



21世纪高等学校教材

戴嘉尊 邱建贤 编著

# 微分方程数值解法

WEIFEN FANGCHENG SHUZHI JIEFA

(第2版)



东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# 微分方程数值解法

(第2版)

戴嘉尊 邱建贤 编著

东南大学出版社

·南京·

## 内 容 提 要

本书包括常微分方程数值解法、抛物型方程的差分方法、椭圆型方程的差分方法、双曲型方程的差分方法、非线性双曲型守恒律方程的差分方法、有限元法简介等共 6 章,每章后面附有一定数量的习题供练习之用。

本书适合于数学类本科生“微分方程数值解法”课程教学之用,也适用于工科研究生及计算数学与应用数学教学与科研人员,并可供有关工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解法/戴嘉尊,邱建贤编著. —2 版. —南京:东南大学出版社,2012. 8

ISBN 978-7-5641-3741-0

I. ①微… II. ①戴… ②邱… III. ①微分方程—数值计算—高等学校—教材 IV. O241. 8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 194368 号

### 微分方程数值解法(第 2 版)

---

出版发行 东南大学出版社  
社 址 南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)  
出 版 人 江建中  
责任编辑 吉雄飞  
电 话 (025)83793169(办公室),83362442(传真)  
经 销 全国各地新华书店  
印 刷 南京京新印刷厂  
开 本 700mm×1000mm 1/16  
印 张 15.5  
字 数 304 千字  
版 次 2012 年 8 月第 2 版  
印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5641-3741-0  
定 价 28.80 元

---

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

## 第 2 版说明

本书是南京航空航天大学理学院教授戴嘉尊先生在多年教学工作的基础上编写而成,自 2002 年首版以来,一直是我校信息与计算科学专业本科生和工科研究生“微分方程数值解法”课程的教材,同时也被国内多所院校选用,目前已发行万余册,受到了使用者的广泛欢迎。2004 年该教材被评为南京航空航天大学优秀教材一等奖,2005 年获评为江苏省高校精品教材。

该教材内容丰富、全面,既重视基本理论和基本训练,又有一定的理论深度。因此,这次修订保持了首版的框架体系和特色,仅就一些印刷错误进行了修正,并结合在教学过程中的一些体会,对部分内容做了修改。

此次修订工作由王春武老师承担。在教材出版十周年之际,我们对关心本书和对首版的使用提出宝贵意见的老师和同学们表示衷心的感谢,并恳请对疏漏之处提出批评、指正。

编者  
2012 年 8 月

# 前 言

本书是作者在多年来为计算数学本科生和工科类研究生开设“微分方程数值解法”课程讲义的基础上修改而成的。它适合于计算数学专业本科生,同时也适合于工科类研究生,并可供从事微分方程数值解法和科学与工程计算的有关科技人员参考。

全书讲授约需 70 学时。

本书内容较丰富、全面,取材比较新颖,重视基本理论、基本训练,有一定的理论深度和广度,注意理论联系实际;本书自成系统,注意教学法。每章后面附有一定数量的习题供读者练习。

本书在编写过程中,得到南京航空航天大学理学院的大力支持和帮助,编者对领导和同仁表示深深的谢意。东南大学孙志忠教授详细审阅了全书,提出了许多宝贵的意见,江苏省工业与应用数学学会和东南大学出版社在本书出版过程中给予大力支持,在此一并表示衷心的感谢。

本书由戴嘉尊编写了第 1 章至第 5 章,邱建贤编写了第 6 章。由于水平所限,书中一定有许多缺点和错误,敬请读者批评指正。

编 者  
2001 年 3 月

# 目 录

<b>1 常微分方程初值问题数值解法</b> .....	(1)
1.1 引 言 .....	(1)
1.2 欧拉法(Euler 方法) .....	(1)
1.2.1 欧拉方法 .....	(1)
1.2.2 收敛性研究 .....	(4)
1.2.3 稳定性研究 .....	(6)
1.3 梯形法、隐式格式的迭代计算 .....	(7)
1.4 一般单步法、Runge-Kutta 格式 .....	(11)
1.4.1 一种构造单步法的方法——泰勒级数法 .....	(11)
1.4.2 一般单步法基本理论 .....	(12)
1.4.3 Runge-Kutta 格式 .....	(16)
1.4.4 误差控制和 Runge-Kutta-Fehlberg 法 .....	(22)
1.5 线性多步法 .....	(25)
1.6 误差的事后估计法、步长的自动选择 .....	(33)
1.7 高阶常微分方程(组)的数值方法 .....	(37)
习题 1 .....	(40)
<b>2 抛物型方程的差分方法</b> .....	(42)
2.1 差分格式建立的基础 .....	(42)
2.2 显式差分格式 .....	(48)
2.2.1 一维常系数热传导方程的古典显式格式 .....	(48)
2.2.2 系数依赖于 $x$ 的一维热传导方程的显式格式 .....	(51)
2.3 隐式差分格式 .....	(52)
2.3.1 古典隐式格式 .....	(52)
2.3.2 Crank-Nicolson 隐式格式 .....	(53)
2.3.3 加权六点隐式格式 .....	(55)
2.3.4 系数依赖于 $x, t$ 的一维热传导方程的一个隐式格式的推导 .....	(56)
2.4 解三对角形方程组的追赶法 .....	(57)
2.5 差分格式的稳定性 and 收敛性 .....	(61)
2.5.1 问题的提出 .....	(61)
2.5.2 $\epsilon$ -图方法 .....	(63)
2.5.3 稳定性定义、稳定性分析的矩阵方法 .....	(65)
2.5.4 Gerschgorin 定理及其在分析差分格式稳定性中的应用 .....	(76)

2.5.5	稳定性分析的 Fourier 级数法(Von Neumann 方法)	(80)
2.5.6	低阶项对稳定性的影响	(89)
2.5.7	差分格式的收敛性	(90)
2.5.8	相容逼近、Lax 等价性定理	(92)
2.6	非线性抛物型方程的差分解法举例	(92)
2.6.1	Richtmyer 线性方程	(93)
2.6.2	Lees 三层差分格式	(95)
2.6.3	算例	(95)
2.7	二维抛物型方程的差分格式	(96)
2.7.1	二维抛物型方程显式差分格式	(96)
2.7.2	隐式差分格式	(100)
2.7.3	差分格式的稳定性分析	(102)
2.8	交替方向的隐式差分格式(ADI 格式)	(104)
	习题 2	(110)
<b>3</b>	<b>椭圆型方程的差分方法</b>	(113)
3.1	正方形区域中的 Laplace 方程 Dirichlet 边值问题的差分模拟	(113)
3.2	Neumann 边值问题的差分模拟	(115)
3.3	混合边值条件	(119)
3.4	非矩形区域	(121)
3.5	极坐标形式的差分格式	(122)
3.6	矩形区域上的 Poisson 方程的五点差分逼近的敛速分析	(123)
3.7	一般二阶线性椭圆型方程差分逼近及其性质研究	(126)
3.8	椭圆型差分方程的迭代解法	(134)
3.8.1	迭代法的基本理论	(135)
3.8.2	Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代	(137)
3.8.3	椭圆型方程差分格式的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代收敛速度 计算举例	(140)
3.8.4	超松弛迭代法	(144)
3.8.4.1	逐次超松弛迭代法	(144)
3.8.4.2	相容次序、性质(A)和最佳松弛因子的确定	(146)
3.8.4.3	收敛速度	(153)
3.9	多重网格法简介	(154)
3.9.1	一个简单的例子、MG 方法基本思想	(154)
3.9.2	二重网格法、V 循环	(157)
3.9.3	多重网格法	(159)
	习题 3	(162)

<b>4 双曲型方程的差分方法</b> .....	(166)
4.1 一阶拟线性双曲线方程的特征线法 .....	(166)
4.1.1 一阶线性方程、特征线及 Cauchy 问题的解法 .....	(166)
4.1.2 一阶拟线性方程 Cauchy 问题的特征线法 .....	(168)
4.2 一阶拟线性双曲型方程组的特征线法 .....	(170)
4.2.1 一阶拟线性双曲型方程组、特征、正规形式 .....	(170)
4.2.2 举例 .....	(172)
4.2.3 两个未知函数情形的特征线法 .....	(175)
4.3 一阶双曲线方程的差分格式 .....	(180)
4.3.1 Lax-Friedrichs 格式 .....	(181)
4.3.2 Courant-Isaacson-Rees 格式 .....	(181)
4.3.3 Leap-Frog 格式(蛙跳格式) .....	(185)
4.3.4 Lax-Wendroff 格式 .....	(186)
4.3.5 Crank-Nicolson 格式 .....	(187)
4.4 一阶双曲线方程组的差分格式 .....	(188)
4.4.1 Lax-Friedrichs 格式 .....	(188)
4.4.2 Courant-Isaacson-Rees 格式 .....	(189)
4.4.3 举例 Courant-Friedrichs-Lewy 条件 .....	(192)
4.5 二阶线性双曲型方程的差分方法 .....	(194)
4.5.1 显式差分格式 .....	(194)
4.5.2 隐式差分格式 .....	(198)
习题 4 .....	(199)
<b>5 非线性双曲型守恒律方程的差分方法</b> .....	(202)
5.1 非线性双曲型守恒律简介、弱解的定义 .....	(202)
5.2 守恒型差分格式、Lax-Wendroff 定理 .....	(206)
5.3 单调差分格式 .....	(209)
5.4 TVD 差分格式 .....	(210)
5.5 对一维方程组的推广 .....	(214)
习题 5 .....	(217)
<b>6 有限元方法简介</b> .....	(218)
6.1 二阶常微分方程边值问题的有限元解法 .....	(218)
6.2 偏微分边值问题的有限元法 .....	(223)
<b>参考文献</b> .....	(237)

# 1 常微分方程初值问题数值解法

## 1.1 引言

在常微分方程课程中我们知道,在科学技术的许多领域中都会遇到常微分方程初值问题,然而只有很少十分简单的微分方程能够用初等方法求其解。一般而言,找出解的解析表达式极其困难,对大部分问题是不可能的。因此,对许多类型的方程求出其近似解是很有意义的。本章研究的近似方法是数值方法,目标在于给出解在一些离散点上的近似值。利用电子计算机求解微分方程主要使用数值方法。

本章研究常微分方程初值问题的主要数值解法,包括基本方法以及基本理论问题。

在下面研究常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) & (x_0 < x \leq X); \\ y|_{x=x_0} = y(x_0) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

如无特别说明,总认为这个初值问题的解存在、唯一且连续依赖于初值条件,即初值问题(1.1)和(1.2)是适定的。

## 1.2 欧拉法(Euler 方法)

### 1.2.1 欧拉方法

数值求解常微分方程初值问题(1.1)和(1.2)的最简单的方法是欧拉法(Euler 方法),又称折线法,推导如下:由

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

得

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

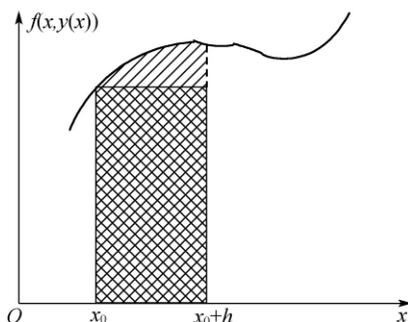


图 1.1

如图 1.1 所示,求  $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx$  的近似值的最直接的方法是用  $f(x_0,y_0)$  代替区间  $[x_0, x_0+h]$  上的  $f(x,y)$ ,即用矩形面积近似代替曲边梯形的面积,于是有

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

用  $y_0$  表示  $y(x_0)$ ,  $y_1$  近似代替  $y(x_0+h)$ ,  $x_1 = x_0+h$ , 则

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

依次令  $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$ ,  $y_{n+1}$  近似替代  $y(x_{n+1})$ , 则

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad (1.3)$$

这就是欧拉方法的计算公式,  $h = x_{n+1} - x_n$  称为积分步长。

式(1.3) 也可由泰勒级数去掉高阶导数项得到。由

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2!}y''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 + \dots$$

去掉高于一阶导数的项,由  $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ , 则有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

用  $y_{n+1}$  近似代替  $y(x_{n+1})$ ,  $y_n$  近似  $y(x_n)$ , 则得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

欧拉方法有明显的几何意义,即以折线代替积分曲线(见图 1.2)。因此也称欧拉法为折线法。

一般而言,并不要求步长相等,则有

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y_n) \quad (1.4)$$

**例 1.1** 以  $h = 0.1$  为步长,用欧拉法求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xe^{-x} - y, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解,并与精确解  $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2)e^{-x}$  比较。

**解** 由式(1.3) 有

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(x_n e^{-x_n} - y_n) & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

计算结果见表 1.1。

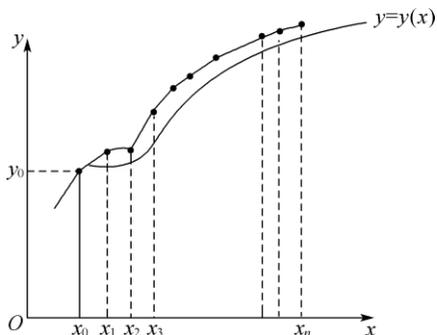


图 1.2

表 1.1

$x_n$	$y_n$	$y(x_n)$	$ y(x_n) - y_n $
0	1	1	0
0.1	0.900 000	0.909 362	9.326 0E-03
0.2	0.819 048	0.835 105	1.605 7E-02
0.3	0.753 518	0.774 155	2.063 7E-02
0.4	0.700 391	0.723 946	2.355 5E-02
0.5	0.657 165	0.682 347	2.518 2E-02
0.6	0.621 775	0.647 598	2.583 2E-02
0.7	0.592 526	0.618 249	2.572 3E-02
0.8	0.568 034	0.593 114	2.508 0E-02
0.9	0.547 177	0.571 230	2.405 3E-02
1.0	0.529 051	0.551 819	2.276 8E-02

在使用欧拉法数值求解过程中我们发现计算过程非常简单,即由  $y_0$  可直接计算出  $y_1$ ,由  $y_1$  可直接计算出  $y_2$ 。以此类推,无需用迭代方法求解任何方程,因此也称其为显式格式。在表 1.1 中,我们分别列出了在  $x = x_n$  处解的精确值  $y(x_n)$ ,和用计算机由欧拉法求得的近似解  $y_n$ ,以及它们的误差  $|y(x_n) - y_n|$ 。事实上,一般而言,我们难以得到精确解  $y(x_n)$ ,这是显然的。另一方面,不论显式格式(或者隐式格式)我们都不能利用计算机求得它们的精确解  $y_n$ ,这是因为计算机计算,不论运算器能进行多少位数的运算,总是有限位二进制运算,因此对十进制的数字运算总会出现舍入误差以及在计算过程中误差的传递。

因此计算机输出的是欧拉方程的近似解  $\tilde{y}_n$ ,而不是其精确解  $y_n$ 。我们可以想象

$$\tilde{y}_n - y(x_n) = (\tilde{y}_n - y_n) + (y_n - y(x_n)) \quad (1.5)$$

可见,为了使计算得到的解  $\tilde{y}_n$  是  $y(x_n)$  的好的精确近似,我们要求:

(1) 欧拉方法的精确解  $y_n$  是微分方程精确解  $y(x_n)$  的很好近似,特别要求当步长  $h$  充分小时,所得的近似解  $y_n$  能够精确地逼近精确解  $y(x_n)$ 。换言之,要求  $h \rightarrow 0$  时,  $y_n \rightarrow y(x_n)$ 。

(2)  $\tilde{y}_n$  是  $y_n$  好的近似。由于计算过程会不断产生舍入误差,本问题的讨论相当复杂。为了简化讨论,我们设想计算机对欧拉格式计算过程完全精确,每步都没有误差,因此  $|\tilde{y}_n - y_n|$  的值完全由  $|\tilde{y}_0 - y_0|$  决定。要求  $\tilde{y}_n$  是  $y_n$  的好的近似则相当于要求欧拉格式解对初始值具有连续依赖性,这种解对初始值的连续依赖性就称为稳定性。

问题(1)称为格式的收敛性问题,问题(2)称为格式的稳定性问题。

格式的收敛性、稳定性研究是微分方程数值解法最基本的理论研究工作,具有重要的实用意义。而一个格式既是收敛的又是稳定的才是有用的格式。下面就欧拉法深入进行研究。

### 1.2.2 收敛性研究

前已指出,收敛性问题,即研究  $h \rightarrow 0, x_0 + nh \rightarrow x$  时,  $y_n \rightarrow y(x)$  的问题,其中  $y_n$  为欧拉方法(1.3)在  $x = x_n$  处的解,  $y(x_n)$  为微分方程初值问题(1.1)和(1.2)在  $x = x_n$  处的解,计算它们之间的差,有

$$y(x_n + h) - y_{n+1} = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - [y_n + hf(x_n, y_n)] \quad (1.6)$$

这里,  $y_{n+1}$  由  $y_n$  算得,  $y_n$  由  $y_{n-1}$  算得,  $\dots$ ,  $y_1$  由  $y_0$  算得,都是利用欧拉格式计算得到的。

令  $\epsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ ,显然它受到  $\epsilon_n$  的影响,因此也受  $\epsilon_{n-1}, \dots, \epsilon_0$  的影响,我们称  $\epsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$  为欧拉方法的整体截断误差。为了估算它,先估计由  $y(x_n)$  利用欧拉公式计算出的  $y_{n+1}^*$  与  $y(x_{n+1})$  之差  $e_{n+1}$ :

$$y_{n+1}^* = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1}^* \\ &= y(x_{n+1}) - [y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))] \\ &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - [y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))] \quad (1.8) \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - hf(x_n, y(x_n)) \end{aligned}$$

$e_{n+1}$  称为局部截断误差,就是用精确解  $y(x_n)$  代入欧拉公式得到的  $y_{n+1}^*$  与  $y(x_{n+1})$  之间的差,也可记为  $R_n$ 。设  $|R_n| \leq R, R$  为一正常数。由式(1.6),整体截断误差满足

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - [y_n + hf(x_n, y_n)] \\ &= \epsilon_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x_n, y(x_n)) dx \\ &\quad + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x_n, y(x_n)) dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x_n, y_n) dx \\ &= \epsilon_n + R_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] dx \end{aligned}$$

则

$$|\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_n| + R + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)| dx$$

设  $f(x, y)$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \tilde{y})| \leq L |\bar{y} - \tilde{y}| \quad (1.9)$$

其中,  $L$  为 Lipschitz 常数. 因此

$$\begin{aligned} |\epsilon_{n+1}| &\leq |\epsilon_n| + R + Lh |\epsilon_n| \\ |\epsilon_{n+1}| &\leq (1 + hL) |\epsilon_n| + R \\ &\leq (1 + hL) [(1 + hL) |\epsilon_{n-1}| + R] + R \\ &= (1 + hL)^2 |\epsilon_{n-1}| + (1 + hL)R + R \\ &\leq (1 + hL)^3 |\epsilon_{n-2}| + (1 + hL)^2 R + (1 + hL)R + R \\ &= (1 + hL)^3 |\epsilon_{n-2}| + [(1 + hL)^2 + (1 + hL) + 1]R \\ &\leq \dots \\ &\leq (1 + hL)^{n+1} |\epsilon_0| + [(1 + hL)^n + (1 + hL)^{n-1} + \dots + 1]R \end{aligned}$$

一般而言, 有

$$\begin{aligned} |\epsilon_n| &\leq (1 + hL)^n |\epsilon_0| + \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (1 + hL)^j \right] R \\ &= (1 + hL)^n |\epsilon_0| + \frac{R}{hL} [(1 + hL)^n - 1] \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

因为  $hL > 0$ , 则  $e^{hL} > 1 + hL$ ,  $e^{nhL} > (1 + hL)^n$ , 因而整体截断误差  $\epsilon_n$  有如下估计:

$$\begin{aligned} |\epsilon_n| &\leq e^{nhL} |\epsilon_0| + \frac{R}{hL} (e^{nhL} - 1) \\ |\epsilon_n| &\leq e^{(X-x_0)L} |\epsilon_0| + \frac{R}{hL} (e^{(X-x_0)L} - 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中,  $\epsilon_0$  为初值误差,  $R$  为局部截断误差界, 并利用了  $x_n = x_0 + nh \leq X$ . 因此欧拉方法的整体截断误差  $\epsilon_n$  由初始误差和局部截断误差界决定.

现在估计局部截断误差的界. 由式(1.8), 有

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - hf(x_n, y(x_n)) \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x, y(x)) - f(x_n, y(x_n))] dx \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} [y'(x) - y'(x_n)] dx \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} y''(x_n + \theta(x - x_n))(x - x_n) dx \\ &= y''(x_n + \theta(\bar{x} - x_n)) \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) dx \\ &= \frac{1}{2} h^2 y''(x_n + \theta(\bar{x} - x_n)) \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta < 1$ ,  $\bar{x} \in (x_n, x_{n+1})$ .

令  $M = \max_{x_0 \leq x \leq X} |y''(x)|$ , 则有

$$|R_n| \leq \frac{1}{2} M h^2 \quad (1.11)$$

**定理 1.1** 假定  $y = y(x) \in C^2[x_0, X]$ , 则欧拉方法的局部截断误差  $R_n$  满足

$$|R_n| \leq \frac{1}{2} M h^2 \quad (1.12)$$

其中  $h$  为步长,  $M = \max_{x_0 \leq x \leq X} |y''(x)|$ 。

**定理 1.2** 设  $f(x, y)$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件,  $L$  为相应的 Lipschitz 常数, 则欧拉方法的整体截断误差  $\epsilon_n$  满足

$$|\epsilon_n| \leq e^{(X-x_0)L} |\epsilon_0| + \frac{R}{hL} (e^{(X-x_0)L} - 1) \quad (1.13)$$

其中  $R$  为局部截断误差的上界,  $L$  为 Lipschitz 常数。

由定理 1.1 和定理 1.2 可得下面的定理。

**定理 1.3** 设  $f(x, y)$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件,  $L$  为相应的 Lipschitz 常数,  $y = y(x) \in C^2[x_0, X]$  且当  $h \rightarrow 0$  时,  $y_0 \rightarrow y(x_0)$ , 则欧拉方法的解  $y_n$  一致收敛到初值问题(1.1), (1.2) 的解  $y(x_n)$ , 并有估计式

$$|\epsilon_n| \leq e^{L(X-x_0)} |\epsilon_0| + \frac{Mh}{2L} (e^{L(X-x_0)} - 1) \quad (1.14)$$

如果  $y_0 = y(x_0)$ , 即  $\epsilon_0 = 0$ , 由此有

$$|\epsilon_n| \leq \frac{h}{2L} M (e^{L(X-x_0)} - 1) \quad (1.15)$$

即

$$|\epsilon_n| = O(h)$$

欧拉方法的整体截断误差与  $h$  同阶, 由  $R_n$  的表达式可知  $R_n = O(h^2)$ , 这说明局部截断误差比整体截断误差高一阶。

我们称欧拉方法为一阶格式。

### 1.2.3 稳定性研究

前已指出欧拉方法的稳定性问题是决定欧拉法在利用计算机计算中能否得到精确欧拉解的关键问题, 只有稳定的算法才可能是有用的算法。

**定义 1.1** 如果存在正常数  $c$  及  $h_0$ , 使对任意初始值  $y_0, z_0$ , 用

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(x_n, z_n), \\ z_0 \end{cases}$$

计算所得之解  $y_n, z_n$  满足估计式

$$|y_n - z_n| \leq c |y_0 - z_0| \quad (0 < h < h_0, nh \leq X - x_0)$$

则称欧拉方法稳定。

注意:这里  $y_n, z_n$  分别是以前  $y_0, z_0$  为初值得到的精确值,毫无舍入误差,因此这里稳定性定义是对初值的稳定性,即研究初值误差在计算过程的传递问题。

**定理 1.4** 在定理 1.2 的条件下,欧拉方法是稳定的。

**证** 因为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad z_{n+1} = z_n + hf(x_n, z_n)$$

令

$$e_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1}$$

则有

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + h[f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)] \\ |e_{n+1}| &\leq |e_n| + h|f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)| \\ &\leq |e_n| + hL|y_n - z_n| \\ &= (1 + hL)|e_n| \\ &\leq (1 + hL)^2|e_{n-1}| \\ &\vdots \\ &\leq (1 + hL)^{n+1}|e_0| \end{aligned}$$

即

$$|e_n| \leq (1 + hL)^n |e_0|$$

$$|e_n| \leq (1 + hL)^{\frac{1}{h}hLn} |e_0|$$

从而对所有  $n, nh \leq X - x_0$ , 即当  $0 < h < h_0$  时,有

$$|e_n| \leq e^{L(X-x_0)} |e_0|$$

令  $C = e^{L(X-x_0)}$ , 则有  $|e_n| \leq C|e_0|$ 。

定理证毕。

由定理 1.2 我们看到,如初始误差  $\epsilon_0 = 0$ , 则整体截断误差的阶完全由局部截断误差的阶决定。事实上,若局部截断误差阶为  $O(h^{p+1})$ , 则整体截断误差阶为  $O(h^p)$ 。因此为了提高数值算法的精度,往往从提高局部截断误差的阶入手,这也是构造高精度差分方程数值方法的主要依据。

### 1.3 梯形法、隐式格式的迭代计算

前面推导欧拉法的过程,是用矩形公式近似计算积分

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx &\approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x_n, y(x_n)) dx \\ &= hf(x_n, y(x_n)) \end{aligned}$$

现在若用梯形公式近似计算积分(见图 1.3),

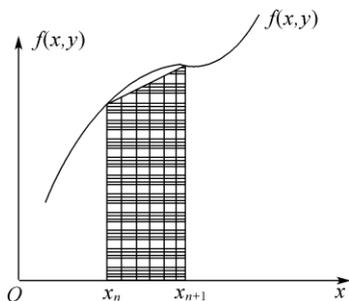


图 1.3

则

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y(x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \\ &\approx \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] \end{aligned}$$

因此有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

可得梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (1.16)$$

显然这是一个隐式格式, 现估计其局部截断误差阶, 为此我们总假定  $f(x, y)$  和解  $y(x)$  充分光滑。由式(1.8), 即

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1}^* \\ y_{n+1}^* &= y(x_n) + \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] \\ &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[ \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} f(x_n, y(x_n)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \right] dx \\ e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1}^* \\ &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx - \left\{ y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[ \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} f(x_n, y(x_n)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \right] dx \right\} \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left\{ f(x, y(x)) - \left[ \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} f(x_n, y(x_n)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \right] \right\} dx \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x, y(x)) - P_1(x)] dx \end{aligned}$$

其中  $P_1(x)$  是  $f(x, y)$  的二点插值多项式, 由 Lagrange 插值余项, 可知

$$f(x, y) - P_1(x) = \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_n + \xi h)(x - x_n)(x - x_{n+1})$$

其中  $0 < \xi < 1$ ,  $f^{(2)}(x_n + \xi h) = y^{(3)}(x_n + \xi h)$ 。显然, 在  $(x_n, x_{n+1})$  上,  $(x - x_n)(x - x_{n+1}) < 0$ 。

由中值定理

$$e_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_n + \xi h)(x - x_n)(x - x_{n+1}) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_n + \xi h) \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n+1}) dx \\
e_{n+1} &= -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(x_n + \xi h) = -\frac{h^3}{12} y^{(3)}(x_n + \xi h) \quad (1.17)
\end{aligned}$$

局部截断误差阶为  $O(h^3)$ , 较之欧拉法高一阶。记  $R_n^{(1)}$  为梯形公式的局部截断误差,  $R^{(1)}$  为  $R_n^{(1)}$  的上确界, 则有

$$R^{(1)} \leq \frac{h^3}{12} M_3$$

其中,  $M_3 = \max_{x_0 \leq x \leq X} |y'''(x)|$ 。

类似于欧拉法, 对梯形法可平行地建立它的整体截断误差的阶为  $O(h^2)$ , 以及格式的收敛性和稳定性等定理。

前已指出, 梯形法是一个隐式格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (1.16)$$

如何求解  $y_{n+1}$ , 我们采用迭代法, 其格式如下:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(p+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)}) + f(x_n, y_n)], \\ y_{n+1}^{(0)} \text{—— 初始猜测} \end{cases} \quad (1.18)$$

为证迭代法的收敛性, 将式(1.18)与(1.16)相减, 有

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(p+1)} - y_{n+1} &= \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})] \\
|y_{n+1}^{(p+1)} - y_{n+1}| &\leq \frac{h}{2} L |y_{n+1}^{(p)} - y_{n+1}|
\end{aligned}$$

其中,  $L$  为  $f(x, y)$  关于  $y$  的 Lipschitz 常数。因此

$$|y_{n+1}^{(p+1)} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{h}{2} L\right)^{p+1} |y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1}|$$

可见, 当  $\frac{h}{2} L < 1$  且迭代次数  $p$  相当多时,  $\left(\frac{h}{2} L\right)^{p+1}$  则相当小。因此

$$\frac{h}{2} L < 1 \quad (1.19)$$

是梯形法迭代格式(1.18)收敛的充分条件。在实际计算中令  $p = 0$ , 有下面的预报校正格式:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \text{—— 预报格式,} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] \text{—— 校正格式} \end{cases} \quad (1.20)$$

当然也可迭代多次:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \text{—— 预报格式,} \\ y_{n+1}^{(p+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})] \text{—— 校正格式} \end{cases} \quad (1.21)$$