吉林省中学试用课本

数　学

第五册

说　　明

遵照毛主席关于**“教材要彻底改革”**的指示，在学习、总结文化大革命以来教材改革经验的基础上，我们和山西、河北、辽宁协作编写了这册教材，供我省中学三年级使用。在教学中，各校可根据规定的教学时数，对一些不重要的内容，进行删减和适当降低要求。还要注意增加一些结合三大革命斗争实际的内容，更好地为农业学大寨、工业学大庆的群众运动服务。请将意见随时寄给我们。

吉林省中小学教材编写组

一九七七年三月

目　录

第一章　函数和它的图象

一切客观事物都是在不断地运动变化的，并且“**每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。**”在三大革命实践中，我们经常需要从事物的不断变化中去分析量与量之间的这种互相联系、互相影响的关系，找出它们的变化规律，以便更好地为社会主义革命和社会主义建设服务．为了掌握量与量之间的变化规律，在这一章里，我们来研究有关函数的基本知识．

一　函数的概念

1·1　常量和变量

在实践中，我们经常会遇到各种各样的量．例如，长度、面积、体积、重量、比重、压力、时间、温度、速度等等．这些量，有的在某一过程中是不起变化的，也就是保持同一数值；而有的在某一过程中是有变化的，也就是可以取不同的数值．例如，一架客机在飞行的过程中．它所载乘客的数目是不变的，也就是保持同一数值．但它的高度、它与起飞点的距离以及它的剩油量都是有变化的，也就是可以取不同的数值．

在某一过程中保持同一数值的量叫做常量，可以取不同数值的量叫做变量．

例如，在圆周长的公式 $C=2\pi r$ 中，2π 是常量，半径 r 和圆周长 C 都是变量．

又如，在三角形的面积公式 $S=\frac{1}{2}bh$ 中，$\frac{1}{2}$是常量，底边 b、高 h 和面积 S 都是变量.

应该指出：同一个量，在某个过程中是个常量，而在另一个过程中又可能是变量．反过来也是这样．这就是说，在一定的条件下，即在不同的过程中，常量和变量可以互相转化．例如，解放后，我国物价稳定，在很长的时间内，粮价是个常量．但在解放前的反动统治下，粮价一天要涨几次，因此那时的粮价，仅在一天里就是一个变量.

1·2 函数的概念

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”．我们在研究事物之间的数量关系时，不仅要辨别出所研究的量中哪些是常量，哪些是变量，更重要的是要研究量与量之间是怎样互相联系和互相影响的，以便进一步去掌握事物的发展规律.

下面来看两个例子：

(1) 一列满载援外物资的火车，以每小时 60 公里的平均速度从北京开往上海．如果列车在 t 小时内运行了 S 公里，那么

$$S=60t. \tag{1}$$

在这个问题里，变量 S 和 t 的变化，并不是彼此孤立的．关系式 $S=60t$ 反映出 S 和 t 之间互相联系、互相制约的变化规律．这个规律就是：对于时间 t(小时)在 0 到 $24\frac{11}{30}$* 的范围内所取的每一个值，通过(1)式，路程 S(公里)都有确定的值和它

---

* 因为北京到上海全长 1462 公里，列车每小时运行 60 公里（在车站停车时间在内），共需要运行$\frac{1462}{60}=24\frac{11}{30}$(小时)，所以 t 可在从 0 到$24\frac{11}{30}$的范围内取值.

对应．例如，当 $t=1$ 时，$S=60$；当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$S=30$ 等等；

（2）下面是解放前日、德帝国主义仅在一九一九年到一九二四年期间，掠夺我国安源煤矿资源的统计表：

年度（n）	1919	1920	1921	1922	1923	1924
吨数（W）	775000	825000	860000	827000	666938	648527

从这个表中可以看出：对于年度 n 在 1919 到 1924 的范围内所取的每一个整数值，吨数 W 都有确定的值和它对应．例如，当 $n=1920$ 时，$W=825000$，当 $n=1922$ 时，$W=827000$ 等等．

上面的两个例子虽然各有不同的实际意义，但它们却具有一个共同的特点，这就是它们都有两个变量，并且对于第一个变量在某一范围内所取的每一个值，第二个变量都有确定的值和它对应．变量之间的这种对应关系叫做函数关系．

一般地，设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某一范围内所取的每一个值，变量 y 都有确定的值和它对应，那么，我们就把 y 叫做 x 的函数，并把 x 叫做自变量，y 又叫因变量．

例如：在(1)中，$S=60t$ 是 t 的函数，t 是自变量，S 是因变量．自变量 t 的取值范围是满足不等式 $0\leqslant t\leqslant 24\frac{11}{30}$ 的全体实数；

在(2)中，W 是 n 的函数，n 是自变量，W 是因变量．自变量 n 的取值范围是从 1919 到 1924 的六个整数．

又如，在 $y=\frac{1}{x^2}$ 中，因为当 x 取 0 以外的任何一个实数值时，y 都有确定的值和它对应，所以 $y=\frac{1}{x^2}$ 是 x 的函数，x 是

自变量，y 是因变量．自变量 x 的取值范围是不等于零的全体实数．

再如，在 $y=\sqrt{x^2}$ 中，因为不论 x 取什么实数值，y 都有确定的值和它对应，所以 $y=\sqrt{x^2}$ 是 x 的函数，x 是自变量，y 是因变量．自变量 x 的取值范围是全体实数．

但在 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 中，因为不论 x 取什么值，y 都没有实数值和它对应，所以 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 不是 x 的函数．

自变量的取值范围，叫做函数的定义域．

从上面的例子可以看出：在实际问题中，函数的定义域是由所研究问题的实际意义来确定的．但在用数学式子所给出的抽象的函数$\left(\text{如 } y=\dfrac{1}{x^2}\right)$中，如果没有特别注明，我们就认为这个函数的定义域是使得这个数学式子有意义的全体实数．

例1　求下列函数的定义域：

(1) $y=2x^2+1$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$；

(3) $C=2\pi r$（r 为圆的半径，C 为圆的周长）．

解　(1) 因为不论 x 取什么实数值，$y=2x^2+1$ 都有意义，所以函数 $y=2x^2+1$ 的定义域是全体实数．

(2) 因为当 $4x+1\leqslant 0$，即 $x\leqslant -\dfrac{1}{4}$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$ 无意义，而当 $4x+1>0$，即 $x>-\dfrac{1}{4}$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$ 有意义，所以函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$ 的定义域是满足不等式 $x>-\dfrac{1}{4}$ 的全体实数．

(3) 因为圆的半径不能为负数及零，但可以为正数，所以函数 $C=2\pi r$ 的定义域是满足不等式 $r>0$ 的全体实数．

y 是 x 的函数这一事实，常用符号 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 等等来表示. 有时还只写出 $f(x)$、$g(x)$ 等等，而不写出 y.

当 $x=a$ 时，函数 $y=f(x)$ 的值记作 $f(a)$.

例 2 已知 $f(x)=4x^2+2x-1$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(a)$ 和 $f\left(\frac{1}{a}\right)$.

解 因为 $f(x)=4x^2+2x-1$，所以

$$f(0)=4\cdot 0^2+2\cdot 0-1=-1,$$

$$f(1)=4\cdot 1^2+2\cdot 1-1=5,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-1,$$

$$f(a)=4a^2+2a-1,$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)-1=\frac{4+2a-a^2}{a^2}.$$

习 题 一

1. 在下列各题中，哪些量是常量？哪些量是变量？

(1) 同一块土地上的粮食产量和这块地的面积；

(2) 把炉中烧红的铁拿出来放在土地上，这块铁的温度和重量；

(3) 拖拉机平均以每分钟 0.05 公里的速度工作着，如果它 t 分钟走过的路程为 S 公里，那么

$$S=0.05t;$$

(4) 我国发射的科学实验人造地球卫星绕地球一周需要 106 分钟. 如果它 t 分钟绕地球 N 周，那么

$$N=\frac{t}{106};$$

(5) 如果 r 表示圆的半径，S 表示圆的面积，那么 $S=\pi r^2$；

(6) 钢的重量公式为 $P=dV$，其中 P 表示钢的重量，d 表示钢的比重 7.8 克/厘米^3，V 表示钢的体积；

(7) 匀速直线运动的公式为 $S=Vt$，其中 S 表示路程，V 表示速度，t 表示时间；

(8) 梯形的面积公式为 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$，其中 a、b 和 h 分别表示梯形的上底、下底和高。

2. 说明下列各题中的两个变量为什么具有函数关系：

(1) 在弹性限度内，弹簧的负载量与弹簧的长度；

(2) 某地的时间与气温；

(3) 正在运转的电动机的运转时间与用电量；

(4) 某一货船的载货量与它的吃水深度。

3. 在第 1 题的(3)、(4)、(5)、(6)、(7)中，等号左边的变量是不是等号右边的变量的函数？为什么？

4. 下面是前进大队从一九六四年到一九七一年各年的粮食平均亩产量表：

年　　度	64	65	66	67	68	69	70	71
平均亩产量(斤)	588	709	813	887	1025	1101	1169	1223

表中的粮食平均亩产量是不是年度的函数？为什么？

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=3x^2+4$；　　(2) $y=1-x^2$；

(3) $y=\frac{1}{1+2x}$；　　(4) $y=\frac{1+2x}{1-12x}$；

(5) $y=\sqrt{4-2x}$；　　(6) $y=\sqrt{3x+5}+1$；

(7) $y=\frac{x+1}{\sqrt{13x-5}}$；　　(8) $y=\frac{2x-1}{\sqrt{5x+3}}+3$；

(9) $y=\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$；　　(10) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$；

(11) $y=\frac{8}{x(x-1)}$；　　(12) $y=\frac{x}{x^2-4x+3}+x-1$.

6. 试把下列各式中的 y 表示成 $y=f(x)$ 的形式，并求出函数的定义域：

(1) $x+y=5$；　　(2) $3x+xy-2y=0$。

7. 如果 $f(x)=x^2-x+2$，$g(x)=\frac{x-1}{2x^2}$，求：

(1) $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(a-2)$;

(2) $g(-2)$, $g\left(\frac{1}{3}\right)$, $g(\sqrt{2})$, $g\left(\frac{1}{a+1}\right)$;

(3) $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

1·3 函数关系的表示法

变量之间的函数关系,即变量之间的对应关系,反映了这些变量之间的变化规律. 毛主席教导说:“**人的认识物质,就是认识物质的运动形式**”. 要认识变量之间的函数关系,就必须用一定的形式把它表示出来. 最常用的表示函数关系的形式有以下三种:

(1) 解析法 把两个变量之间的函数关系用数学式子来表示的方法叫做解析法或公式法,而这个数学式子就叫做这两个变量之间的函数关系式.

例如,$y=2x^2+1$, $y=\frac{x}{3x-2}$及 $C=2\pi r$ 中的变量之间的函数关系,都是用解析法来表示的,而 $y=2x^2+1$, $y=\frac{x}{3x-2}$及 $C=2\pi r$ 都是函数关系式.

(2) 列表法 我们在1·2的(2)里,把年度 n 和被日、德帝国主义所掠夺的煤的吨数 W 之间的六组对应值列成了一个表,用以表示 n 和 W 之间的函数关系. 这种把自变量所能取的一系列值,和因变量所对应的一系列值列成一个表,以表示两个变量之间的函数关系的方法叫做列表法.

又如,从一九六一年到一九七〇年的十年里,美国工人每年的罢工次数 N 与年度 n 之间的函数关系,也可用列表法表示如下:

年度(n)	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
罢工次数(N)	3372	3612	3362	3655	3963	4405	4595	5045	5600	5600

数学用表中的各种数表，如平方表、平方根表、立方表、立方根表等，也都是用列表法来表示函数关系的例子.

(3) 图象法　有时还需要在画有两条互相垂直的数轴的平面上，用曲线来表示变量之间的函数关系. 例如，为了使得气象工作更好地为社会主义革命和社会主义建设服务，某市气象服务台用气温自动记录计，描下了该市某一天的气温变化曲线(图 1—1). 图中，水平的数轴表示时间 t (时)，竖直的数轴表示气温 T (摄氏度).

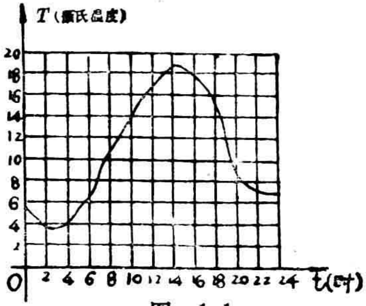

图 1-1

从此图可以找出这一天每一时刻的气温，即对于这一天的每一时刻 t (时)，从图中都可以找到一个对应的温度 T (度)作为该时刻的气温. 例如，当 $t=10$ 时，$T=14$，即上午 10 点的气温为 14°C，所以，这一曲线表示了这一天的时间与气温之间的函数关系.

象上面那样，用曲线*来表示变量之间的函数关系的方法叫做图象法.

函数关系的三种表示法各有其优缺点. 解析法简单明了，便于分析变量之间的全部相依关系，但在由自变量的值求因变量的对应值时，往往需要进行复杂的计算. 列表法对于从表中

* 这里曲线的涵义也包括了直线和一些未连成线的点.

所列的自变量的值去求因变量的对应值，非常方便，但由于往往不能把自变量和因变量的全部对应值都列出来，所以有一定的局限性．图象法非常直观，容易看出函数的性质，但在由自变量的值去求因变量的对应值时，往往不够精确．

由于函数的三种表示法各有其优缺点，所以什么时候使用什么表示法，这要对具体情况作具体分析．

例 某种药品的现价每支比十年前的价格降低了 1.44 元．如果 x 支这种药品共降价 y 元，试用解析法表示 x 和 y 之间的函数关系．

解 因为每支药品降低了 1.44 元．x 支药品共降低了 $1.44x$ 元．

所以 x 和 y 之间的函数关系可表示为

$$y=1.44x.$$

1·4 直角坐标系

在 1·3 里我们讲过，有时要用图象法来表示变量之间的函数关系．但是怎样用图象法来表示变量之间的函数关系呢？为了解决这个问题，下面来研究平面直角坐标系．

木工师傅要在一个矩形木板上钻孔时，只要知道孔心到木板相邻两条边缘的距离，就能确定这个孔的位置（图 1-2）．我们到电影院去看电影时，也只要知道自己坐位的排(行)数和号（列）数，就能找到自己的坐位．这些事实说明：只要有了两条互相垂直的数轴作标准，就可以用一对有顺序的实数来确定平面内一个点的位置．这种确定平面内的点的位置的方法叫做平面直角坐标法．

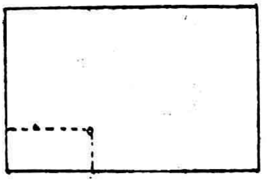

图 1-2

在平面内作两条互相垂直并且有公共原点O的数轴 $X'X$ 和 $Y'Y$（它们的长度单位一般是相同的），使 $X'X$ 的正方向向右，$Y'Y$ 的正方向向上（图 1-3）．我们把 $X'X$ 叫做横轴或 x 轴，把 $Y'Y$ 叫做纵轴或 y 轴，它们的交点 O 叫做坐标原点．x 轴和 y 轴统称为坐标轴．这样的有公共原点，并且互相垂直的两条数轴合在一起叫做平面直角坐标系，简称直角坐标系．建立了直角坐标系的平面叫做坐标平面．

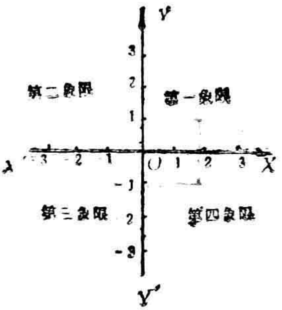

图　1-3

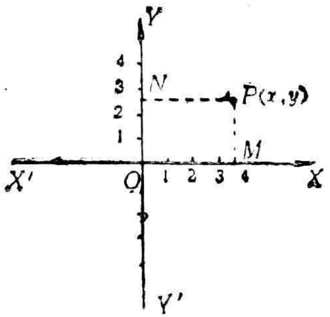

图　1-4

x 轴和 y 轴把平面分成了 XOY，YOX'、$X'OY'$ 和 $Y'OX$ 四个部分（坐标轴不属于任何一部分），依次称它们为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限（图 1-3）．

（1）由点求坐标　设P是坐标平面内的一个点（图 1-4）．从P点分别作 x 轴和 y 轴的垂线 PM 和 PN．设垂足M和N在 x 轴和 y 轴上所表示的数分别为 x 和 y（在图 1-4 中，$x=3.5$，$y=2.5$），我们把 x 叫做点 P 的横坐标，把 y 叫做点P的纵坐标，并把这对有顺序的实数 (x, y) 叫做点P的坐标．以后就把以(x, y)为坐标的点P简单地记作 $P(x, y)$．

这样规定以后，对于坐标平面内的每一个点，都可以求出它的坐标．

例1 求出图 1-5 中 A、B、C、D 四点的坐标.

解 过点 A 分别作 x 轴和 y 轴的垂线交 x 轴于表示数 1 的点，交 y 轴于表示数 2 的点，所以点 A 的坐标为 $(1,2)$.

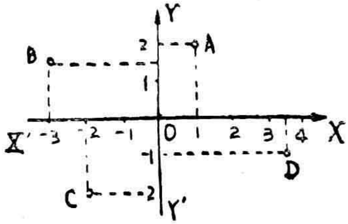

图 1-5

同样可得点 B 的坐标为 $(-3,\ 1.5)$，点 C 的坐标为 $(-2,-2)$，点 D 的坐标为 $(3.5,-1)$.

(2) 由坐标求点 如果知道了一个点的坐标 (x,y)，也可以在坐标平面内作出这个点来.

例2 在坐标平面内作出下列各点:

$$A(-1.5,\ 3.5),\ B(3,\ 1),\ C\left(-4,-3\frac{1}{3}\right),$$

$$D(2,-3),\ E(0,3),\ F(-2.5,0),\ O(0,0).$$

解 过 x 轴上表示 -1.5 的点作垂直于 x 轴的直线，过 y 轴上表示 3.5 的点作垂直于 y 轴的直线，这两条直线的交点就是所要作的点 $A(-1.5,3.5)$，如图 1-6.

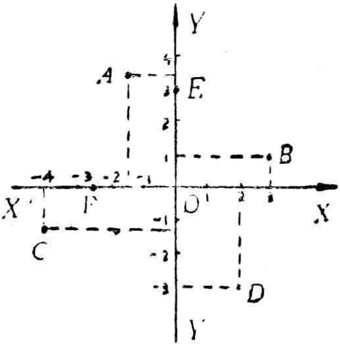

图 1-6

用同样的方法可以作出点 B、C、D、E、F. 而 O 点就是坐标原点.

由点的坐标作点的时候，如果横坐标和纵坐标的绝对值相差很大，为了作图方便，可以在两条坐标轴上取不同的长度单位.

例3 在坐标平面内作出点 $N(3,100)$.

解 如图 1-7，取 y 轴上的长度单位是 x 轴上的长度单位的二十倍. 过 x 轴上表示数 3 的点和 y 轴上表示数 100 的点，分别作 x 轴和 y 轴的垂线，则此二垂线的交点就是所要作的点.

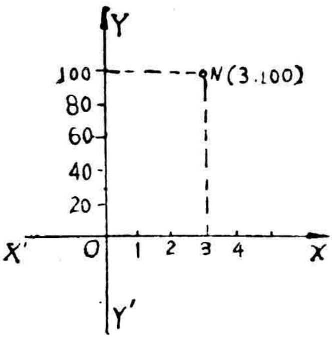

图 1-7

总之，对于坐标平面内的任意一个点，都可以找到一对有序实数 (x, y) 作为它的坐标. 反过来，对于任意一对有序实数 (x, y)，也都可以在坐标平面内找到一个点以这对有序实数为坐标. 今后为了说话简单起见，我们有时也就把以 (x, y) 为坐标的点，叫做点 (x, y).

1·5 函数的图象

在函数 $y=f(x)$ 的定义域内，每给 x 一个值，就可以定出 y 的对应值. 把每一组对应值作为点的坐标，就可以在坐标平面内作出一个点. 所有这些点构成的图形，叫做函数 $y=f(x)$ 的图象.

如果知道了函数关系式要作函数的图象，一般要经过下面三个步骤：(1) 列表；(2) 描点；(3) 连线. 这种作函数图象的方法叫做描点法.

例 1 作函数 $y=\frac{1}{8}x^3$ 的图象.

解 (1) 列表：

x	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
$y=\frac{1}{8}x^3$	……	-8	$-3\frac{3}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$3\frac{3}{8}$	8	……