上海市中学教师进修教材

代数与初等函数

上　　　册

江西人民出版社

上海市中学教师进修教材

代数与初等函数

上册

王国樑　章正华
刘铁楼　周世继　编
余元希　施毓湘　校

上海市中学教师进修教材编写组

上海市中学教师进修教材
代数与初等函数
上　　册
上海市中学教师进修教材编写组编
江西人民出版社出版
（南昌百花洲3号）
江西省新华书店发行　江西新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 14.75　字数 344,000
1980 年 5 月第 1 版　1980 年 5 月第 1 次印刷
印数 1 —115,000
统一书号：7110·235　　定价：1.10 元

内 容 提 要

全书分上、下两册，上册内容有数与式，方程与不等式，下册内容有排列与组合，代数函数与超越函数。书中对许多重要的理论问题作了较为详细的论述，并附有一定数量的例题和习题，可供中学数学教师自学、进修或教学参考之用。

前　言

本书是中学数学教师的进修教材。

中学数学教师的进修，除了学习和总结教学实践的经验、系统地学习数学教学法以外，对教材内容本身的研究也很重要。例如，中学数学中的基本概念和方法，只有对它的来源与归宿有深入的了解，才有可能居高临下地指导教学。

中学数学教材里有许多重要的理论问题，限于青少年年龄特征的关系，没有作详尽的论述。因此，有必要作为教师进修的内容提出来进行讨论。其中有些问题可由进修高等数学来解决。但有部分问题，中学数学里不讲，高等数学里也不讲。如将真分式化为部分分式的理论，方程的同解理论等就是如此；另有些问题，在高等数学里采用了不同于初等数学的观点和方法，如多项式在高等代数里是未定元的形式的表达式，而在中学课程里它则是变数的函数等；还有一些问题，虽然在高等数学教材里可以找到，但不宜于直接作为进修的内容，如微积分中的实数理论等就是如此。本书的任务，就是要与相应的几何教材一起对中学数学课的内容进行较为深入地、系统地、有科学根据地阐述。

对数学习题的归纳与研究是研究教材的另一方面。本书在讲述理论的同时也列举了一些例题，并附有少量的习题给读者练习，其中一部分是为了对理论的验证和补充，另一部分是对常见解题方法的归纳，试图给读者的一点启示。它并无解题"指南"的性质，题海浩瀚、本书只能挂一而漏万了。对这方面有需要的读者，可参阅各种初等数学习题集。

为了便于读者自学，在本书中增加了部分供参考的内容。在教学中对于标有星号的材料可根据学员的实际情况作必要的删节。

本书编写工作在上海市教育局的领导下，在编写过程中得到上海市虹口区教师进修学院、南市区教师进修学院、宝山县教师进修学院和刘元章同志的大力支持，在此一并表示感谢。

限于编者水平，加上时间仓促，其错误和不妥之处，希望读者和使用本书的老师予以批评指正。

中学教师进修教材编写组

1979年6月

目　　录

第一章　数集、数环和数域

数的概念是数学中最主要的概念之一．在中小学阶段，学生已经学过自然数、零、正分数、有理数、实数和复数等概念，但是限于学生当时的实际水平，因此，一般都采用直观描述的方法，而不追求理论上的严谨．

要严格地建立数的理论，需要用到高等数学的知识，这超出了本书的范围．为了使教师能更好地掌握中学数学教材中关于这一部分的内容，这一章里将应用初等数学为工具，对建立数的理论的知识，作扼要的阐述．为了需要，首先要学习关于集合的一些初步知识，最后还将联系数的运算的封闭性，引进“数环”和“数域”的概念．

§1　集合的基本概念

1.1　集合的概念

集合（或称集）是数学中最基本的原始概念之一，它的含意就是把具有某种同一属性的事物放在一起，形成的一个集体．例如，一只手的手指的集合，组成这个集合的事物是这只手上的大拇指、食指、中指、无名指和小指；方程 $x^2-5x+4=0$ 的根的集合，组成这个集合的事物是方程的根 1 和 4；…….我们把组成集合的每一个事物叫做**集合的元素**．在本书中，我们将用大写字母 A、B、C、……、M、N、……等表示集合，用小写字母 a，b，c，……，m，n，……表示集合的元素．

如果 a 是某个集合 A 的一个元素，我们就说，元素 a 属于集合 A，记作

$$a \in A.$$

这里符号“$\in$”读作“属于”．

从上面的例子中可以看出，集合中所包含的元素都具有同一属性的，这种具有同一属性的元素是可以通过某种法则（或某种概念的种属关系上）来判定它是否属于这个集合。

例如，方程 $x^2-5x+4=0$，通过二次方程的求根公式(指的某种法则)，可以得到它的根是 1 与 4，这些确定的根，就是方程 $x^2-5x+4=0$ 的根的集合里的元素。

设 A 为方程 $x^2-5x+4=0$ 的根的集合，那么

$$1\in A;\ 4\in A.$$

如果 a 不是某个集合 A 的一个元素，我们就说，元素 a 不属于集合 A，并记作

$$a\notin A.$$

这里符号“$\notin$”读作“不属于”。

我们知道，-1 和 -4 不是方程 $x^2-5x+4=0$ 的根，那么，

$$-1\notin A;\qquad -4\notin A.$$

又如，一个三角形的底为 6cm，高为 4cm，我们按三角形面积公式 $\triangle=\frac{1}{2}ah$（某种法则），可以知道它的面积等于 $12cm^2$。因此，我们可以说，底为 6cm，高为 4cm 的三角形是“所有面积等于 $12cm^2$ 的三角形的集合里的一个确定的元素。而一个底为 7cm，高为 4cm 的三角形就不是所有面积等于 $12cm^2$ 的三角形的集合里的一个确定的元素。

由此可知，任何一个确定元素对某一个集合来说，或者属于那个集合，或者不属于那个集合，二者必居其一。

在上面所有的例子中，一只手的手指的集合，它所含的元素是 5 个；方程 $x^2-5x+4=0$ 的根的集合，它所含的元素是 2 个，这两个集合里的元素的个数都是有限的，我们把元素的个数是有限个的集合叫做**有限集合（或有穷集合）**。而所有面

积等于 12cm^2 的三角形的集合，就有无数多个元素，我们把元素的个数是无限个的集合叫做**无限集合**（或**无穷集合**）。但是，集合并不意味着它一定要有一个以上的元素。例如，方程 $x^3-x^2+x-1=0$ 的实数根的集合，它所含的元素中有一个实数1，这样的集合叫做**单元集合**。又如，方程 $x^2+1=0$ 的实数根的集合，因为它没有实数根，所以它的根的集合，显然是空的，我们把不包含任何元素组成的集合叫做**空集合**。空集合一般我们用符号“ϕ”来表示，读作“空集”。

1.2 集合的表示方法

表示集合和元素之间的从属关系的方法，除了前面学过的 $a\in A$，$a\notin A$ 等之外，通常还有下列三种表示集合的方法。

1. 列举法

把集合里所包含的元素一一列举出来，逐一写在一个大括弧{ }里。例如，所有小于6的正整数的集合，这个集合的元素是1，2，3，4，5，而且除了这5个元素之外，再无其它了，我们可以把它记作

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

应该注意，对于括弧里的元素排列顺序是无关紧要的。例如，

$$\{5, 3, 1, 4, 2\};$$

$$\{3, 4, 1, 5, 2\}$$

等都表示同一集合。很明显，这种方法对于较多的元素的集合显然是不适用的。例如，所有 $-10^{10}\leqslant x\leqslant 10^{10}$ 的整数的集合；由200个元件组成的集成线路的部件等等，至于对具有无穷多个元素的集合则更无意义了。例如，整数的集合；$x>10$ 的 x 的集合等等。但是，有时为了叙述上的需要，也把一些有很多元素的有限集合或无限集合只列举出几个，用列举法表示。例如，

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 10^{10}\}$$

表示从 1 起到 10^{10} 的有限集合；

$$\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ \cdots\cdots\}$$

表示所有正偶数组成的无限集合。

这里必须指出，应该区分元素 a 与含有唯一元素 a 的集合 $\{a\}$ 之间的差异。a 表示元素，而 $\{a\}$ 表示只含一个元素 a 的集合。它们之间的关系只能写成 $a\in\{a\}$，而不能写成 $a=\{a\}$。

2． 描述法

把集合里所包含的元素，用描述方法，揭露其同一属性，写在一个大括弧{ }里。括弧中间用短纵线"|"分开，短纵线的左边写元素的一般形式，右边写出描述同一属性的某种法则，条件或概念上的区分。例如，所有小于 6 的正整数的集合，如果用 A 表示这个集合，可以记作

$$A=\{x\mid x\text{ 是小于 6 的正整数}\}。$$

又如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的集合，如果用 B 表示这个集合，可以记作

$$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}。$$

如果求出这个方程的根后，集合 B 就可以用列举法表示，即

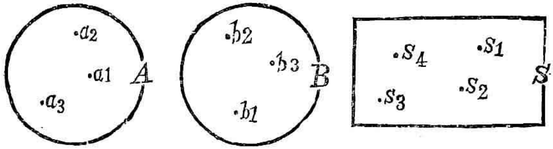
$$B=\{2,\ 3\}。$$

实际上，$\{x\mid x^2-5x+6=0\}$ 和 $\{2,\ 3\}$ 是同一集合。

3． 文氏图

如图1—1—1，用任意一个封闭的图形如矩形或圆表示一个集合，矩形或圆里面的点表示集合的元素。

这三种方法各有所长，也各有所短。列举法是把集合的元素一一列举出来，一目了然。但是，由于不可能把集合里较多的元素，甚至是无穷多的元素全部一一列举出来。因此，有其局限性。描述法是全面地概括了集合元素的同一属性，能表示



集合A　　集合B　　集合S

图1—1—1

出集合元素的全体，便于在理论上的分析与研究，但看不清集合里的每个元素。文氏图是利用各种(重迭的)矩形或圆来表示集合，是帮助我们理解元素与集合、集合与集合之间的一种有几何意义的直观工具。竟究采用哪一种方法来表示集合，要根据具体情况，选用最适当的表示法，或者结合起来使用，以达到明确为原则。

1.3　包含关系

设元素a，b，c，d，……是集合s的全体成员，用列举法表示，就是

$$s=\{a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots\cdots\}.$$

如果把这些元素a，b，c，d，……中任意选取几个元素组成新的集合，可以有下面这些：

$$A=\{a\};$$
$$B=\{a,\ b\};$$
$$C=\{a,\ b,\ c\};$$
$$D=\{a,\ b,\ c,\ d\};$$
$$\cdots\cdots$$

从这些集合中可以看出，每一个集合里的元素都是集合S里的元素，我们就说集合S包含这些集合A，B，C，D或者说集合A，B，C，D都在集合S内。从这些包含关系中可以