $|$ ” 分开，短纵线的左边写元素的一般形式，右边写出描述同一属性的某种法则，条件或概念上的区分。例如，所有小于 6 的正整数的集合，如果用 A 表示这个集合，可以记作

$$A = \{x | x \text{ 是小于 } 6 \text{ 的正整数}\}.$$

又如，方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根的集合，如果用 B 表示这个集合，可以记作

$$B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

如果求出这个方程的根后，集合 B 就可以用列举法表示，即

$$B = \{2, 3\}.$$

实际上， $\{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ 和 $\{2, 3\}$ 是同一集合。

3. 文氏图

如图 1—1—1，用任意一个封闭的图形如矩形或圆表示一个集合，矩形或圆里面的点表示集合的元素。

这三种方法各有所长，也各有所短。列举法是把集合的元素一一列举出来，一目了然。但是，由于不可能把集合里较多的元素，甚至是无穷多的元素全部一一列举出来。因此，有其局限性。描述法是全面地概括了集合元素的同一属性，能表示

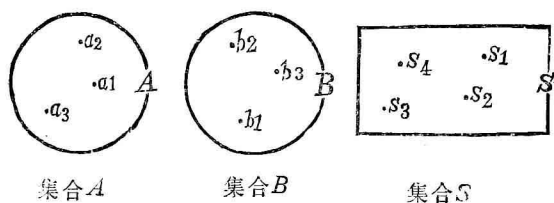


图 1—1—1

出集合元素的全体，便于在理论上的分析与研究，但看不清集合里的每个元素。文氏图是利用各种(重迭的)矩形或圆来表示集合，是帮助我们理解元素与集合、集合与集合之间的一种有几何意义的直观工具。究竟采用哪一种方法来表示集合，要根据具体情况，选用最适当的表示法，或者结合起来使用，以达到明确为原则。

1.3 包含关系

设元素 $a, b, c, d, \dots$ 是集合 s 的全体成员，用列举法表示，就是

$$s = \{a, b, c, d, \dots\}.$$

如果把这些元素 $a, b, c, d, \dots$ 中任意选取几个元素组成新的集合，可以有下面这些：

$$A = \{a\};$$

$$B = \{a, b\};$$

$$C = \{a, b, c\};$$

$$D = \{a, b, c, d\};$$

.....

从这些集合中可以看出，每一个集合里的元素都是集合 S 里的元素，我们就说集合 S 包含这些集合 A, B, C, D 或者说集合 A, B, C, D 都在集合 S 内。从这些包含关系中可以