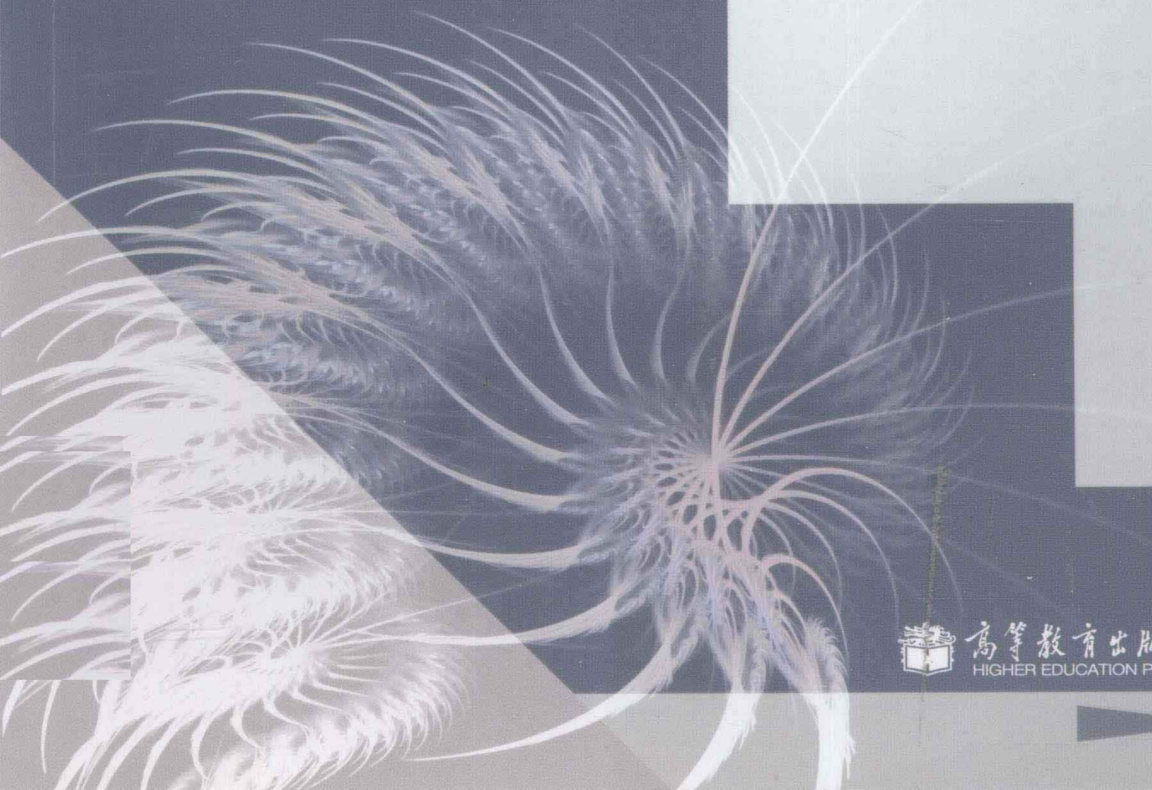
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

应用随机过程

○ 钱敏平 龚光鲁 陈大岳 章复熹



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

应用随机过程

Ying eng

钱敏平　龚光鲁　陈大岳　章复熹

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是为数学与应用数学专业及统计学专业三年级学生编写的教材，内容包括马氏链、跳过程、布朗运动，并配有150多道习题，适合一学期48课时使用。我们假定读者已学习了微积分、线性代数、常微分方程，但还没有学过实变函数。书中许多场合只用投骰子等简单直观的随机事件来描述，希望在不长的篇幅里，呈现给读者易懂而又有分量的内容。

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/钱敏平等编.—北京:高等教育出版社,2011.6
ISBN 978-7-04-032712-0
Ⅰ.①应… Ⅱ.①钱… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材
Ⅳ.①O211.6
中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第141025号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 田 玲　　封面设计 王凌波　　版式设计 范晓红
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 胡美萍　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9	版　　次	2011年6月第1版
字　　数	160千字	印　　次	2011年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	14.80元

物 料 号　32712-00

前　言

随机过程是定义在同一概率空间的一族随机变量 $\{X_t : t \in T\}$, 其中指标集 T 通常是一维的, 解释为时间。概率论中所讨论的独立同分布随机变量序列就是一个随机过程。在自然科学、经济活动和日常生活中有着大量随机过程的例子。例如某地发生地震的时间和震级、股市的每日成交量、等候在某个服务点的顾客人数, 等等。如果大家留意的话, 随机过程无处不在。很多随机过程因具有某特殊性质而获得不同的名称, 如马氏过程、平稳过程、高斯过程、二阶矩过程, 等等。

为了显示某种证明方法具有更广的适用范围， 1906 年俄国数学家马尔可夫提出一类具有特殊性质的随机过程, 后人把这种性质称为马尔可夫性质或马氏性。具有马尔可夫性质的随机过程称为马尔可夫过程, 简称马氏过程。随机游动、泊松过程、布朗运动等都是马氏过程, 是某些具体例子的数学抽象, 有广泛的适用性, 也是我们“应用随机过程”课程的主要内容。

如同其他学科一样, 随机过程论既有直观背景引导也有严密逻辑推导。我们的本意是多多展示随机过程的直观背景, 而把基于测度论基础的严格推导留给后续的研究生课程“随机过程论”。许多场合我们只用投骰子等简单直观的随机事件来描述，但准确严密的表述仍离不开隐藏在背后的概率空间。顺便说明一下, 课名中的“应用”只是北京大学概率统计系用来标明这是一门本科生的课程, 用以区别同一方向的研究生课程。作者并无实际应用的经验, 但我们深信, 随机过程理论可以用来描述、理解、解决实际问题。希望读者通过学习, 能初步了解和掌握随机过程论的基本知识, 能够和我们一样认为随机过程论既有趣又有用。

这些年来, 选修“应用随机过程”的同学越来越多，这是好事, 说明我们的课程受到同学们的欢迎。但选课的同学来自不同年级、不同院系专业, 基础不同, 志趣各异, 对我们课程的期许也各不相同, 给我们的教学工作带来很大挑战。如何适应新的要求, 契合更多同学的学习目标, 是我们需要不断探索的课题。为此,“应用随机过程”从形式到内容都在不断嬗变。由于我们未能找到一本完全符合自己意图的课本, 所以动手编写这份讲义, 以便于自己讲课, 也希望有助于同学们学习。

我们在编写过程中参考了许多其他教材与文献。书末的参考文献尽可能罗

列了令我们受过教益的书籍和文章, 但仍难免挂一漏万。自 2005 年在陈大岳的个人主页上公布部分讲稿以来, 修订稿也已经历三次修订了。我们非常感谢历届选修此课的同学们, 他们忍受了讲义中的诸多毛病和纰漏, 提出了修改意见。“‘Tis the good reader that makes the good book”(Emerson)。我们特别感谢在答疑时间前来讨教的同学们, 从他们的各种困惑中我们看到了自己教学中的不足之处。任艳霞教授试用过本讲义, 张原、王晓星同学帮助改正了原稿中许多错误, 对此我们表示衷心感谢。

本书是为大学数学院系三年级学生编写的教材。我们假定学生已经学习了微积分、线性代数、常微分方程, 但还没有学过实变函数。因此我们尽量避免在讲义中涉及过多测度论方面的知识。在撰写的过程中我们深刻体会到编好一本教材绝非易事。首先, 选材方面受制于学时, 必须精选最有代表性的题材, 我们因此把一些自己喜欢的题材移至每章最后的补充部分; 其次, 要考虑到学生选课时已经掌握的知识, 用更高的观点来看有些命题或许非常容易, 但我们必须站在大学二、三年级的学生的专业水平来想问题; 最后, 我们所写的例子和证明还应具有示范作用, 每每看到答卷上不规范的写法, 更感教材应在遣词用句方面为同学们树立榜样。我们希望在不长的篇幅里, 呈现给读者易懂而又有分量的内容。为此我们努力寻求简洁与完整、抽象与具体、基础与前沿之间的平衡。

我们认为, 正文内容是最基本的, 应当牢固掌握。一些相关题材则以问题的形式出现在习题中, 因此习题是正文的有效补充和延伸。知道如何解题和自己动手解题是不一样的, 每位独立完成这些习题的读者当有更大收获。书中的定理可以分为三类, 我们给出了一类定理的证明, 另一类定理的证明留为习题。还有一类定理的证明需要更多的数学知识, 我们只要求大家能够准确理解和应用, 有兴趣的读者可以在参考文献中找到详细证明。

很多术语译自外文。目前国内文献中多种译法并存, 中、英文混用。如无公认的标准版本, 我们尽量选用自己认为最通行的术语, 外国人名则多用英文。索引提供了有关术语的英文对照, 还可以是复习提纲。

我们为正文编配了 150 多道习题, 一部分是我们自己原创的, 另一部分则是多年积累的考题, 其中多数来自于其他教材。因时间久远, 已不能明确指明出处。如有掠人之美, 敬希谅解。

编者

2011 年 2 月 8 日

常用符号

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	概率空间
ω	样本点
$\mathcal{F}$	$\sigma-$域
P	概率分布
P_x	以 x 为初值的马氏过程所诱导的概率分布
S	状态空间
$\mathcal{M}(S)$	S上全体概率分布组成的集合
μ	S上一个概率分布
π	可逆分布, 可逆测度
X_t	随机过程
S_n	随机游动
$\mathrm{PP}(\lambda)$	参数为 λ 的泊松过程
B_t	布朗运动
$\vec{\mathbf{B}}_t$	高维布朗运动
W_t	维纳过程, 布朗运动的另一记号
τ_A, τ_i	首中时,$\tau_A = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}, \tau_i = \tau_{\{i\}}$
σ_i	首入时,$\sigma_i = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = i\}$
$\mathbf{P}$	转移矩阵
$\mathbf{Q}$	生成元, 转移速率矩阵
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\|A\|$	A 中元素个数, 或区间 A 的长度, 或 Borel 集 A 的勒贝格测度

目　　录

第一章　马　氏　链

1.1　定义与例子

马尔可夫链 (Markov chain) 是十分简单、适用面又很广的数学模型. 先看一个具体例子.

例 1.1.1 一维简单随机游动.设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 独立同分布, $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2$. 给定整数或取整数值且独立于 $\{\xi_n : n \geqslant 1\}$ (简记为 $\{\xi_n\}$) 的随机变量 S_0, 定义

$$S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = S_{n-1} + \xi_n.$$

我们称 $\{S_n : n \geqslant 0\}$ 为从 S_0 出发的一维简单随机游动, 也称 S_0 为初值. 我们可以把它设想为某粒子在 $\mathbb{Z}^1$ 上运动, 从 S_0 出发, 每一次等可能地向左或向右移动一步. 可以想象, 在抛掷一枚质量均匀的硬币的情况下, 每次投币得正面则该粒子往右走, 投得反面则往左走. 当然我们需要假定每次投掷是互不相干的. □

推而广之, 假定在一维格点 $\mathbb{Z}$ 的每一个位置上放一个"骰子" (不一定是六面体, 也不一定均匀), 在 i 点的骰子出现 j 的概率为 p_{ij}, $\Sigma_j p_{ij} = 1$. 想象一个粒子在 $\mathbb{Z}$ 的各个顶点间跳跃, 用 X_n 表示它在时刻 n 所处的位置. 若 $X_n = i$, 则投掷放置在顶点 i 的骰子, 根据投掷的随机结果, 譬如出现第 j 面, 选取顶点 j 为时刻 $n+1$ 时粒子所处的位置, 即 $X_{n+1} = j$. 假设每次投掷都互不相干. 只要给定初始位置 X_0 的分布, 我们就可以计算

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n),$$

并可进一步验证 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 满足下列定义.

定义 1.1.2 设 S 是一个可数集, $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是取值于 S 的一列随机变量. 若 $\forall\, n \geqslant 1, \forall\, i_0, \cdots, i_{n+1} \in S$,

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ = \; & P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n), \end{aligned} \tag{1.1}$$

则称 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是 S 上的一个离散时间参数的马尔可夫链, 简称马氏链, 也称 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是马氏的.

注 1.1.3 称等式 (1.1)为马氏性. 鉴于 $P(B|A)$ 在 $P(A) = 0$ 时没有定义, 因此 (1.1)成立的意思是: 当等式两边有意义时, 等式成立. 今后, 只要出现条件概率, 都是指在它有意义的时候.

定义 1.1.4 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是一个马氏链, 若存在 $\{p_{ij} : i, j \in S\}$ 满足: 对任何 $n \geqslant 1$, $i, j \in S$, $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = p_{ij}$, 则称 $\{X_n\}$ 是时齐的. 此时, 称 p_{ij} 为从 i 到 j 的 (一步) 转移概率. 若将 p_{ij} 作为第 i 行第 j 列的元素, 我们得到一个矩阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{S\times S}$, 称之为 $\{X_n\}$ 的一步转移概率矩阵, 简称转移矩阵.

以下, 如无特别声明, 马氏链就是指时齐马氏链. 有时, 为了使记号更清晰或更方便, 我们也将 p_{ij} 记为 $p(i, j)$ 或者 $p_{i,j}$. 马氏链 $\{X_n\}$ 的转移矩阵满足两个性质: $p_{ij} \geqslant 0$, $\forall i, j$; $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, $\forall i$. 一般地, 满足这两个性质的矩阵都被称为转移矩阵, 因为它必定是某马氏链的转移矩阵. 这一点马上就可以看到.

命题 1.1.5 马氏性 (1.1) 等价于

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \prod_{k=1}^{n} p(i_{k-1}, i_k). \tag{1.2}$$

在许多实际场合, 事实上我们是先有一个转移矩阵, 根据 (1.2) 计算有限维分布, 然后构造一个马氏链. 因为这个缘故, 讨论马氏链只需交代转移概率, 而且只需提及转移概率中的非零项, 未提及的转移概率默认为 0. 再来看几个实例.

例 1.1.6 两个状态的马氏链. 状态空间为 $\{0, 1\}$, 转移概率为 $p_{01} = 1 - p_{00}$, $p_{10} = 1 - p_{11}$. 可以说这是最简单的马氏链. 当年马尔可夫提出马氏链这一概念时, 他关心的是新模型的数学性质, 并不在意该模型是否有用. 不过他还是给出一个具体的例子, 就是普希金诗歌 Eugene Onegin 里某一段 (约 12 页) 中元音字母和辅音字母交替出现的规律. 把元音字母记为 0, 辅音字母记为 1, 他还估计了 p_{01} 和 p_{10}. □

例 1.1.7 Ehrenfest 模型. 设有 N 个不同编号的球和 A, B 两个纸箱. 首先, 随机地把这 N 个球分装在两个纸箱中, 其中纸箱 A 有 X_0 个球. 然后, 每次独立地以 $1/N$ 的概率选定某一个球, 把它从其所在的纸箱中拿出并放到另一个纸箱中. 将 n 次操作后纸箱 A 中球的个数记为 X_n, 则 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是一个马氏链, 状态空间为 $\{0, 1, 2, \cdots, N\}$, 转移概率为 $p_{i,i+1} = 1 - i/N$, $p_{i,i-1} = i/N$. □

例 1.1.8 生灭链. 状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$, 转移概率为 $p_{01}=1$, $p_{i,i-1}=d_i$, $p_{i,i+1}=b_i$, $\forall\ i\geqslant 1$, 其中 $d_i+b_i=1$. 显然 Ehrenfest 模型是生灭链的一个特例. □

例 1.1.9 随机游动. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 独立同分布, 取整数值, 设 S_0 为与之独立的取整数值的随机变量. 定义 $S_n=S_0+\xi_1+\cdots+\xi_n=S_{n-1}+\xi_n$. 称 $\{S_n:n\geqslant 0\}$ 为从 S_0 出发的 随机游动, 也称 S_0 为初值, 通常 $S_0=0$. 显然这是一维简单随机游动的推广. □

例 1.1.10 图上的简单随机游动. 设 $G=(V,E)$ 是一个无向、连通的简单图, 其中 V 是顶点集, E 是边集. 以 (i,j) 表示连接两顶点 i 和 j 的边. 用 $i\sim j$ 表示 $(i,j)\in E$, 此时称 j 是 i 的邻居或 j 与 i 相邻. 设顶点 i 的度数为 d_i, 即 i 共有 d_i 个邻居. 图 G 上的简单随机游动是以 V 为状态空间的一个马氏链, 每一步等概率地选择一个邻居并跳过去, 其转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1/d_i, & \text{当 } j\sim i \text{ 时},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

如果 G 是一维格点空间 A!” $\mathbb{Z}^1$, 这就是前面例子中定义的一维简单随机游动. 如果 G 是 d 维格点空间 A!” $\mathbb{Z}^d$, 则称之为 d 维简单随机游动. 一般而言, 图上的简单随机游动并不符合例 1.1.9 中的定义, 不过它是随机游动的合理推广. □

马氏链与带权有向图. 将 S 中的状态作为顶点, 若 $p_{ij}>0$, 则画一条从 i 到 j 的有向边 $\overrightarrow{ij}$, 称这个有向图为**转移概率简图**. 若再将 p_{ij} 标于有向边 $\overrightarrow{ij}$ 旁, 则得到一个加权的有向图, 称之为**转移概率图**. 转移概率图及其简图可以帮助我们更清楚地认识马氏链的性质. 例如:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

对应的转移概率图及其简图如图 1 及图 2 所示.

例如, 某网友在万维网上漫无目标地浏览, 如果他所浏览的网页上有若干个超级链接, 他将随机地等可能地点击其中一个链接跳到另一个页面. 这可以用**马氏链**来描述. 设想每个网页是一个**状态** (或用图论的语言, 一个**顶点**), 所有网页全体构成**状态空间** S(或用图论的语言, 一个**图的顶点集**). 尽管状态空间很大, 也还是有限的. 如果某个网页指向另一个网页, 我们就在相应两顶点间画一条有向边. 以顶点 x 为起点、连到其他顶点的有向边的个数称为顶点 x 的出度

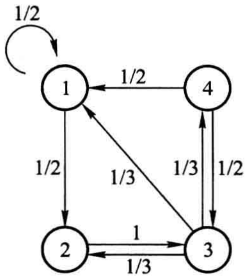


图 1

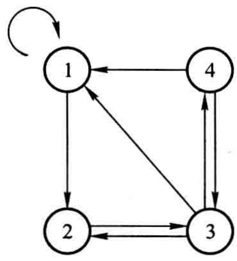


图 2

$d(x)$. 如果存在 k 条从 x 到 y 的连线, 令 $p_{xy}=k/d(x)$, 否则为零. 这样就定义了 S 上的转移概率, 相应的马氏链可用于描述网民的浏览行为.

对于马氏链 $\{X_n\}$, 不难证明 $P(X_{n+k}=j|X_k=i)$ 是一个不依赖于 k 的常值, 将之记为 $p_{ij}(n)$ 或 $p_{i,j}^{(n)}$.

定义 1.1.11 称 $p_{ij}(n)$ 为从 i 到 j 的 (n 步) 转移概率. 补充规定 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$. 称矩阵 $\mathbf{P}(n)=(p_{ij}(n))_{S\times S}$ 为马氏链的 n 步转移概率矩阵.

不难看出, $\mathbf{P}(1)=\mathbf{P}$, 即马氏链的一步转移概率矩阵; $\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$, 即单位矩阵.

命题 1.1.12 对任何 $i,j\in S$, $m,n\geqslant 0$,

$$p_{ij}(n+m)=\sum_{k\in S}p_{ik}(n)p_{kj}(m).$$

我们称上面的等式为 Chapman-Kolmogorov 等式. 上式可以改写为

$$\mathbf{P}(n+m)=\mathbf{P}(n)\mathbf{P}(m).$$

由此可得

$$\mathbf{P}(n)=\mathbf{P}^n. \tag{1.3}$$

命题 1.1.13 以下命题均与马氏性等价.

(1) $\forall\, n,m\geqslant 1$, $\forall\, i_0,\cdots,i_n,j\in S$,

$$P(X_{n+m}=j|X_n=i_n,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})=P(X_{n+m}=j|X_n=i_n).$$

(2) $\forall\, r\geqslant 1$, $\forall\, n_1<n_2<\cdots<n_r$, $\forall\, i_1,\cdots,i_r\in S$,

$$\begin{aligned}&P(X(n_1)=i_1,\cdots,X(n_r)=i_r)\\=\;&P(X(n_1)=i_1)\prod_{l=1}^{r-1}P(X(n_{l+1})=i_{l+1}|X(n_l)=i_l).\end{aligned}$$

(3) $\forall\, r, s \geqslant 1$, $\forall n_1 < \cdots < n_r < n < m_1 < \cdots < m_s$, $\forall i_1, \cdots, i_r, i, j_1, \cdots, j_s \in S$,

$$\begin{aligned} & P(X(m_1) = j_1, \cdots, X(m_s) = j_s | X_n = i, X(n_1) = i_1, \cdots, X(n_r) = i_r) \\ = \;& P(X(m_1) = j_1, \cdots, X(m_s) = j_s | X_n = i). \end{aligned}$$

(4) $\forall\, r, s \geqslant 1$, $\forall n_1 < \cdots < n_r < n < m_1 < \cdots < m_s$, $\forall i_1, \cdots, i_r, i, j_1, \cdots, j_s \in S$,

$$\begin{aligned} & P(X(m_1) = j_1, \cdots, X(m_s) = j_s, X(n_1) = i_1, \cdots, X(n_r) = i_r | X_n = i) \\ = \;& P(X(m_1) = j_1, \cdots, X(m_s) = j_s | X_n = i) \times \\ & P(X(n_1) = i_1, \cdots, X(n_r) = i_r | X_n = i). \end{aligned}$$

注 1.1.14 在上述命题中第 (4) 部分的等式具有明显的概率含义: 在已知现在所处状态的条件下, 未来与过去是独立的.

练习题

1. 验证: 随机游动是一个马氏链, 试写出转移概率.
2. 证明任何一列取整数值的独立随机变量序列都是马氏链. 追加什么条件可使之时齐?
3. 设转移矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

试求 $\mathbf{P}^2$.

4. 设 $\{X_n\}$ 是马氏链. 举例说明: A 不是单点集,

$$P(X_{n+1} = j | X_n \in A, X_{n-1} = i) \neq P(X_{n+1} = j | X_n \in A).$$

因此在应用马氏性时, 一定要知道过程现在所处的确切状态, 而不能仅仅知道现在的状态属于某个集合.

5. 证明命题 1.1.5, 并研究关于非时齐马氏链的相应结论.
6. 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是马氏链. 给定 N, 令 $Y_k = X_{N+k}$. 证明:$\{Y_k : k \geqslant 0\}$ 也是马氏链. 又若 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是时齐的, 证明:$\{Y_k : k \geqslant 0\}$ 也是时齐的.
7. 证明等式 (1.3).
8. 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是一个马氏链, 试证

$$P(X_0 = i_0 | X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0 | X_1 = i_1).$$

9. 对于马氏链, $\forall\, r \geqslant 1$, $\forall n_1 < \cdots < n_r < n < m$, $\forall B_1, \cdots, B_r, A \subset S$, $i \in S$, 证明: $P(X_m \in A | X_n = i, X_{n_1} \in B_1, \cdots, X_{n_r} \in B_r) = P(X_m \in A | X_n = i)$.

10. 证明命题 1.1.13.
11. 若转移矩阵 $\mathbf{P}=(p_{ij})$ 满足 $\Sigma_i p_{ij}=1, \forall j$, 则称 $\mathbf{P}$ 为*双重随机的*. 证明: 若 $\mathbf{P}$ 是双重随机的, 则对任何 n, $\mathbf{P}^n$ 也是双重随机的.
12. 某篮球运动员投球成功的概率取决于他前两次的投球成绩. 如果两次都成功, 则下次投球成功的概率为 3/4; 如果两次都失败, 则下次投球成功的概率为 1/2; 如果两次投球中有一次成功一次失败, 则下次投球成功的概率为 2/3. 试用一个马氏链来刻画该球员的连续投球, 并求出他投球成功概率的渐近值.
13. 设 f 是定义在 S 上的函数. 给出 f 的充要条件使得对任意取值于 S 的马氏链 $\{X_n\}$,$\{f(X_n)\}$ 都是马氏链.
14. *更新过程*. $L_1, L_2, \cdots$ 是独立同分布的取正整数的随机变量序列, L_i 表示第 i 个灯泡的寿命. 假设 0 时刻放上第一个灯泡, 灯泡坏的时候立刻换上一个新灯泡. 则 $\{0, L_1, L_1+L_2, \cdots\}$ 表示换灯泡的时间, 称为*更新时刻*. 记 X_n 为时刻 n 正在用的那个灯泡已经使用的时间, 则 $X_n=0$ 当且仅当 n 是一个更新时刻. 证明 $\{X_n: n\geqslant 0\}$ 是一个马氏链, 并写出它的转移矩阵.

1.2 不 变 分 布

设马氏链 $\{X_n\}$ 的初始位置 $X_0=i$, 我们将其对应的概率记为 P_i, 相应的数学期望记为E_i. 当然, 初始位置X_0还可以是随机的. 设X_0 的分布为 μ, 即 $X_0\sim\mu$,

$$\mu_i=P(X_0=i), \quad \forall\, i\in S,$$

则它对应的概率为$P_\mu=\sum_i \mu_i P_i$, 相应的数学期望记为E_μ. 称X_0的分布为马氏链$\{X_n: n\geqslant 0\}$ 的*初始分布*, 或简称*初分布*.

根据等式(1.2), $\{X_n: n\geqslant 0\}$的有限维分布被其初始分布μ和转移概率$\{p_{ij}: i,j\in S\}$完全决定. 特别地, 我们可以算出$P(X_n=i)$. 例如

$$P(X_1=j)=\sum_{i\in S}P(X_0=i, X_1=j)=\sum_{i\in S}\mu_i p_{ij}.$$

定义 1.2.1 *若 $\pi=\{\pi_j: j\in S\}$ 满足:*

$$(1)\ \pi_j\geqslant 0, \quad \forall\, j\in S; \quad (2)\ \sum_{j\in S}\pi_j=1; \quad (3)\ \pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}, \quad \forall\, j\in S,$$

则称 π 为转移矩阵 $\mathbf{P}$ 的一个不变分布, 或平稳分布, 也称 π 为以 $\mathbf{P}$ 为转移矩阵的马氏链的不变分布或平稳分布.

注 1.2.2 *满足 (1) 的 π 称为一个测度, 满足 (1), (2) 的 π 称为一个概率测度、概率分布或分布, 满足 (1), (3) 的 π 称为 $\mathbf{P}$ 的一个不变测度.*

我们将 S 上的一个测度视为一个行向量. 当状态空间 S 为有限时, 不变分布 π 就是矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值为 1 的左特征向量, 于是我们可以通过解线性方程组来求不变分布. 若进一步假设 $p_{ij} > 0$, $\forall i, j$(这个条件可进一步减弱), 则 Perron-Frobenius 定理 (见附录定理 2) 断言该特征向量的所有分量都是正的.

例 1.2.3 设马氏链 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

通过解方程可知其不变分布为 $(1/8, 3/16, 1/8, 3/16, 1/8, 1/4)$. □

一般来说, 如果状态空间很大, 直接解方程就不太可行. 不过, 当对应的转移概率图呈树状时, 我们可利用某种递推关系求解方程.

例 1.2.4 (例 1.1.8 续) 生灭链的不变分布. 若 π 为不变分布, 则 $\pi_0 = \pi_1 d_1$, $\pi_1 b_1 = \pi_2 d_2, \cdots$. 从而

$$\pi_i = \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 d_2 \cdots d_i} \pi_0, \quad \forall\, i \geqslant 1.$$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \big(b_1 \cdots b_{i-1}\big)/\big(d_1 d_2 \cdots d_i\big)$ 收敛, 则不变分布存在. 由 $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ 可得

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 d_2 \cdots d_i}\right)\right)^{-1}.$$

若级数发散, 则不变分布不存在, 但不变测度仍然存在. □

例 1.2.5 设 $S = \mathbb{Z}_+$. 对任意 $i \geqslant 0$, 转移概率 $p_{i0} = q_i$, $p_{i,i+1} = p_i$, $p_i + q_i = 1$. 于是若 π 是不变分布, 则 $\forall\, i \geqslant 1$,

$$\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji} = \pi_{i-1} p_{i-1} = \cdots = \pi_0 p_0 p_1 \cdots p_{i-1}.$$

当 $\sum_{n=1}^{\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} < \infty$ 时, 不变分布存在, 且 $\pi_0 = \big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1}\big)^{-1}$, 否则, 不变分布不存在. □

如果 μ 是 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 的初分布, 则 $X_n \sim \mu\mathbf{P}^n$. 从而, 如果初分布是不变分布 π, 则 $X_n \sim \pi$ 对所有 n 均成立. 不变分布由此得名.

定义 1.2.6 若随机过程 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 满足: 对任意非负整数 n, k,

$$(X_0, X_1, \cdots, X_k) \text{与 } (X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+k}) \text{ 同分布,} \tag{1.4}$$

则称 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 为 (严) 平稳过程.

命题 1.2.7 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是以 $\mathbf{P}$ 为转移概率矩阵的马氏链, π 是 $\mathbf{P}$ 的一个不变分布. 若 $X_0 \sim \pi$, 则 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是平稳过程.

因此不变分布又被称为平稳分布.

一般而言, 马氏链可以没有不变分布, 例如一维简单随机游动; 也可以有多个不变分布, 例如以单位矩阵为转移矩阵的马氏链. 马氏链研究中的一个基本问题是确定所有的不变分布. 我们希望能够回答下列问题:

1. 不变分布在什么条件下存在?

2. 假设不变分布存在, 那么它在什么条件下是唯一的? 在什么条件下 $\mu\mathbf{P}^n$ 收敛到不变分布?

3. 如果 $\mu\mathbf{P}^n$ 收敛到不变分布, 那么收敛速度有多快?

我们将在 1.6 节、 1.5 节和 1.7 节分别研究这三个问题.

练习题

1. 证明命题 1.2.7.
2. 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 的马氏链, 其转移概率为

$$p_{00} = p, \quad p_{01} = 1 - p, \quad p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = \beta, \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots,$$

   其中 $0 \leqslant p < 1$, $0 < \beta < 1$. 当 $\beta < 1/2$ 时, 求不变分布 π 并计算 $E_\pi X_{100}$. (当 $p = 0$ 时, 此马氏链称为 $\mathbb{Z}_+$ 上的带反射壁的随机游动.)
3. 设 S 上的马氏链 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 具有不变分布 π. 令 $Y_n = (X_n, X_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 证明 $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ 是马氏链, 并以 $\{\tilde{\pi}_{i,j} = \pi_i p_{ij} : i, j \in S\}$ 为其不变分布.
4. 设马氏链的取值为非负整数, 其转移概率为 $p(0,1) = 1$; 对于 $i \geqslant 1$, $p_{i,i-1} = \lambda/(\lambda + 1)$, $p_{i,i+k} = p_k/(\lambda + 1)$, $\forall k \geqslant 1$. 其中, $1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k < \sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \lambda$. 设 π 为该马氏链的不变分布, 试求 π_1.
5. 证明转移矩阵 $\mathbf{P}$ 的不变分布全体构成一个凸集.

1.3 状态的分类

定义 1.3.1 若 $P_i(\exists\, n \geqslant 0$ 使得 $X_n = j) > 0$, 则称 i 能到达 j, 记为 $i \to j$. 若 $i \to j$ 且 $j \to i$, 则称 i 与 j 互通, 记为 $i \leftrightarrow j$.

命题 1.3.2 设 $i \neq j$, 则下列几条等价:

(1) $P_i(\exists\, n \geqslant 0$ 使得 $X_n = j) > 0$;

(2) 存在 $n \geqslant 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$;

(3) 存在 $n \geqslant 1$, $i_0, \cdots, i_n \in S$ 使得 $i_0 = i$, $i_n = j$ 且 $p_{i_0 i_1} > 0$, $p_{i_1 i_2} > 0, \cdots, p_{i_{n-1} i_n} > 0$.

注 1.3.3 由上述命题, $i \to j$ 等价于转移概率简图中从 i 出发沿箭头方向走能到达 j.

注意到"$\to$"有传递性, 我们推出:

$$i \leftrightarrow i; \quad i \leftrightarrow j \text{ 则 } j \leftrightarrow i; \quad i \leftrightarrow j \text{ 且 } j \leftrightarrow k, \text{ 则 } i \leftrightarrow k.$$

于是, 互通关系是 S 上的一个等价关系, S 可按互通关系划分为互不相交的等价类, 每个等价类被称为一个**互通类**, 一般用 C 表示.

例如, 若转移概率简图如图 3 所示, 则此马氏链有三个互通类: $C_1 = \{1,2,3\}$, $C_2 = \{4\}$, $C_3 = \{5,6\}$. 在这个例子中, 我们注意到 C_3 具有封闭性, 即: 如果初始状态在 C_3 中, 那么该马氏链一直处于 C_3 中.

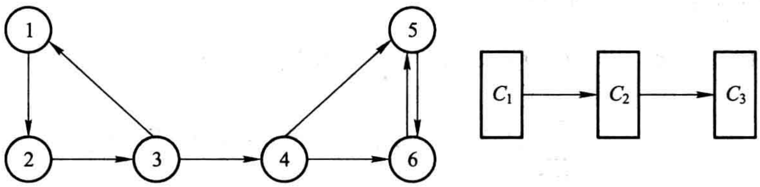


图 3

定义 1.3.4 若 $A \subset S$ 满足 $\forall\, i \in A$, $\sum_{j \in A} p_{ij} = 1$, 则称 A 为一个闭集.

闭集就像传说中的貔貅, 只进不出. 如果 A 是一个闭集, 那么对任意 $i \in A$, $i \to j$ 表明 $j \in A$. 对任意互通类 C, 我们都可以推出 $C \cap A = \varnothing$ 或 $C \subset A$. 另外, 如果 A 是一个闭集, 那么 $\mathbf{P}|_A = (p_{ij})_{A \times A}$ 还是一个转移概率矩阵. 于是当初始状态在 A 中时, 我们可以把马氏链的状态空间缩小为 A, 即把视野集中到 A. 如果单点集 $\{i\}$ 是闭集, 则称状态 i 为**吸收态**, 此时 $p_{ii} = 1$. 值得注意的是, 互通、闭集等概念都依赖于转移概率矩阵 $\mathbf{P}$.

定义 1.3.5 给定转移矩阵 $\mathbf{P}$. 若状态空间 S 有非空、闭的真子集, 则称 S 是可约的, 也称 $\mathbf{P}$ 是可约的; 否则称 S 是不可约的, 也称 $\mathbf{P}$ 是不可约的.

命题 1.3.6 状态空间 S 不可约当且仅当 S 仅有一个互通类.

自然, S 是闭集. 如果 S 可约, 那么存在一个非空、闭的真子集 A, 它是 S 的一部分互通类之并. 换句话说, 我们可以在 S 中扔掉一些互通类以得到一个