



临沂大学博士教授文库
LINYIDAXUE BOSHI JIAOSHOU WENKU
国家自然科学基金项目

约束 Hamilton系统 对称性及应用

YUESHU Hamilton XITONG
DUICHENXING JIYINGYONG

王永龙 赵德玉 著

山东人民出版社

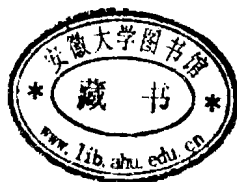
全国百佳图书出版单位 国家一级出版社



临沂大学博士教授文库
LINYIDAXUE BOSHI JIAOSHOU WENKU

约束 Hamilton系统 对称性及应用

王永龙 赵德玉 著



山东人民出版社

全国百佳图书出版单位 国家一级出版社

图书在版编目(CIP)数据

约束 Hamilton 系统对称性及应用/王永龙,赵德玉
著. —济南:山东人民出版社,2012. 12
ISBN 978-7-209-06967-0

I. ①约… II. ①王…②赵… III. ①哈密顿系
统 IV. ①0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 316797 号

责任编辑:杨 刚

封面设计:武 斌

约束 Hamilton 系统对称性及应用

王永龙 赵德玉著

山东出版集团

山东人民出版社出版发行

社 址:济南市经九路胜利大街 39 号 邮 编:250001

网 址:[http:// www. sd - book. com. cn](http://www.sd-book.com.cn)

发行部:(0531)82098027 82098028

新华书店经销

山东省东营市新华印刷厂印装

规 格 16 开(169mm×239mm)

印 张 17.5

字 数 270 千字

版 次 2012 年 12 月第 1 版

印 次 2012 年 12 月第 1 次

ISBN 978-7-209-06967-0

定 价 45.00 元

如有质量问题,请与印刷单位调换。电话:(0546)6441693

自强不息 厚德载物

——《临沂大学博士教授文库》总序

临沂大学校长 韩延明

《易经》云：“天行健，君子以自强不息；地势坤，君子以厚德载物。”我以为，摘得诺奖者莫言便应该是这样一位自强不息、厚德载物的“君子”。2012年10月11日，著名作家莫言荣膺诺贝尔文学奖，成为首位中国籍诺贝尔文学奖获得者。多少年来，“诺贝尔”和“奥斯卡”成了中国人的两大心结。我们一直在孜孜追求，却总是擦肩而过，令国人纠结。莫言的获奖，坚定了中国知识分子进一步“敢为天下先”冲刺世界一流的决心和信心，同时，也向大学的博士教授们提出了更加严峻的挑战。

众所周知，博士乃博学有识之士，教授乃教书育人之师，博士教授乃大学之中流砥柱。正如被誉为清华大学“终身校长”的梅贻琦先生所言：“所谓大学者，非有大楼之谓也，有大师之谓也。”任何一所大学，永远都是由这所大学的教师们来播撒知识、培育人才、发展学术、引领社会的。无论是国内大学还是国外大学，不管是部属大学还是省属大学，“腹有诗书气自华”的博士教授们始终是大学改革创新的大力推进者、优秀人才的辛勤培育者、学术精神的坚定捍卫者、科学真理的勇敢探索者与大学优良传统的忠诚继承者和弘扬者，同时还是披肝沥胆、磨石铸剑、“为天地立心，为生民立命”的攻坚者和开拓者，是智慧的化身、科学的代表和正义的力量，是人类进步与世界文明的虔诚守护神。纵览世界各国大学的历史发展，大学之所以历久弥新而始终薪火相传，就在于大学的真、善、美，就在于大学的博、智、雅，就在于大学研究“高深学问”的宗旨一直绵延

相续。大学人体现的是学问和精神。他们默默耕耘且任劳任怨，竟知向学而淡泊名利，心忧天下而平凡度日，穷情育才而不图回报。《礼记·中庸》中所说的“博学之、审问之、慎思之、明辨之、笃行之”，便是他们做人做事做学问的真切体现。正如北京大学“永远的校长”蔡元培先生所释：“大学者，研究高深学问者也”；“大学者，囊括大典、网罗众家之学府也”。从某种意义上可以说，一所大学的声望，归根到底是校友的名望；一所大学的发展，归根到底是学术的拓展；一所大学的活力，归根到底是大师的魅力。

诚然，大学最基本的职能是教学，教学是教师的天职。没有教学，就不是一所真正意义上的现代大学；没有以教学为本、育人为先的大学教师，大学的质量提升、内涵发展、学术突破、特色凸显和品牌创建也就无从谈起。然而，大学还是知识继承、生产、传播和创新的学术机构。大学之为大学，就在于其拥有一种学术无疆的世界胸怀。学术繁荣是大学向心力、生命力和感召力的集中体现。探索真理、发展科学，是每一位大学教师义不容辞的重要职责，也是每一所大学责无旁贷的神圣使命，因为大学不仅要适应社会、服务社会，还要批判社会、引领社会。与钱学森、钱三强合称为“三钱”的中国近代力学奠基人之一、曾任上海大学校长达 27 年之久（1983~2010）的钱伟长院士曾经对教师们说过：“你不教课，就不是教师；你不搞科研，就不是好教师。”教学和科研是大学教师彼此推动、相辅相成的本职事业。在西方，从古代的柏拉图、亚里士多德，到近代的亨利·纽曼、威廉·冯·洪堡等，都无一例外地把学术探究作为大学教育的一项基本职能。尽管现代大学受到了越来越多的外部因素的牵扰或干涉，但学术传承与创新依然是大学生生不息、代代相传的基本依托。大学虽历经沧桑巨变，但至今仍然是靠知识和智慧生存与发展的学者群体的学术组织。作为博学善思的博士教授们，理应躬身以行、率先垂范，增强学术实力、遵守学术规范、坚持学术争鸣、提升学术水平，以求真、求善、求美、求新为目标，在教书育人的同时，自觉地把时间和精力集中到学术研究上来，使自己始终立于学科、专业的发展前沿与战略高地，真正成为具有精深学术造诣和高尚人格魅力的专家、学者，成为本学科当之无愧的学术带

头人和拔尖创新人才。我们要凭着中国知识分子几千年来所形成的那种道义、人格、理想和拼搏精神，凭着对国家和民族未来的一种强烈的忧患意识和竞进意识，凭着大学教师被赋予的那种神圣职责和光荣使命，坚守“富贵不能淫、贫贱不能移、威武不能屈”的士子风骨，道德高尚地去做人、做事、做学问。但近年来，学术道德失范却如一颗“毒瘤”，侵蚀着学人的身心。抄袭剽窃成风，权学交易泛滥，“关系学术”肆虐，“金钱学术”走俏，使学术伦理面临异化和崩盘的危險，令人心痛。这不仅严重损害了学术研究者的形象和声誉，而且对大学长远发展和社会整体运行都造成了可怕的负面影响。究其原因，乃在于当下“心浮气躁”之风盛行。“智圣”诸葛亮有言，“淡泊以明志，宁静以致远”，这非常契合中国知识分子的特质。对博士教授们而言，心静既是一种氛围和情愫，又是一种信念和境界；既是一种淡然而淡定的安宁，也是一种神圣且神秘的安静。心静是一种品质。心静才能滋养生命、修养心灵。大学正是在非同凡响的宁静中包蕴着纯正、质朴、深刻、卓越、文明、洁雅，即所谓“深深的水，静静地流”，从而彰显出博士教授们那种渊博的学识、深邃的睿智、高洁的品格、强烈的责任、拼搏的精神和崇高的境界。我们要通过传道、授业、解惑，通过学习、思考、实践，点燃和升华学生的梦想，并为学生的梦想插上强劲的翅膀，使他们真正成为德才兼备的社会栋梁。

德国著名教育家雅斯贝尔斯说过：“大学是研究和传授科学的殿堂，是教育新人成长的世界，是个体之间富有生命的交往，是学术勃发的世界。”大学回归学术本位，重要的是尊重学者人格，鼓励学术卓越，打造学科品牌。我认为，一个人就像一粒种子，天生就有强烈的要发芽的欲望，只要具备一定的条件。为了积极催发“种子”发芽、强力推进学术突破，临沂大学全面贯彻“治教学、治学科、治学术、治学风”的“教授治学”理念，强力推行“导向科研、导向基层”政策，不断构筑学科高地，培育学科高峰，吸纳学科高人，提倡和引导教师们“发表高水平论著、申报高层次课题、获得高级别奖项、争取高额度经费、研发高科技专利”，全力营造浓厚、宽松、和谐、相对自由的学术环境和科研氛围，进一步激发全校教师学术研究的积极性、主动性和创造性，现已初步呈现出百舸争流、千

帆竞渡的强劲发展势头。教师们奋力拼搏、严谨治学，坚守学术批判精神与创新精神有机结合，高水平论著不断涌现，高层次课题不断展现，高级别获奖不断呈现，高额度经费不断实现，高科技专利不断发现。绳锯木断，水滴石穿，贯通学识，求知凝练涓涓细流汇成海；白驹过隙，稍纵即逝，捕捉灵感，妙思汇集句句明理著为书。在《临沂大学博士教授文库》编纂委员会的组织、指导与协调下，首批《临沂大学博士教授文库》即将由山东人民出版社付梓。“雨余观山色，景象便觉新妍；夜静听钟声，音响尤为清越。”我相信并且坚信，我校首批学术专著的出版发行，定会对各位博士教授各自研究的领域有所帮助，也必将为下一步个人乃至全校科研水平开启更为广阔的世界。同时，这批成果也是我校由临沂师范学院更名为临沂大学之后首批立项资助出版的学术著作。它既是学校高水平成果培育计划步入规范化、系列化、制度化、科学化轨道的一个重要标志，也是学校认真贯彻落实国家教育部、山东省教育厅高等院校教学质量建设工程精神、促进学校内涵发展的一项重大举措。

修改、审定本序之时，恰逢本人由中共中央组织部派往中国延安干部学院培训学习。其间，除在课堂内聆听老师讲授“基础理论课”之外，我们还通过“现场体验课”走出课堂，参观考察了中共中央在延安十三年期间留下的众多革命古迹和伟人故居，深受感染、熏陶和教育。特别是瞻仰了位于枣园的“毛泽东故居”之后，我更是为毛泽东同志那种身居窑洞、点燃油灯而刻苦读书和勤奋著述的顽强拼搏精神深深打动。据记载，1943年10月至1945年12月两年间，在枣园半山坡那阴暗潮湿的狭窄窑洞里，毛泽东同志不仅酝酿发动了南泥湾大生产运动，指挥了抗日战争，组织开展了整风运动，筹备召开了党的第七次全国代表大会等，而且废寝忘食、见缝插针地学习和写作。他在当时艰难困苦、资料匮乏的境况下，撰写了一系列振聋发聩、影响久远的鸿篇大作。《学习和时局》《为人民服务》《论联合政府》《愚公移山》《抗日战争胜利后的时局和我们的方针》《文化工作中的统一战线》《关于重庆谈判》《建立巩固的东北根据地》等名篇均创作于此，这些著述仅收入后来《毛泽东选集》的就有28篇之多，令人肃然起敬，使我们深受教育、启迪和鞭策。拿破仑说过：“聪明的人会抓住

每一次机会，更聪明的人会不断创造新的机会。”一个人，想要优秀，必须去接受挑战；想要尽快优秀，必须去寻找挑战。“大学之道，在明明德，在亲民，在止于至善。”大学是我们产生梦想的地方，大学也是我们梦想成真的地方。

感慨系之，是为序。

草于临沂大学明静斋

2012年10月20日

前 言

物理系统的状态和运动方程常常受到某些条件的限制，通常称为约束条件。约束条件将使得物理系统的状态和运动受到一定限制，使得系统的运动方程在约束超曲面上发生无穷小的“虚位移”不改变其形式，也可以理解为在某种规范变换下，物理系统的作用量不变，对应一定的守恒量。简单系统的讲，就是物理系统的约束给出规范变换，规范变换下作用量不变给出守恒量，守恒量包含该物理系统的一些物理性质，为研究一些特殊量子物理系统具有一定的意义，这是本书编写的初衷。

本书首先介绍了约束 Hamilton 系统，阐述了由 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 表述的基本方法，给出了弱等与强等的概念。然后，在 Legendre 变换中，借助 Dirac-Bergmann 方法可以计算出约束 Hamilton 系统的所有约束（含有初级约束与次级约束），并给出第一类约束与第二类约束的分类。为了了解约束对约束 Hamilton 系统的意义，介绍了 Dirac 猜想，所有第一类约束都是规范变换生成元。基于规范变换生成元，很容易给出规范变换。在规范变换下，作用量不变给出 Noether 定理，作用量和约束变分在约束超曲面上的闭合曲线的积分不变给出 Poincaré-Cartan 积分不变量，Green 函数生成泛函不变给出 Ward 恒等式，这些守恒量是本书介绍的主要内容。为了阐述这些守恒量与约束间关系，本书还讨论了几个具体物理系统。在阐述这些内容前，为了更好了解约束理论，介绍了约束系统正则量子化方法和路径积分量子化方法。

本书后面章节内容安排如下，第 1 章约束系统经典理论回顾，讨论了约束的产生，约束系统的奇异 Lagrange 量，弱等与强等概念，约束系统的

Hamilton 量, 约束的自洽性, Dirac 猜想, 规范变换生成元; 第 2 章约束 Hamilton 系统的正则量子化, 介绍了约束 Hamilton 系统量子化方法的发展, Dirac 方法, 规范条件的选择, Faddeev-Jackiw 量子化方法, 修正的 Faddeev-Jackiw 正则量子化方法. 在约束 Hamilton 系统量子化方法的发展一节, 含有 Dirac 方法, 路径积分量子化方法, Faddeev-Jackiw 方法基本发展状况; 在 Dirac 方法一节, 对规范固定与 Dirac 正则量子化、Dirac 正则量子化方法、场论中的 Poisson 括号和 Dirac 括号进行了介绍, 并应用于自由电磁场和量子电动力学组合费米子两物理系统; 规范条件的选择一节, 分析了直线运动粒子的规范理论, 自由电磁场的规范条件选取, 纯 Yang-Mills 场的规范条件选取; Faddeev-Jackiw 量子化方法一节, 介绍了辛矩阵正规和奇异时, Faddeev-Jackiw 方法, 并将该方法推广到场变量系统和含有 Grassmann 数系统, 并且借助 Maxwell 场和含 Chern-Simons 项的 $(2+1)$ 维 CP^1 非线性 σ 模型两物理系统对 Faddeev-Jackiw 量子化方法进行了说明; 修正的 Faddeev-Jackiw 正则量子化方法一节, 首先介绍 Dirac 初级约束与 Hamilton 量, 并且分析了 Dirac 体制中的 1 阶次级约束和更高阶次级约束同 Faddeev-Jackiw 体制中的初级约束和次级约束间的对应关系, 给出如果 Faddeev-Jackiw 量子化中约束与 Dirac 量子化中出现的次级约束不相一致, 说明这两种方法不等价, 存在矛盾, 为了解决这一矛盾, 将推导约束的 Dirac-Bergmann 方法引入的 Faddeev-Jackiw 方法中寻找约束, 称为修正的 Faddeev-Jackiw 量子化方法. 第 3 章约束 Hamilton 系统的路径积分量子化, 介绍了路径积分, Faddeev-Popov 路径积分量子化, Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化, Batalin-Fradkin-Vilkovsky 路径积分量子化, 泛函积分形式与正则量子化间关系. 这一章没有介绍 Batalin-Vilkovsky 路径积分量子化方法, 也没有介绍 Batalin-Fradkin-Vilkovsky 正则量子化方法. 在本书中也没有涉及这两种方法. 第 4 章约束 Hamilton 系统的对称性, 介绍了正则变换的母函数和守恒量, 规范变换生成元组合系数间关系, Noether 定理与 Noether 恒等式, Poincaré-Cartan 积分不变量, Ward 恒等式等. Noether 定理与 Noether 恒等式一节, 含有 Noether 定理与 Killing 方程间关系、经典 Noether 定理及其正则形式、连续介质中 Noether 定理及其正则形式、约束系统的正则

Noether 定理、正则 Noether 恒等式、非不变系统正则形式的广义 Noether 恒等式与量子守恒律；Poincaré-Cartan 积分不变量一节，含有非完整约束系统的、约束连续正规系统的和奇异系统的三种情况下的 Poincaré-Cartan 积分不变量；Ward 恒等式一节，只介绍了正则和广义正则两种形式的 Ward 恒等式。关于广义扩展 Ward 恒等式等没有深入介绍。第 5 章规范对称性与 Dirac 猜想，系统介绍了约束系统的规范对称性质，相空间 Noether 恒等式和 Dirac 猜想，高阶微商系统 Dirac 猜想的一个反例。约束系统的对称性质一节，介绍了奇异 Lagrange 量的动力学回顾和实例解析；相空间 Noether 恒等式与 Dirac 猜想，含有的内容有关于 Dirac 猜想的提出，扩展正则 Noether 恒等式，相空间 Noether 恒等式的应用。对理解约束 Hamilton 系统的内在约束与守恒量间关系很有帮助。第 6 章约束 Hamilton 系统量子化及其对称性的应用，讨论了含 Maxwell-Chern-Simons 项 $(2+1)$ 维 CP^1 非线性 σ 模型、组合 Bose 子系统、含 Maxwell-Chern-Simons 项的组合 Fermi 子系统、光孤子系统四个物理系统的应用，分别对这四个物理系统进行了量子化，有的采用的是正则量子化，有的采用的是路径积分量子化，还有的是即采用了正则量子化也采用了路径积分量子化，并讨论这四个物理系统的量子对称性，给出前三个系统具有分数统计的特殊量子性质的结果。这为将约束与守恒荷间关系应用到凝聚态物理领域提供了一条可以尝试的新途径。

本书大部分工作在李子平教授悉心指导下完成，部分思想得益于与赵柳教授、张肇西院士、宗红石教授的交流，相应科研工作得到国家自然科学基金委和山东省自然科学基金委的资助，在此表示衷心的感谢。本书能够顺利出版，离不开临沂大学学术著作出版基金的资助，更离不开山东人民出版社王晶、杨刚两位主任的辛勤劳动，在此表示诚挚的感谢！同时，也向麻省理工学院和蒋兴鹏博士在文献上的帮助表示感谢！

目 录

自强不息 厚德载物

——《临沂大学博士教授文库》总序 韩延明 1

前 言 1

第 1 章 约束系统经典理论回顾 1

1.1 约束的产生 2

1.2 约束 Hamilton 系统 4

1.2.1 约束系统的奇异 Lagrange 量 5

1.2.2 弱等与强等 7

1.2.3 约束系统的 Hamilton 量 9

1.2.4 约束的自治性 11

1.3 Dirac 猜想 12

1.4 规范变换生成元 15

1.5 本章小结 25

参考文献 26

第 2 章 约束 Hamilton 系统的正则量子化 29

2.1 约束 Hamilton 系统量子化方法的发展 29

2.1.1 Dirac 方法 29

2.1.2 路径积分量子化方法的发展 30

2.1.3 Faddeev-Jackiw 方法 31

2.2 Dirac 方法 32

2.2.1	规范固定与 Dirac 正则量子化	32
2.2.2	Dirac 正则量子化方法	36
2.2.3	场论中的 Poisson 括号和 Dirac 括号	39
2.2.4	自由电磁场的 Dirac 正则量子化	40
2.2.5	量子电动力学组合费米子的 Dirac 正则量子化	44
2.3	规范条件的选取	48
2.3.1	直线运动粒子的规范理论	51
2.3.2	自由电磁场的规范条件选取	55
2.3.3	纯 Yang-Mills 场的规范条件选取	63
2.4	Faddeev-Jackiw 量子化方法	70
2.4.1	辛矩阵正规时, Faddeev-Jackiw 方法	71
2.4.2	辛矩阵奇异时, Faddeev-Jackiw 方法	72
2.4.3	推广到场变量系统的 Faddeev-Jackiw 方法	73
2.4.4	含有 Grassmann 数系统的 Faddeev-Jackiw 方法	75
2.4.5	Maxwell 场的 Faddeev-Jackiw 量子化	77
2.4.6	含 Chern-Simons 项的 $(2+1)$ 维 CP^1 非线性 σ 模型的 Faddeev-Jackiw 量子化	80
2.5	修正的 Faddeev-Jackiw 正则量子化方法	85
2.5.1	Dirac 初级约束与 Hamilton 量	85
2.5.2	Dirac 体制中的 1 阶次级约束与 Faddeev-Jackiw 体制中的 初级约束对应关系	86
2.5.3	Dirac 体制中存在高阶次级约束同 Faddeev-Jackiw 体制中的 次级约束间关系	88
2.5.4	Faddeev-Jackiw 量子化与 Dirac 量子化间的矛盾	92
2.5.5	修正的 Faddeev-Jackiw 量子化方法	98
2.6	本章小结	101
	参考文献	102

第 3 章 约束 Hamilton 系统的路径积分量子化 107

3.1	路径积分	107
3.2	Faddeev-Popov 路径积分量子化	114

3.3	Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化	120
3.4	Batalin-Fradkin-Vilkovsky 路径积分量子化	130
3.5	泛函积分形式与正则量子化间关系	137
3.6	本章小结	141
	参考文献	141
第 4 章	约束 Hamilton 系统的对称性质	144
4.1	正则变换的母函数和守恒量	145
4.2	规范变换生成元组合系数间关系	147
4.3	Noether 定理与 Noether 恒等式	152
4.3.1	Noether 定理与 Killing 方程间关系	152
4.3.2	经典 Noether 定理及其正则形式	153
4.3.3	连续介质中 Noether 定理及其正则形式	154
4.3.4	约束系统的正则 Noether 定理	157
4.3.5	正则 Noether 恒等式	159
4.3.6	非不变系统正则形式的广义 Noether 恒等式	161
4.3.7	量子守恒律	165
4.4	Poincaré-Cartan 积分不变量	168
4.4.1	非完整约束系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量	168
4.4.2	约束连续正规系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量	170
4.4.3	奇异系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量	173
4.5	Ward 恒等式	176
4.5.1	正则 Ward-Takahashi 恒等式	176
4.5.2	广义正则 Ward 恒等式	180
4.6	本章小结	184
	参考文献	184
第 5 章	规范对称性与 Dirac 猜想	187
5.1	约束系统的规范对称性质	187
5.1.1	奇异 Lagrange 量的动力学回顾	188
5.1.2	例	190

5.2 相空间 Noether 恒等式和 Dirac 猜想	194
5.2.1 关于 Dirac 猜想的提出	195
5.2.2 扩展正则 Noether 恒等式	196
5.2.3 相空间 Noether 恒等式的应用	198
5.3 高阶微商系统 Dirac 猜想的一个反例	200
5.4 本章小结	202
参考文献	203
第 6 章 约束 Hamilton 系统量子化及其对称性的应用	206
6.1 含 Maxwell-Chern-Simons 项 $(2+1)$ 维 CP^1 非线性 σ 模型 的分数自旋和分数统计性质	206
6.1.1 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化	207
6.1.2 Ward 恒等式	209
6.1.3 分数自旋和分数统计性质	211
6.2 分数量子 Hall 效应	212
6.2.1 分数量子 Hall 效应电阻量子化的规范论证	213
6.2.2 组合 Bose 子系统 (平均场理论)	215
6.2.3 含 Maxwell-Chern-Simons 项的组合 Fermi 子系统	224
6.3 光孤子的量子理论	228
6.3.1 光孤子系统的正则量子化	229
6.3.2 光孤子系统的路径积分量子化和量子守恒量	231
6.4 本章小结	233
参考文献	234
附录 A 张量	239
附录 B Darboux 定理	247
附录 C 泛函微商	249
附录 D Grassmann 代数 Bose-Fermi 括号	253
附录 E 李群和李代数	259

第 1 章 约束系统经典理论回顾

本章主要简单回顾了约束 Hamilton 系统的 Dirac 理论,说明了系统约束可分为第一类和第二类约束,给出 Dirac 括号的表达式.对 Dirac 猜想和规范变换生成元做了简要介绍.

在介绍约束 Hamilton 系统之前,让我们首先考虑一个简单的、典型的、有意义的转子实例,来说明量子化一个带有约束的动力学系统时会出现的基本问题.被约束在经典路径 $\vec{r}(t)$ 附近运动的一个粒子是把约束系统的处理理论与位形空间孤子理论联系起来最直接的实例^[1].为了把该路径整合到变量 R 的量子理论中,我们设定

$$\vec{R} = \vec{r}(f(q)) + \sum_a \vec{n}_a(f(q)) \eta_a, \quad (1.1)$$

其中时间 t 被变量 q 的函数 $f(q)$ 代替,变量 q 是广义坐标用来确定经典路径.单位矢量 $\vec{n}_a(f)$ 与切线矢量 $d\vec{r}/df$ 一起构成 $\vec{r}(f)$ 点的参考系,如图 1.1. η_a 是波动变量.同时,我们也知道一个约束是波动必须垂直于经典的运动轨迹,也就是 $\vec{n}_a \cdot d\vec{r}/df = 0$,这一约束将减少一个自由度(也就是,波动分量必须沿着经典轨迹).

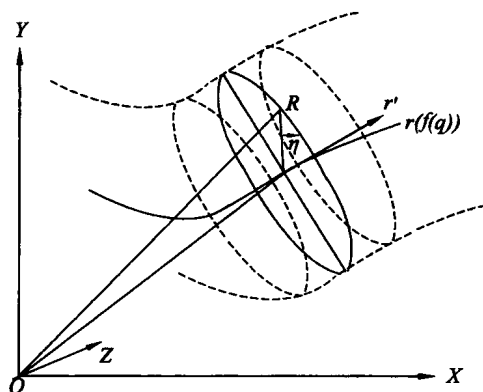


图 1.1 经典路径附近的量子运动的粒子

既然在已有的理论中引入了经典位形空间的扩展,从而增加了大量的自由度,并导致出现约束,于此我们将给出关于该主题简洁的介绍.对于处理约束的基本方法有两种.一种常用的方法引入了 Dirac 量子化,在该种方法中我们将处理偶数个自由度.另外一种方法,是由 Faddeev 和 Jackiw 近来给出的方法,主要思想是借助约束去除多余自由度^[2,3,4].这些量子化方法将在第 3 章进行阐述.本章主要讨论约束 Hamilton 系统的约束推导,第一类约束是规范变换生成元的 Dirac 猜想,以及规范变换生成元中组合系统间关系、Lagrange 乘子的变分及主方程等.

1.1 约束的产生

在经典力学中,约束是众所周知的.说到简单的实例让我们想起那些沿着具体路径运动的粒子,比如一个质量为 m_0 有一定初速度的粒子被限制在由函数

$$f(x, y, z) = z - ar^2 = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2)$$

定义的曲线上无摩擦运动.直接将牛顿运动方程应用于该实例很显然是不适应的,也就是不考虑约束,因为给出能够提供让粒子沿着具体路径运动的外力势是非常困难的.因此约束(1.2)式强制性地限制粒子坐标值 x, y, z 限制在具体路径上.假如路径曲线是处在重力场中具有重力势 $V = m_0gz$,我们将需要同时求解下面两个方程

$$m_0 \ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r}), \quad f(\vec{r}) = z - ar^2 = 0. \quad (1.3)$$

既然粒子是全时段沿着具体路线运动,所以约束也必须是全时段不变的,从而有

$$\frac{d}{dt}f(\vec{r}) = 0, \quad (1.4)$$

或者更高阶的时间微分都满足.假如抛物线的偏心率是随着时间变化而变化的,也就是 $a = a(t)$,那么约束将是显含时间的函数,此时含约束的动力学系统将变的比较复杂.在(1.2)式简单情况下,我们发现一个容易的方法,就是用约束将 z 表示为 x 和 y 的函数,将 z 表示为 x, y, x 和 y 的函数,并且我们可以尝试着对牛顿方程进行积分.因此我们是用约束来降低自由度,也就是 z .

如果我们来考虑更简单的情况,比如一个粒子被限制在 (x, y) 平面内半径为 a 的圆上运动,约束有

$$f(x, y) = r - a = 0. \quad (1.5)$$

当然,我们可以把它写为 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 并且用该约束来降低一维自由度,也就是 y . 但