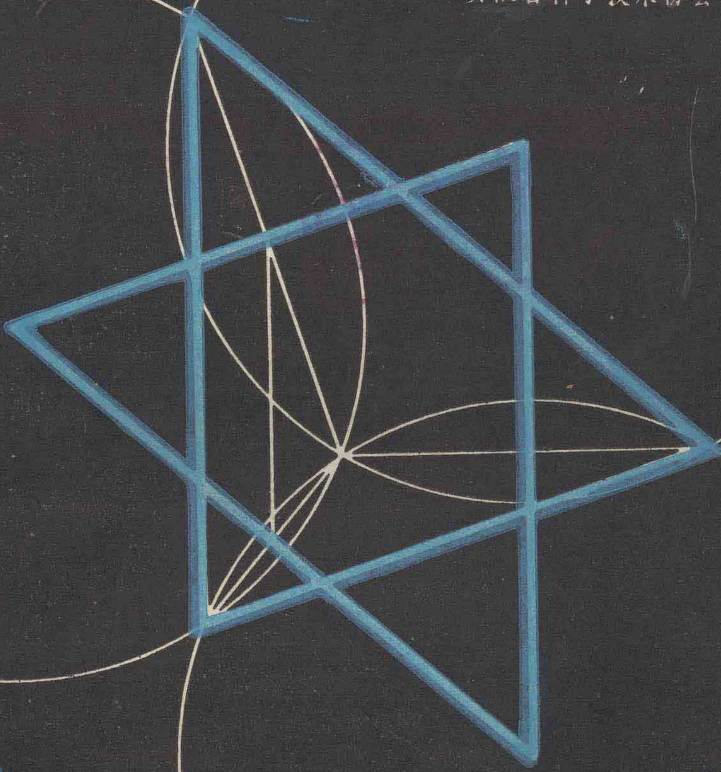
安徽省数学学会编

安徽省科学技术协会印



莫斯科
奥林匹克数学竞赛试题集

国外数学竞赛丛书

（5）

莫斯科
奥林匹克数学竞赛试题集

（1935—1964）

程　　　龙 译

张春炎·丁耀仁 校

会编

安徽省科学技术协会

1979年10月·合肥

Под редакцией В·Г·БОЛТЯНСКОГО
Составитель, автор указаний и решений А·А·ЛЕМАН

СБРНИК ЗАДАЧ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1965

国外数学竞赛丛书之五

莫斯科奥林匹克数学竞赛试题集

翻　　译　程　　　　龙
校　　对　张春炎　丁耀仁
封面设计　薛　　　　凌
印刷装订　合肥报印刷厂

☆

开本：787×1092毫米 1/32 印张：7
1979年10月印刷

目　　录

第一部分　试　题

第二部分 解 题

第一部份　试题

第　一　届（1935年）

第　一　试

1）火车通过观察者身边需 t_1 秒，通过 l 米长的桥需时 t_2 秒。（火车通过桥是指火车头进入桥直至火车尾离开桥）试求火车的长度与速度。

2）求作一个正方形：使其三个顶点分别在三条已知的平行线上。

3）已知一个正四棱锥底面边长为a，它的顶点的平面角等于侧棱与底面的夹角。试求这正四棱锥的体积。

第　二　试

A　部

1）已知三点分别是某一三角形的外接圆与由同一顶点引出的中线、角的平分线、高线的交点。求作这个三角形。

2）在正方体的表面上求这样的点，使其对某一条对角线的视角最小。

B　部

1）下面方程组具有多少组实数解？

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

2）解方程组：

$$\begin{cases} x^3-y^3=2b, \\ x^2y-xy^2=b. \end{cases}$$

3）求和：

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3.$$

C 部

1）用六种不同的颜色来涂正方体的六个面，使不同的面有不同的颜色，问有多少种涂法？（当旋转正方体时，得到的涂法不同，才算是不同的涂法。）

2）把数n表示成三个正整数和的形式有多少种方法？

3）记号：M（a,b,c,…,k）及D（a,b,c,…,k）分别表示数a,b,c,…,k的最小公倍数与最大公约数。

证明：

① $M(a,b)\cdot D(a,b)=ab$

② $$\frac{M(a,b,c)\cdot D(a,b)\cdot D(b,c)\cdot D(a,c)}{D(a,b,c)}=abc$$

第 二 届（1936年）

第 二 试

1）解方程组：

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^5+y^5=b^5. \end{cases}$$

2）已知一个小于180°的角及角外一点P，过P点求作一条直线使它和已知角所截得的三角形的周长为定值。

3）如果x，y，z均为整数，且有：$x^2+y^2=z^2$。证明：xy能被12整除。

4）将一百万写成三个因数的乘积能够有多少种写法？

第　三　届（1937年）

第　一　试

1）解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

2）已知直线L及在L同侧的两点A、B，试在直线L上求一点M，使得和MA＋MB等于给定的长。

3）两条线段沿着两条异面直线上滑动。证明：由这两条线段的端点为顶点的四面体的体积为一定值。

第　二　试

1）给定不在同一条直线上的三点，试过其中每两点作一个圆，使得由这三个圆的交点所作圆的切线互相垂直。

2）在空间位置给定一个正十二面体。试问：作平面与正十二面体相截所得截面是正六边形，有多少种方法？

3）如果某一n边形的任何三条对角线都不交于一点。试问：这个n边形被它的对角线分成多少部分？

第 四 届（1938年）

第 二 试

1）已知空间三点O_1，O_2，O_3和A点。

点A关于O_1的对称点是A_1，A_1关于O_2的对称点是A_2，A_2关于O_3的对称点是A_3。将A_3按上法再关于O_1，O_2，O_3，顺次取对称点。证明：最后必将得到某一对称点与A重合。

2）n个平面能够将空间分成多少个部分？

3）已知底边，高以及底边上两角之差。求作三角形。

4）小于1000的整数中，有多少个数既不能被5整除，又不能被7整除？

第 五 届（1939年）

第 一 试

1）解方程组：

$$\begin{cases} 3xyz-x^3-y^3-z^3=b^3, \\ x+y+z=2b, \\ x^2+y^2-z^2=b^2. \end{cases}$$

2）证明： $\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi=-\frac{1}{2}$.

3）已知三点A、B、C，试过点A作一条直线，使得点B、C到这条直线距离之和等于给定的长度。

4）解方程：$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$。

5）证明：任意三角形的角的平分线位于由同一顶点引出的中线与高线之间。

第　二　试

1）在整有理数范围内分解因式：

$a^{10}+a^{5}+1$。

2）已知两个关于 x 的整系数多项式的乘积是偶系数的多项式，但不是所有系数都能被 4 整除。证明：这两个已知多项式其中之一的所有系数均为偶数，而另一个至少有一个系数是奇数。

3）给定两点A，B和一个圆。试在圆周上找一点 X，使得直线AX，BX与圆相截得到弦CD和已知直线MN平行。

4）试求下式被 7 除的余数：

$10^{10}+10^{(10^{2})}+10^{(10^{3})}+\cdots+10^{(10^{10})}$。

5）从正棱锥的底面上任一点P 作底面的垂线，证明：这条垂线与各侧面所在的平面的交点到P 点的诸线段之和为一定值。

6）试问五个球至多能把空间分成几部分？

第　六　届（1940年）

第　一　试

七——八年级

1）分解因式：

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3.$$

2）轮船由高尔基城到阿斯特拉罕需要五天，而由阿斯特拉罕到高尔基城需要七天。那么木排从高尔基城顺水到阿斯特拉罕需要几天？

3）从1到100所有整数的连乘积的末尾有多少个零？

4）以定长为半径试作一个圆，使这个圆切于已知直线和切于一定圆。并讨论这个问题有多少解？

九——十年级

1）解方程组：

$$\begin{cases}(x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5,\\ x+y=b.\end{cases}$$

2）从1开始连续地写出所有整数，这样就得到下面的字码数列：123456789101112131415…试确定第206788位是什么数码？

3）求作一圆，使其和平面上的四点等远。并讨论问题有多少解？

4）在平面上有两条已知直线，求到这两条直线距离之差等于定长的点的轨迹。

5）从1到n的所有整数的乘积叫做数n的阶乘。试问：哪些三位数它等于自己数码阶乘的和？

第　二　试

七——八年级

1）求一个四位数：它是某一个数的完全平方数，其开始两个字码相同，其结尾的两个字码也相同。

2）在正三角形ABC的外接圆周的$\overset{\frown}{AB}$上任取一点D。证明：$AD+BD=CD$。

3）请你用给定的非正规形状的四边形来铺好地板。也就是说：用给定的相同的四边形来复盖整个平面，使得平面没有空隙也不重叠。

4）在1和1000之间有多少对这样的整数x、y，使得：x^2+y^2 能被49整除？

九——十年级

1）在侧面展开角等于α的无限圆锥的侧面上取一点，从这点出发在圆锥侧面上向两个方向引延伸线，使得圆锥侧面展开时它变成直线段。试确定这条线在圆锥侧面上自身相交的交点数。

2）$300!$与100^{300}哪一个大？

3）设$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为O，以$\triangle ABC$的每一边为对称轴分别得到O点的对称点O_1，O_2，O_3。保留三点O_1，O_2，O_3。将其余的点线擦去.试以这三点作出原来的$\triangle ABC$。

4）证明不等式：

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

（a_1，a_2，…，a_{n-1}，a_n均为正数）

5）有多少个小于10000的正整数x，使得2^x-x^2能被7整除？

第 七 届（1941年）

第 一 试

七—八年级

1）已知同一顶点引出的高和中线，以及外接圆的半径。求作一个三角形。

2）将523…后面续写三个数码使得到的六位数能被7、8和9整除。

3）给定一个四边形，其四边中点顺次是A，B，C，D.对角线中点分别是P，Q。证明：△BCP≌ADQ。

4）过圆外一点作圆的无数条割线，试求这些割线与圆相截所得的弦的中点轨迹。

5）证明：任意四个连续整数的乘积与1的和是一个完全平方数。

九—十年级

1）同七—八年级的试题2。

2）以平行四边形的每边向外作正方形。证明：以这四个正方形的中心为顶点得到的四边形也是正方形。

3）如果整系数多项式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

当$x=0$和$x=1$时取奇数值。证明：多项式没有整数根。

4）已知△ABC的高AM及BN的垂足M点和N点，以及

AB边所在的直线，求作三角形ABC。

5）解方程：

$$x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$$

6）方程：$\sin x=\dfrac{x}{100}$ 有多少个根？

第　二　试

七——八年级

1）证明：由五对大小不同的正方形不能拚成一个矩形。

2）给定△ABC，怎样把这三角形分割成尽量少的部份，使得翻转这些部分的各边后所重新拚得的三角形与原三角形ABC一样。

3）在已知△ABC内有一点M，点M平行于边BC运动到达边CA上，再平行于边AB运动到达边BC上，然后再平行于CA运动……如此一直下去。证明：经过有限次这样的步骤后，它又返回到初始位置。并求返回到初始位置需要经过多少次这样的步骤？

4）如果 $(x-a)(x-10)+1$ 能够分解成两个多项式 $(x+b)\cdot(x+c)$ 的乘积。（这里 b 和 c 都是整数）。试求整数a。

5）证明：任何$P>3$的质数的平方，被12除时余数是1。

6）已知三角形的重心关于三边的对称点分别是H_1，H_2，H_3。求作这个三角形。

九——十年级

1）证明：由六对边长不同的正方形不能拚成一个矩形。

2）在平面上有某些点，已知其中任何三点都可能包含在某一半径等于1的圆内。证明：所有这些点也一定能够包含在某一半径为1的圆内。

3）试求不为0且互不相等的整数a，b，c。使得：

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

能够分解成两个整系数多项式的乘积。

4）求下面方程的整数解：

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

5）在空间给定两条互相垂直的异面直线，求端点在两条异面直线上滑动的定长线段的中点轨迹。

6）已知两条直角边上中线的长，求作直角三角形。

第 八 届（1945年）

第 一 试

七——八年级

1）$a^{128}-b^{128}$除以$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$。

2）对任何正整数n，证明：和式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

大于$\frac{1}{2}$。

3）某个两位数与颠倒其字码顺序所得到的数之和是一个完全平方数。试求出所有这样的两位数。

4）证明：不等边三角形不能分割成两个全等的三角形。

5）作两个互相外切的圆的外公切线，连结四个切点得到一个四边形。证明：这个四边形对边的和相等。

九——十年级

1） $a^{2^k}-b^{2^k}$除以

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}}).$$

2）求具有这样性质的三位数：它的所有整数次方的最后三个数码仍是原来的三位数。（其数码顺序也相同）

3）二元二次方程组：

$$\begin{cases}x^2-y^2=0,\\(x-a)^2+y^2=1.\end{cases}$$

一般说来，它具有四组解。现问：当a为何值时，方程组的解减少到三组？减少到二组？

4）直角三角形ABC在平面内作如下运动，它的两个顶点B和C沿着平面上的一个直角的两边滑动。证明：点A的轨迹是一条线段。并求这条线段的长。

第 二 试

七——八年级

1）给定六个数码：0，1，2，3，4，5。求由这六个数码可能组成的所有四位偶数之和。（同一个数码可以在数里重复出现）

2）用厚纸剪两个全等的多边形，将其重合后用大头针在

某一点将他们连结起来，当其中一个多边形以大头针为轴旋转$25°30'$时，它又重新和第二个多边形重合。试问具有上述性质的多边形可能的最少边数是多少？

3）把平行四边形ABCD的边AD分成n等份，设第一个分点为P，连结BP交对角线AC于Q。证明：$AQ=\frac{AC}{n+1}$。

4）若△ABC的顶点为A，B，C，在其对边上分别任取点A′，B′，C′。连结AA′，BB′，CC′。证明：AA′，BB′ CC′的中点不在一条直线上。

九——十年级

1）求下面方程的整数解：

$$xy+3x-5y=-3.$$

2）已知数a_1，a_2，…，a_n中某些数等于1，其余的等于－1。证明：

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=$$

$$=a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\cdots+a_n\sqrt{2}}}}.$$

特别地，当$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$时，有：

$$2\sin\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}.$$

3）半径等于某个正三角形高的圆周在这个正三角形的一边上滚动。证明：三角形两边所截圆的弧总是等于60°。