

北大版

全国高等教育自学考试专家指导丛书

高等数学(一)微积分考试指导与模拟试题

第2版

姚孟臣 编著

公共课



北京
大学

全国高等教育自学考试专家指导丛书

公 共 课

高等数学(一)微积分 考试指导与模拟试题

(第 2 版)

姚孟臣 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)微积分考试指导与模拟试题(第2版)/姚孟臣编著. —北京:北京大学出版社,2000.8

(全国高等教育自学考试专家指导丛书·公共课)

ISBN 7-301-04627-8

I. 高… II. 姚… III. 高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 40366 号

书 名: 高等数学(一)微积分考试指导与模拟试题(第2版)

著作责任者: 姚孟臣 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-04627-8/O·0480

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京高新特打字服务社 51736661

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

850×1168 32 开本 11.75 印张 310 千字

2000 年 8 月第 1 版 2005 年 3 月第 2 版

2005 年 3 月第 1 次印刷(总第 4 次印刷)

印 数: 16001—19000 册

定 价: 18.00 元

出版前言

高等教育自学考试,是以国家考试为主导、个人自学为基础、社会助学为重要条件的新的高等教育形式。在高等教育自学考试大纲、教材和考试命题逐渐统一后,为适应自学考生和多层次法学教育的需要,引导自学考试者深入全面地理解课程的内容,掌握正确的学习方法,提高自学考试水平,我们请全国自学考试大纲与教材的主编、副主编或多年从事本学科教学与自学辅导的有经验的教师编写了这套《全国高等教育自学考试专家指导丛书》。

本套丛书与考试要求相结合,以教育部颁布的各学科自学考试大纲和教育部指定的统编教材为依据,注意按全国统一命题考试的要求与形式进行辅导,在掌握基本知识、基本理论、基本技能的基础上,侧重于培养考生的分析、写作与答题能力。各书力求内容简要、文字简练、体例合理、层次清楚、释义准确,注意重点、难点、疑点的分析讲解,阐述通俗易懂、深入浅出,题型与答案示例齐全,覆盖面广,有利于考生对本门课程的理解和掌握。

我们希望本套丛书的出版,对参加自学考试的读者提供一定的帮助,同时也希望读者对本套丛书提出宝贵意见并及时反映给我们,以使本套丛书更为完善。

北京大学出版社

2000年8月

序 言

为了帮助参加全国高等教育自学考试的考生能够全面、系统地复习高等数学内容,根据全国高等教育自学考试指导委员会颁发的《高等数学(一)微积分自学考试大纲》、《高等数学(二)自学考试大纲》和全国高等教育自学考试指导委员会高等数学题库建设研究组编写的《高等数学考核目标》,结合编者长期从事高等数学题库建设和命题的经验体会,针对参加自学考试考生的特点,我们编写了这套高等教育自学考试《高等数学考试指导与模拟试题》(共两册)。鉴于目前“高等数学(一)微积分”是经济管理专业专科学历规定的一门必修课程,而“高等数学(二)”是经济管理专业本科学历规定的一门必修课程,我们分别冠以《高等数学(一)微积分考试指导与模拟试题》(第二版)、《高等数学(二)考试指导与模拟试题》(第二版)分两册出版。

本册是《高等数学(一)微积分考试指导与模拟试题》。

本书按照考试大纲的要求分为六章,每一章由以下六部分构成:

一、考核的知识点——简明扼要的告知广大考生每一章要考核的知识点。

二、考核的基本要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么,掌握到什么程度就可以了。在编写过程中,根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的加以细化、归纳和总结,使广大考生能够正确把握考试要求。

三、复习要点——这部分根据考试大纲的要求将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要的叙述、归纳和总结,使得考生能够

在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行了复习,全面、系统地掌握所需要的知识,在考试时能够拿得出、用得上。

四、典型例题分析——这部分是编者根据自学考试大纲的要求精心选择和编排的,其内容涵盖了自学考试要求的全部考核知识点,并且突出了重点要求,强调了基本内容和基本运算,并总结了各种典型题型解题的规律、方法及技巧,开阔了考生的解题思路,使考生所学的知识能够融会贯通,并迅速提高考生的综合解题能力。

五、练习题——我们是在深入研究历年自考试卷的结构、知识点及难度的分布的基础上,并紧密结合我们命题实践、阅卷过程中常见问题及在全国各大城市“自考辅导班”辅导的经验来编好每一道练习题。因此,在每一章里都从不同角度选择了具有多种风格的题目,基本上涵盖了全部命题思路,考生做这些习题能够达到实际考试效果。

六、练习题解答与分析——这部分是对练习题中各种类型题目先给出分析,再给出简明的提示或解答,以帮助考生在做题有困难时参考,同时,也可使考生通过这里的解题分析,提高应试能力。

在附录一中,我们给出的五套模拟试题是按照正规试卷的题目类型、知识点及难度的分布情况编写的,其内容覆盖了大纲中所有的基本要求。对于填空题、选择题给出了答案,而对于解答题我们则做了详细解答。在附录二中,我们给出了高等数学(一)微积分两套样卷及参考答案。在附录三中,我们还给出了2002至2004年全国高等教育自学考试高等数学(一)的五套统考试题及解答。这样做的目的是,一方面使得广大考生了解试卷的结构,做到心中有数;另一方面,通过解答模拟试题和统考试题,及时发现问题、找出薄弱环节,进行有针对性的复习,进一步提高广大考生的应试能力。

我们相信考生通过本书的学习,不仅有助于熟悉和掌握高等

数学自学考试大纲的内容和要求,同时通过一定数量题目的练习,一定会更好地理解 and 掌握有关的基本概念及解题方法,还能够培养和提高逻辑推理能力以及综合运用所学的知识分析和解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心。

本书是经济管理类各专业应试者参加自学考试、学历文凭考试以及电大注册视听生考试的一部复习与考试指导用书,同时对于在校的本科生、大专生,成人高等专科学校及民办高校的学生也是一本较好的参考书。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编者

于北京大学中关园

2004年12月18日

目 录

| | |
|-------------------------|------|
| 第一章 函数及其图形 | (1) |
| 一、考核的知识点 | (1) |
| 二、考核的基本要求 | (1) |
| 三、复习要点 | (2) |
| (一) 重要概念及性质 | (2) |
| (二) 重要定理及公式 | (14) |
| (三) 重要方法 | (15) |
| (四) 重点与难点 | (19) |
| 四、典型例题分析 | (20) |
| 五、练习题 | (24) |
| 六、练习题解答与分析 | (28) |
| 第二章 极限和连续 | (35) |
| 一、考核的知识点 | (35) |
| 二、考核的基本要求 | (35) |
| 三、复习要点 | (36) |
| (一) 重要概念及性质 | (36) |
| (二) 重要定理及公式 | (46) |
| (三) 重要方法 | (48) |
| (四) 重点与难点 | (50) |
| 四、典型例题分析 | (50) |
| 五、练习题 | (58) |
| 六、练习题解答与分析 | (61) |

| | |
|-------------------------------|-------|
| 第三章 一元函数的导数和微分 | (72) |
| 一、考核的知识点 | (72) |
| 二、考核的基本要求 | (72) |
| 三、复习要点 | (73) |
| (一) 重要概念及性质 | (73) |
| (二) 重要定理及公式 | (80) |
| (三) 重要方法 | (82) |
| (四) 重点与难点 | (85) |
| 四、典型例题分析 | (85) |
| 五、练习题 | (90) |
| 六、练习题解答与分析 | (94) |
| 第四章 微分中值定理和导数的应用 | (108) |
| 一、考核的知识点 | (108) |
| 二、考核的基本要求 | (108) |
| 三、复习要点 | (109) |
| (一) 重要概念及性质 | (109) |
| (二) 重要定理及公式 | (110) |
| (三) 重要方法 | (114) |
| (四) 重点与难点 | (119) |
| 四、典型例题分析 | (119) |
| 五、练习题 | (123) |
| 六、练习题解答与分析 | (126) |
| 第五章 一元函数积分学 | (144) |
| 一、考核的知识点 | (144) |
| 二、考核的基本要求 | (144) |
| 三、复习要点 | (145) |
| (一) 重要概念及性质 | (145) |

| | |
|----------------------------|-------|
| (二) 重要定理及公式 | (152) |
| (三) 重要方法及应用 | (158) |
| (四) 重点与难点 | (170) |
| 四、典型例题分析 | (170) |
| 五、练习题 | (183) |
| 六、练习题解答与分析 | (189) |
| 第六章 多元函数微积分 | (220) |
| 一、考核的知识点 | (220) |
| 二、考核的基本要求 | (220) |
| 三、复习要点 | (221) |
| (一) 重要概念及性质 | (221) |
| (二) 重要定理及公式 | (227) |
| (三) 重要方法 | (232) |
| (四) 重点与难点 | (239) |
| 四、典型例题分析 | (239) |
| 五、练习题 | (246) |
| 六、练习题解答与分析 | (249) |
| 附录一 | |
| 模拟试题一及参考答案 | (264) |
| 模拟试题二及参考答案 | (273) |
| 模拟试题三及参考答案 | (280) |
| 模拟试题四及参考答案 | (287) |
| 模拟试题五及参考答案 | (295) |
| 附录二 | |
| 高等数学(一)微积分样卷(一)及参考答案 | (303) |
| 高等数学(一)微积分样卷(二)及参考答案 | (309) |

附录三

| | |
|---|-------|
| 2002 年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(一)试卷及参考答案 | (314) |
| 2002 年下半年高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(一)试卷及参考答案 | (324) |
| 2003 年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(一)试卷及参考答案 | (334) |
| 2003 年下半年高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(一)试卷及参考答案 | (344) |
| 2004 年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(一)试卷及参考答案 | (354) |

第一章 函数及其图形

一、考核的知识点

1. 一元函数的定义及其图形；
2. 函数的表示法(包括分段函数)；
3. 函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性；
4. 反函数及其图形；
5. 复合函数；
6. 初等函数；
7. 经济学中常见的几种函数.

二、考核的基本要求

1. 理解一元函数的定义及函数与图形之间的关系,会求函数的定义域、值域,能够判断函数是否相同；

2. 了解函数的几种常用表示法,理解分段函数的概念；

3. 理解函数的四个基本性质：单调性、有界性、奇偶性和周期性；

4. 理解反函数的概念,会求直接函数的反函数及其定义域、值域等；

5. 理解复合函数的概念,能够正确分析复合函数的复合过程,会求复合函数的定义域；

6. 熟练掌握基本初等函数及其图形的性态,知道什么是初等函数；

7. 知道几种常见的经济函数,能从比较简单的实际问题建立函数关系.

三、复习要点

(一) 重要概念及性质

1. 函数

(1) 函数的概念

定义 1.1 设 X 是一个给定的数集, f 是一个确定的对应关系. 如果对于 X 中的每一个元素 x , 通过 f 都有 \mathbf{R} 内的惟一确定的一个元素 y 与之对应, 那么这个关系 f 就叫做从 X 到 \mathbf{R} 的**函数关系**, 简称为**函数**, 记为

$$f: X \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{或} \quad f(x) = y.$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in \mathbf{R}$ 叫做 f 在 x 处的**函数值**, 记作 $y = f(x)$. 并把 X 叫做函数 f 的**定义域**, 记为 D_f ; 而 f 的全体函数值的集合

$$Y = \{f(x) | x \in X\}$$

叫做函数 f 的**值域**, 记为 R_f .

今后我们把函数用

$$y = f(x), \quad x \in X$$

来表示. 并说 y 是 x 的函数, 其中 x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**. 由于在我们讨论的范围内, 函数 f 和函数值 $f(x)$ (即 y) 没有区分的必要, 因此通常把 y 叫做 x 的函数.

一般地, 当 $f(x)$ 是用 x 的表达式给出时, 如果不特别声明, 那么函数的定义域就是使 $f(x)$ 有意义的全体 x 的集合, 通常称它为**自然定义域**.

除了用字母“ f ”表示函数以外, 当然也可以用其他的字母, 例如, 用“ F ”, “ φ ”等等来表示函数, 甚至可以用 $y = y(x)$ 来表示一个函数. 但在同一个问题中不同的函数一定要用不同的符号来表示.

在定义中, 我们用“惟一确定”来表明所讨论的函数都是单值的. 所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个值 x , 都有一个而且只有一个 y 的值与之对应的函数. 对于 X 中的某个 x 值有多于一个

y 的值与之对应的函数,叫做**多值函数**.本书我们只讨论单值函数.

(2) 函数的图形

研究函数,借助于图形的直观形象是很重要的,为此必须明确什么是函数的图形,函数和它的图形的关系是什么.

如果已知函数 $y=f(x)$,则以 x 为横坐标,以 x 所对应的函数值 $y(=f(x))$ 为纵坐标,就确定了平面上一个点 (x,y) .当 x 在过程中变化时, y 随之变化,点 (x,y) 在平面上相应地变动,动点 (x,y) 的轨迹一般是一条曲线(图 1-1),这条曲线称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.以后我们常常把函数 $y=f(x)$ 的图形称为“曲线 $y=f(x)$ ”.

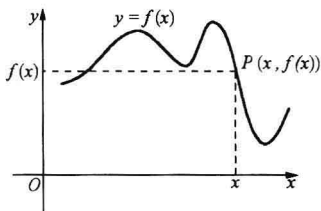


图 1-1

函数和它的图形的关系是:图形上任一点 $P(x,y)$ 的纵坐标 y 正好等于该点的横坐标 x 所对应的函数值,即同一点的两个坐标 x 与 y 一定满足关系式

$$y = f(x),$$

也就是点 P 的坐标是 $(x, f(x))$.

2. 函数的表示法

(1) 解析法

由自变量和常数经过四则、乘幂、取指数、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为**解析表达式**.用解析表达式表示一个函数就称为函数的**解析法**,解析法也叫**公式法**.高等数学中讨论

的函数,一般都是用解析法给出,这是由于对解析式子可以进行各种运算,便于研究函数的性质.需要指出的是:用解析法表示函数,不一定总是用一个式表示,也可以分段用几个式来表示一个函数.

定义 1.2 由两个或两个以上的分析表达式表示的函数,称为**分段定义的函数**,简称为**分段函数**.

需要注意的是,在一般情况下,对于同一个自变量,函数不能同时有两个不同的分析表达式.

例如**绝对值函数**

$$y = |x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

和**符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

就是两个常见的分段函数.

(2) 表格法

在实际应用中,常把自变量所取的值和对应的函数值列成表,用以表示函数关系,函数的这种表示法称为**表格法**.

(3) 图示法

我们把两个变量之间的对应关系用某个坐标系中的一条曲线来表示,称之为函数的**图示法**.

3. 函数的四个基本性质

(1) 奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 为一个对称数集,即 $x \in X$ 时,有 $-x \in X$. 若对于任意的 $x \in X$, 函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对于任意的 $x \in X$, 函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

在几何上,对于偶函数,由于在 x 和 $-x$ 处函数值相等,故其图形关于 y 轴对称(图 1-2). 对于奇函数,由于 x 和 $-x$ 处的函数值仅差一个符号,其图形关于原点中心对称,即当把右半平面的图形绕原点旋转 180° 后恰与左半平面的图形重合(图 1-3).

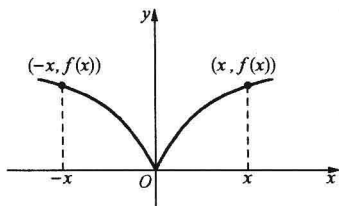


图 1-2

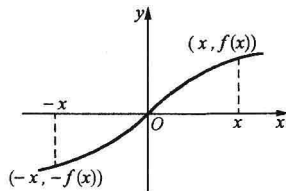


图 1-3

(2) 单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$, $x \in X$, 对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $(a, b) \subset X$. 若 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是**递增(递减)**的; 又若 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是**不减(不增)**的.

递增函数或递减函数统称为**单调函数**. 同样我们可以定义在无限区间上的单调函数.

在几何上,严格单调增加的函数,它的图形是随着 x 的增加而上升的曲线;严格单调减少的函数,它的图形是随着 x 增加而下降的曲线.

(3) 有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在 X 上有定义,若存在着一个正数 M_0 , 对于任意的 $x \in X$ 使得 $|f(x)| \leq M_0$, 则称 $f(x)$ 在 X 上是**有界的**; 否则称 $f(x)$ 在 X 上是**无界的**.

在几何上,有界函数的图形总是位于平行于 x 轴的直线 $y=$

$-M_0$ 与 $y=M_0$ 之间.

(4) 周期性

定义 1.6 设函数 $y=f(x), x \in \mathbf{R}$. 若存在着一个正数 T_0 , 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 使得

$$f(x + T_0) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**, T_0 为其**周期**.

周期函数图形的特点是自变量每增加或减少一个周期后, 图形重复出现(图 1-4).

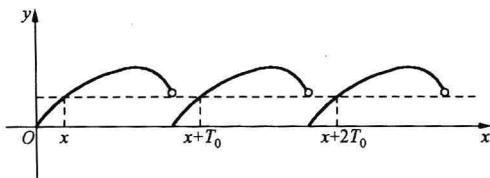


图 1-4

由定义可知, $kT_0 (k \in \mathbf{N}, k \neq 0)$ 都是它的周期, 可见一个周期函数有无穷多个周期. 若在无穷多个周期中, 存在最小的正数 T , 则称 T 为 $f(x)$ 的**最小周期**, 简称**周期**.

4. 反函数

定义 1.7 给定函数

$$y = f(x) \quad (x \in D_f, y \in R_f).$$

如果对于 R_f 中的每一个值 $y=y_0$ 都有 D_f 中惟一的一个值 $x=x_0$, 使得 $f(x_0)=y_0$, 那么我们就说在 R_f 上确定了 $y=f(x)$ 的**反函数**, 记作

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in R_f).$$

通常我们称函数 $y=f(x)$ 为**直接函数**, 而用符号“ f^{-1} ”表示新的函数关系. 一般地, 直接函数与反函数的对应关系、定义域与值域是不相同的, 反函数的定义域和值域, 恰好是直接函数的值域和