高等学校函授教材

高等数学

第五分册

张之良 编著

水利出版社

高等学校函授教材

高等数学

第五分册

张之良 编

水利出版社

高等学校函授教材

高 等 数 学

第五分册

张之良 编著

*

水利出版社出版发行

（北京德胜门外六铺炕）

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 $22\frac{1}{4}$印张 493千字

1980年11月第一版 1982年17月北京第二次印刷

印数 6171—9220 册 定价 2.30 元

书号 15047·4072

目　录

第二十三章 无 穷 级 数

［学习指示］ 无穷级数在数学的领域里是一个很重要工具，有了这一工具，我们可以把复杂的函数化为简单的函数；也可以利用无穷级数作近似计算，大家都知道近似计算在实际工作中是常常遇到的。所以无穷级数在理论上和实际上都有很高的价值，因此在这一章里用了一定的篇幅来讲解。在学习这一章时，读者首先要注意：无穷级数的概念是建立在**无穷和**这一概念上，这里边是包含了无穷步骤的运算——极限运算。因此在没有经过证明以前，不能够把**有限和**的一些性质硬搬到无穷级数上来；其次我们着重关于级数收敛发散性质的讨论，而对于级数求和的问题不是我们这一章所讨论的主要问题（当然并不是说它不重要）。本章讨论四个部分，首先是讲数项级数的敛散性，然后讨论函数项级数中的一种特殊类型——幂级数的收敛范围问题。有了上两项的知识，我们就可以进一步讨论如何把函数展开为泰勒级数。最后谈谈应用无穷级数作近似计算。

学完本章后，要对不太复杂的无穷级数能判断它的敛散性，会求幂级数的收敛区间，能展开函数为泰勒级数和能作简单的近似计算。

（Ⅰ）数 项 级 数

§1 数项级数概念及其收敛性

提起无穷级数，我们早已用过，不过那时还没有作深入的研究。

如将$\frac{1}{3}$用十进位小数表示：

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^N}+\cdots$$

就是一个无穷级数，我们对它并不生疏，它是一个几何级数，我们回忆一下，几何级数的一般写法为：

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

今取其前 n 项之和记为S_n，则

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

又 $$rS_n=\quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n(-$$

$$(1-r)S_n=a-ar^n$$

所以当 $r\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$

其中当 $0<|r|<1$，取 $n\to\infty$时的极限

有 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}$$

我们就说这个极限为此级数之和。

记为： $$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$$

同样的例如求级数：

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$$

之和，因

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$$

故其前 n 项和为：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}.$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

所以1为此级数之和。

但在另一方面，也很清楚，并不是任何级数都能用上面的办法求它的和，例如：

$$1+1+1+\cdots$$

其前 n 项和 $\quad S_n=n,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$

极限不存在，此时我们说这个级数没有和。又如

$$1-1+1-1+\cdots$$

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

当 $n\to\infty$时，我们不能肯定它到底是0还是1，我们说，这种情形级数是没有和的。

一般的讲来，**级数的定义**如下：

假若有一个无穷实数列

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$$

我们称下式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为**无穷级数**，称和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

为级数的**部分和**（或叫做前 n 项和），而称u_n为**公项**（或一**般项**），也有人称它为**普通项**。

假若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$存在。我们说级数为**收敛的**。并称此极限 s 为**级数之和**；若 S_n 不趋于任何极限，我们说级数是**发散的**，即它没有和。当级数收敛时，它的和与部分和之差

$$r_n = s - S_n$$

称为它的**余项**。

从收敛性的定义，立刻就知道

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

换句话说，当 $n\to\infty$时，收敛级数的余项为无穷小量，而发散级数没有余项，因为它没有和。

由上面的定义，我们知道，求无穷级数的和跟求有限和并不一样；在无穷级数的求和过程中，参与了一个新的运算，即极限运算，它是一个无限步骤的运算，所以决不能没有经过任何考虑和条件，就把有限和所具有的性质硬搬到无穷级数的和上来。

又我们可以把部分和

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

作成一个数列

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

关于任何级数的收敛性以及它的和的问题，都可以归结到数列的极限存在和求它的极限值的问题，因而无穷级数理论的任何一个问题都可以用数列以及它的极限术语来叙述。数列与无穷级数之间的这种基本联系，使得我们往往在证明了这两个范围中的一个的某个命题之后，就可以不用再加任何新的证明，立刻把这个命题搬到另一个范围里去。

我们研究无穷级数，最终目的是如何把复杂的函数化为简单的函数，这个新的函数是否与原来的相等，和这种化法是否唯一等问题，这些问题与级数敛散性直接有关，因此我们要认真地讨论敛散性的问题，而对于级数求和，这里不作重点要求。

§2 基本性质，收敛的必要条件

（1）若级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

收敛，其和为 s**，则对此级数每项乘以不为零的常数** λ**，所得的新级数**

$$\lambda u_1+\lambda u_2+\cdots+\lambda u_n+\cdots$$

也为收敛，其和为λs。

证 我们若能由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$，证得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda u_n=\lambda s$，即妥。

令 $\qquad S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 为原来级数的部分和，

$\qquad\qquad \sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda u_k$ 为新级数的部分和

因 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=s$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda u_k$$

$$=\lambda\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=\lambda s$$

这就是说，新级数的部分和的极限等于λs，所以新级数为收敛。

又若原来级数的部分和S_n没有极限，则因

$$\sigma_n=\lambda S_n$$

自然σ_n也不会有极限，也就是说，对于一个发散级数的各项乘以不为零的常数，它仍然是发散，因此，**乘一个不为零的常数到无穷级数的各项，不会影响其原来的敛散性。**

（2）若 $$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

为两个收敛级数，其和分别为 s 、σ；若把它们逐项相加减，得一新级数

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也必收敛，且其和为 $s\pm\sigma$。

证 若由

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s,\quad \sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$$

能证得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=s\pm\sigma$$

即妥。令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$$

分别为u-级数与v-级数的部分和；又新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$$

的部分和应为

$$(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\cdots+(u_n \pm v_n)=S_n \pm \sigma_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(S_n \pm \sigma_n)=\lim_{n\to\infty}S_n \pm \lim_{n\to\infty}\sigma_n=s \pm \sigma$$

即是
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=s \pm \sigma$$

这一性质，就是说**收敛级数可以逐项相加减**。

（3）若$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$为收敛（或为发散），则$\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n$也为收敛（或为发散）。换句话说，即是级数的收敛与发散与从它前边去掉有限项（或增添有限项）无关。更明显一点说，即是**在无穷级数的前边去掉（或增添）有限项，它该收敛还是收敛，它该发散还是发散。**

证 因
$$S_N=u_1+u_2+\cdots+u_N$$
$$S_{N+n}=u_1+u_2+\cdots+u_N+u_{N+1}+\cdots+u_{N+n}$$

今设 $\sigma_n=\sum_{k=N+1}^{N+n}u_k=u_{N+1}+\cdots+u_{N+n}=S_{N+n}-S_N$

因设N为某固定数，所以S_N也是固定数，当$n\to\infty$时，

$$\sum_{k=N+1}^{N+n}u_k \text{ 与 } S_{N+n}$$

同时有极限或无极限，所以级数与去掉（或增添）有限项后的级数或同为收敛或同为发散（但新级数之和，一般地说来是要改变的）。

（4）收敛级数加括弧后所成的级数，仍然收敛于原来

的和❶。

证 若收敛级数为

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots+u_n+\cdots=s$$

设不变更其各项的次序，按照某一规律加括弧后所成的级数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

用σ_m表示前m项（即前m个括弧）的部分和，用S_n表示原来级数相当于σ_m的部分和。

亦即 $\sigma_1=S_2,\ \sigma_2=S_5,\cdots,\ \sigma_m=S_n,\cdots$

由此可见，当$m\to\infty$时，$n\to\infty$，于是

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=s.$$

（5）级数收敛的必要条件：若级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

是收敛的，则当n无限增大时，它的一般项u_n必趋近于零：

亦即由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

证 因 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

$$S_{n-1}=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$$

---

❶ 若加括弧后所成的级数是发散的，则原来级数也必发散；这是因为：假若不然，原来的级数为收敛，则根据性质（4），把它加括弧后必为收敛，这与假设矛盾，故原级数必为发散。

收敛级数去括弧后所成的级数，不一定仍是收敛。

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$

显然收敛于零，但去括弧后，变为

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

却是发散的。

若所论的级数是正项级数，则无论加括弧或去括弧都不会影响它的敛散性，这是由于单调增加数列的任何子数列必与原来数列同时趋于无穷或同时趋于同一极限的缘故。

所以 $$u_n=S_n-S_{n-1}$$

取极限后得

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}$$

因 S_n，S_{n-1}同属于数列$\{S_n\}$，当n趋于无穷时，$\{S_n\}$有极限，则S_n与S_{n-1}的极限应当一样。所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=s-s=0$$

这个条件$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数收敛的必要条件，但却不充分，换句话说，即是“有之不必然”。例如调和级数（各项倒数所成的级数是等差级数）。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

它的一般项为：

$$u_n=\frac{1}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

具备了公项趋于零的条件，但它却是发散的。

证 根据性质（4）注，调和级数为正项级数，不因加括弧而影响它的敛散性。

故调和级数可写作：

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{项}}+\cdots$$

又因 $$1>\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}>\frac{1}{4};\ \frac{1}{5}>\frac{1}{8};\ \frac{1}{6}>\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{7}>\frac{1}{8};\ \frac{1}{9}>\frac{1}{16};\ \cdots;\ \cdots$$

所以

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+(\underbrace{\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}}_{4\text{项}})+(\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8\text{项}})+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}$$

显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}$是发散的，因为它的部分和趋于$+\infty$。一个对应项比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}$还要大的调和级数，显然是发散的。

这一条件（指$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$）虽然不足以用来判断级数收敛与否（因为具备了这个条件，级数可以是收敛，也可以是发散），但它是收敛的必要条件，没有它，级数肯定不是收敛。如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数必为发散，换句话说，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$**却成为发散级数的充分条件。**

例 1 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$

$$u_n=n,\quad \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$$

故级数为发散。

例 2 $\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\cdots+\frac{n}{100n+1}+\cdots$。

$$u_n=\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{100+\frac{1}{n}}$$