云鹏考研·云鹏经典

Http://www.yunpengedu.com

人大、北大、清华等十余所高校
王牌专家团队联手打造

全国硕士研究生入学数学统一考试指导

2005最新考研

数学大串讲

【经济类】

主　编　曹显兵　黄先开

副主编　殷先军　施明存

名师辅导　命中率高

举一反三　触类旁通

全国考研辅导班指定教材

串讲班·冲刺班专用

中央民族大学出版社

云鹏考研系列经典教材

2005

全国硕士研究生入学数学统一考试指导

数学大串讲

【经济类】

主　编　曹显兵　黄先开
副主编　殷先军　施明存

中央民族大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新考研数学大串讲(经济)/曹显兵 黄先开 主编.
北京:中央民族大学出版社,2004.9
(全国硕士研究生入学数学统一考试指导)

ISBN 7-81056-949-X
Ⅰ.最...
Ⅱ.①曹...②黄...
Ⅲ.数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 088678 号

书　　名:最新考研数学大串讲

作　　者:曹显兵　黄先开
责任编辑:宁　玉
出 版 者:中央民族大学出版社
　　　　　北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编:100081
印 刷 者:河南省诚和印制有限公司
发 行 者:全国各地新华书店
开　　本:787×1092(毫米) 1/16　　印张:19.125
字　　数:490 千字
版　　次:2004 年 11 月第 1 版　2004 年 11 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 7-81056-949-X
定　　价:300.00 元(全 12 册)

前　　言

《最新考研数学大串讲》出版面世几年来，深受历届考生欢迎。今年我们名师团队更加精益求精，以更高的专业水准和更高的质量要求，倾力打造出最新版本，奉献给广大考生。

本书以作者多年考研辅导讲义为基础，结合作者对近年来考研命题动态的研究和考研辅导经验，倾心浓缩、提炼、编写而成。它完全依据的是《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，其目的是针对广大考生考前系统归纳、总结，和提炼知识要点、重点、考点的需要。对于已参加考前辅导班的考生，本书可作为课堂讲授的重要补充和完善；而对于未参加系统辅导训练的考生，本书则是了解专家辅导概貌不可多得的备考资料，因此，我们相信本书一定能对即将参加入学考试的广大考生有所裨益。

本书最大的特色就是：以学生为本，实战实用。

本书编排体例独特新颖，特点鲜明，具体如下：

考试内容与要求　简述最新考试大纲要求的基本概念、基本定理和基本方法。为了使考生能够完整、准确地把握命题范围和知识要求，本部分完全依据考试大纲一一对应地简述了考试内容与要求，作者认为这对于考前最后进行全面、系统的复习是必要的。

重要公式与结论　针对每一章节的考试内容，总结提炼重要的公式与结论。这部分一般不是教材中已有定理、公式的简单重复，而是从应试的角度，归纳出应注意的知识要点。特别是对一些重要的隐含条件，我们也作为重要公式与定理要求考生记忆，目的在于希望考生通过系统复习后，一见到此类问题时，就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识，而考生是否具备了这种能力，对考研取得成功和获得高分是至关重要的。

典型题型与例题分析　在分析历年考题的基础上，针对每一章节的已考题型和今后可能考查到的问题进行了分类解析，并给出了解题思路和规范的解题过程。值得指出的是，书中针对某些考点或知识点所作的评注，是典型题型与例题分

析的重要补充，评注有助于考生把握常考题型的典型处理方法和可能的扩展情形，并由此收到举一反三、触类旁通的功效。

在成书过程中，编者参考了众多的教材、教学辅导书和考研辅导书，收集、整理和重新编排了众多辅导资料中我们认为广大考生值得借鉴、掌握的典型例题和习题，在此向有关的作者表示衷心感谢！

由于时间仓促和编者水平有限，书中一定还存在许多不足之处，恳请读者和同行专家批评指正。

祝全国广大考生考研成功！

编　者

2004 年 11 月　北京

目　　录

第一部分　微积分

第二部分　线性代数

带“*”部分，数二学生不作要求。

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　微积分

第一讲　函数、极限、连续

§1　考试内容与要求

一、考试内容

函数的概念及表示法	设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x \in D$，按照一定的法则，变量 y 总有一个确定的值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 表示法：公式法、表格法、图形法等.
函数的有界性	设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，对于任意 $x \in \mathrm{I}$，恒有 $\vert f(x) \vert \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界.如果这样的 M 不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界.
函数的单调性	设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的.
函数的周期性	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.
函数的奇偶性	设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$(或 $-f(x)$)，则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.
复合函数	设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 为两个函数，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集，则由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.
反函数	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W.若对 $\forall y \in W$，$\exists$ 唯一确定的 $x \in D$，满足 $y = f(x)$，则得到 x 是 y 的函数，记为 $x = \varphi(y)$，称为 $y = f(x)$ 的反函数.
分段函数	在不同区间段上函数的表达式不一致的函数，称为分段函数.
隐函数	设有关系式 $F(x,y) = 0$，若对 $\forall x \in D$，存在唯一确定的 y 满足 $F(x,y) = 0$ 与 x 相对应，由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数.
基本初等函数的性质及其图形	幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 性质及其图形(略).
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

续表

简单应用问题的函数关系的建立	通过物理定律(如牛顿第二定律)、几何意义等建立函数关系式.
数列极限的定义	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,恒有 $\|x_n - A\| < \varepsilon$.
函数极限的定义与性质	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < \|x - x_0\| < \delta$ 时,恒有 $\|f(x) - A\| < \varepsilon$. 性质:① 唯一性:极限存在必唯一. ② 保号性:如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,而且 $A > 0$(或 $A < 0$),则存在点 x_0 的某一空心邻域,当 x 在该邻域内时,有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$). ③ 如果在 x_0 的某一空心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$),而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).
函数的左极限与右极限	若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在,记为 $f(x_0 - 0)$,称为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限; 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在,记为 $f(x_0 + 0)$,称为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限.
无穷小量与无穷大量的概念及其关系	设自变量 x 在某一变化过程中,如果 $\lim f(x) = 0$,则称在自变量 x 的该变化过程中,函数 $f(x)$ 为无穷小量;如果 $\lim f(x) = \infty$,则称在自变量 x 的该变化过程中,函数 $f(x)$ 为无穷大量. 其关系为: 若 $\lim f(x) = \infty$,则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0$; 若 $\lim f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$,则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.
无穷小的性质及无穷小的比较	性质:① 有限个无穷小量之和仍为无穷小量; ② 有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量; ③ 无穷小量乘有界变量仍为无穷小量; ④ $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中 $\lim \alpha(x) = 0$. 比较:设在自变量 x 的某一变化过程中,$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是无穷小量: (1) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小,记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; (2) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小; (3) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小; (4) 如果 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小,记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.
极限的四则运算	设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则 $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$, $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$, $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$,若 $\lim g(x) \neq 0$.

续表

极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则	准则Ⅰ：若存在 x_0 的某空心邻域，有 $$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x).$$ 成立，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. 准则Ⅱ：单调有界数列必有极限.
两个重要极限	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$（或 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$）.
函数间断点的类型	若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续，则称点 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点. 如果 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 均存在，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点； 若 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 中至少有一不存在，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.
初等函数的连续性	初等函数在其定义区间内必连续.
闭区间上连续函数的性质	设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 性质1（有界性）　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 性质2（最值定理）　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值. 性质3（介值定理）　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则对 $\forall c \in [m,M]$，必 $\exists \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi) = c$.

二、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立简单应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念.
6. 了解极限的性质，掌握极限的四则运算法则.
7. 了解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，会利用两个重要极限求极限.
8. 理解无穷小的概念和性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系. 会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判定函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质.

§2　重要结论与公式

一、函数的奇偶性、周期性与导数、积分的联系

（1）设 $f(x)$ 是可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数，且 $f'(0) = 0$；
　　设 $f(x)$ 是可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数.

（2）设 $f(x)$ 连续，

如 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数；

如 $f(x)$ 为奇函数，则对任意的 a，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 设 $f(x)$ 在$[-a,a]$上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数，} \\ 0, & f(x)\text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

(4) 可导的周期函数的导函数仍为同周期函数.

(5) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

二、在自变量不同变化过程中的函数极限及其联系

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$,

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$,

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

评注 由结论(3)、(4)知可利用函数极限求数列极限.

三、连续的隐含条件

如题中给了连续条件，应充分利用以下结论：

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

(2) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，且可构造 $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，对 $f(x)$ 在$[a,b]$上可应用最值、介值、零点定理.

四、两个重要极限的一般形式

(1) 设 $\alpha(x)\to 0$，则 $\lim \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$

(2) 设 $f(x)\to 1$，$g(x)\to\infty$，则

$$\lim f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)[f(x)-1]}$$

$$(\because \ln f(x) = \ln[1+f(x)-1] \sim f(x)-1)$$

五、无穷小量与有界变量之积为无穷小量

特例：设 $f(x)\to 0$，$g(x)\to\infty$，则

$\lim f(x)\sin g(x) = \lim f(x)\cos g(x) = \lim f(x)\arctan g(x) = \lim f(x)\mathrm{arccot}\, g(x) = 0$

六、极限存在准则及性质

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼定理.

设在 x_0 的某空心邻域内(或当 $|x|>X$ 时),有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,

且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

(3) 极限的局部保号性与有界性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

1) 则存在 x_0 的某空心领域,使得在该邻域内 $f(x)$ 有界;

2) 如果 $A>0$(或 $A<0$),则存在 x_0 的某空心领域,使得在此领域内有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$);

3) 如果在 x_0 的某空心领域内有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$);

注:对 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,也有如 1)、2)、3) 类似的结论.

4) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow \exists$ 无穷小量 $\alpha(x)$,使 $f(x)=A+\alpha(x)$.

七、无穷小量的等价替换

(1) 若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A$,则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A.$$

(2) 常见的等价无穷小

设 $\alpha(x)\to 0$,则

$\sin\alpha(x)\sim\tan\alpha(x)\sim\arctan\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim[e^{\alpha(x)}-1]\sim\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)$

$[1-\cos\alpha(x)]\sim\dfrac{1}{2}[\alpha(x)]^2$,$[1+\alpha(x)]^k-1\sim k\alpha(x)(k\neq 0)$.

八、常见的极限不存在的函数

(1) 无穷大量是极限不存在的一种形式;

(2) 设 $\alpha(x)\to\infty$,则下列函数的极限不存在:

$$\sin\alpha(x),\cos\alpha(x),e^{\alpha(x)},\arctan\alpha(x),\operatorname{arccot}\alpha(x).$$

§3　典型题型与例题分析

一、求函数极限

【解题提示】 对于未定式的极限,先利用以下方法进行化简:

(1) 提出极限不为零的因子;

设 $\lim g(x)=A\neq 0$,则 $\lim g(x)f(x)=A\lim f(x)$.

(2) 等价无穷小替换;

(3) 变量替换;

然后再利用洛必达法则或其他方法.

题型一　求“$\dfrac{0}{0}$”与“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限

方法

(1) 洛必达法则

(2) 利用导数定义

设 $f'(x_0)$ 存在：如果 $\lim u(x)=0$，则

$$\lim \frac{f[x_0+u(x)]-f(x_0)}{u(x)}=f'(x_0);$$

如果 $\lim u(x)=x_0$，则 $\lim \dfrac{f[u(x)]-f(x_0)}{u(x)-x_0}=f'(x_0)$.

例 1 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} e^t f(1+e^{x^2}-e^t)dt}{x^2\ln\cos x}$.

分析 由已知，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，有 $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)}{u-1}=1$.

当 $x\to 0$ 时，$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$.

令 $1+e^{x^2}-e^t=v$，$\int_0^{x^2} e^t f(1+e^{x^2}-e^t)dt=\int_1^{e^{x^2}} f(v)dv$，含有变限积分，应考虑用洛必达法则.

解
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{e^{x^2}} f(v)dv}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{e^{x^2}} f(v)dv}{x^4}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{4x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})}{x^2}(提出\lim_{x\to 0}e^{x^2}=1)$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=-f'(1)=-1.$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t})dt}{(1+\cos x)\int_0^x\ln(1+t)dt}$.

分析 先提出非零因子 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$. 当 $x\to 0$ 时，含有 $\sin\dfrac{1}{x}$，$\cos\dfrac{1}{x}$ 等项时，往往不能直接用洛必达法则，须利用无穷小量乘有界变量.

解
$$原式=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t})dt}{\int_0^x\ln(1+t)dt}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[3\frac{\sin x}{x}+x\cdot\cos\frac{1}{x}\right]=\frac{3}{2}.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x[\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)]}$.

分析 先利用等价无穷小简化：

$$e^x-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)\sim x-\sin x,\quad \lim_{x\to 0}e^{\sin x}=1,$$

$$\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)=\ln[(1+x^2-x)(1+x^2+x)]$$
$$=\ln[(1+x^2)^2-x^2]=\ln(1+x^2+x^4)\sim x^2+x^4\sim x^2,$$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(2e^{-x}+x+1)}{\sqrt{x^2+x\sin x-1}}$.

分析 $\ln(2e^{-x}+x+1)=\ln e^{-x}\left(2+\dfrac{x}{e^{-x}}+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)=-x+\ln\left(2+\dfrac{x}{e^{-x}}+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)$,

且 $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\left(2+\dfrac{x}{e^{-x}}+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)=\ln 2$, $\sqrt{x^2+x\sin x-1}=-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}\sin x-\dfrac{1}{x^2}}$,

且 $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}\sin x-\dfrac{1}{x^2}}=1$.

解
$$原式=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x+\ln\left(2+\dfrac{x}{e^{-x}}+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}\sin x-\dfrac{1}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x+\ln\left(2+\dfrac{x}{e^{-x}}+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)}{-x}=1.$$

注:“$\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式是利用洛必达法则求极限的基本题型,但在求此类极限时,应注意下面几点:

1° 含有典型极限不存在的因子一般不先用洛必达法则.

2° 每用一次洛必达法则,应整理,极限不为零的因子先求出.

3° 优先考虑等价无穷小代换,以简化运算.

4° 含有变限积分的求极限问题,一般利用洛必达法则和积分学中值定理,去掉积分号.

题型二 求“$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$”型的极限

方法

利用通分或变换化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限.

例 5 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

分析 对于“$\infty-\infty$”、“$0\cdot\infty$”型的极限,常利用变量代换化为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”或“$\dfrac{0}{0}$”型的极限.

解 (1) 令 $x=\dfrac{1}{t}$,原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}-2}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2-2(1-t^2)}{3(1-t^2)t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{3(1-t^2)}=\frac{2}{3}.$$

(2) 令 $x=\dfrac{1}{t}$,原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos\ln(1+3t)\cdot\dfrac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\dfrac{1}{1+t}}{1}$$

$$= 3-1=2.$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq 0$，

求极限 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{(x-a)f(a)}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}\right]$.

解 原式 $=\dfrac{1}{f(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$

$$=\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$$

$$=\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}+f(x)},$$

又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$， $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，

所以，原式 $=\dfrac{1}{f(a)}\cdot\dfrac{f'(a)}{f(a)+f(a)}=\dfrac{f'(a)}{2f^2(a)}$.

评注 1° 对于极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$（利用洛必达法则）

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{f(x)+f(x)+(x-a)f'(x)}=\frac{f'(a)}{2f(a)}.$$

这样求极限是错误的，因为这里利用了 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$，而已知条件并没有给出极限 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 存在. 如已知条件给出 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则可以这样求解.

2° 一般情况下，"$0\cdot\infty$"和"$\infty-\infty$"型未定式，通常利用下面的方法化为"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"：

$$0\cdot\infty=\frac{0}{\dfrac{1}{\infty}}=\frac{\infty}{\dfrac{1}{0}},\quad \infty-\infty=\frac{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty\cdot\infty}}.$$

3° 利用变量代换化简运算也是求极限的一种重要方法.

题型三 求"1^∞、0^0、∞^0"型的极限

方法

(1) 对于这三种类型的极限，可利用对数恒等式先化为"$0\cdot\infty$"型的极限，再化为"$\dfrac{0}{0}$"型或

“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限.

$\lim f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$

$\lim g(x)\ln f(x)$ 是“$0\cdot\infty$”型的极限.

(2) 对于“1^{∞}”型，有 $\lim f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)[f(x)-1]}$.

例 7 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 令$\frac{1}{x}=t$，

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{t\to0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}\\
&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}(2\cos 2t-\sin t)}\\
&=\mathrm{e}^{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{或原式}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x}\\
&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x}=\mathrm{e}^{2}
\end{aligned}
$$

例 8 曲线 $y=\tan^{n}x$ 在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处的切线在 x 轴上的截距为 x_n，求$\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)$.

解 由于 $y'=n\tan^{n-1}x\sec^{2}x$，所以 $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2n$，切线方程为 $y-1=2n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，因此，

$$x_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n},\quad y(x_n)=\tan^{n}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right)=\left[\frac{1-\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}\right]^{n}=\left[1+\frac{-2\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}\right]^{n},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n\tan\frac{1}{2n}}{1+\tan\frac{1}{2n}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2n\times\frac{1}{2n}\right)}=\mathrm{e}^{-1}$.

> **评注** 对“1^{∞}、0^{0}、∞^{0}”型未定式，可先取对数，如令 $y=f(x)^{g(x)}$，$\ln y=g(x)\ln f(x)$ 则 $\lim g(x)\ln f(x)$ 为“$0\cdot\infty$”型未定式.

二、求数列极限

题型一 利用函数极限求数列极限

方法

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 9 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq0$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\right]^{n}$

分析 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a+\frac{1}{n}-a\right)f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi)=f(a)$，$a\leqslant\xi\leqslant a+\frac{1}{n}$，所以，该极限为“$1^{\infty}$”型.

解 先求极限$\lim\limits_{x\to0^{+}}\left[\frac{\frac{1}{x}\int_a^{a+x}f(t)\mathrm{d}t}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{x}\int_a^{a+x}f(t)\mathrm{d}t-f(a)}{xf(a)}}$

$$= e^{\frac{1}{f(a)} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_a^{a+x} f(x)\mathrm{d}t - xf(a)}{x^2}}$$

$$= e^{\frac{1}{f(a)} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(a+x)-f(a)}{2x}} = e^{\frac{f'(a)}{2f(a)}}.$$

令 $x = \dfrac{1}{n}, n \to \infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\right]^n = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)\mathrm{d}t}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f'(a)}{2f(a)}}.$$

评注 1° 借助于函数极限求数列的极限是求数列极限的一种非常有用的方法，化为函数极限后，便可以利用洛必达法则.

2° 含有变限积分的求极限问题，通常借助于洛必达法则实现对变限积分的求导.

题型二 利用极限收敛准则求数列极限

方法

(1) 单调有界数列必有极限；

(2) 夹逼定理.

例 10 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, n = 1,2,3,\cdots$，

求(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$， (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$.

解 (1) 先证明 $x_n > 0$.

由 $x_1 > 0$，设 $x_n > 0$，则 $x_{n+1} = 1 - e^{-x_n} > 0$，

所以，由数学归纳法得 $x_n > 0, n = 1,2,3,\cdots$.

容易证明：当 $x > 0$ 时，$1 - e^{-x} < x$.

因为 $x_n > 0$，所以，$x_{n+1} = 1 - e^{-x_n} < x_n$，

即数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界，所以，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由于 $x_n > 0$，因此，$A \geqslant 0$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - e^{-x_n})$，即有 $A = 1 - e^{-A}$，如果 $A > 0$，则

$A = 1 - e^{-A} < A$，出现矛盾，因此，$A = 0$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n(1 - e^{-x_n})}{x_n - 1 + e^{-x_n}}$

先求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-e^{-x})}{x - 1 + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x - 1 + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{1 - e^{-x}} = 2$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n(1 - e^{-x_n})}{x_n - 1 + e^{-x_n}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-e^{-x})}{x - 1 + e^{-x}} = 2.$$

例 11 设 $a_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,k, a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a$.

证明 由于 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，