

高等学校函授教材

高等数学

第五分册

张之良 编著

水利出版社

高等学校函授教材

高等数学

第五分册

张之良 编

水利出版社

高等学校函授教材

高等数学

第五分册

张之良 编著

*

水利出版社出版发行

(北京德胜门外六铺炕)

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 22 $\frac{1}{4}$ 印张 493千字
1980年11月第一版 1982年17月北京第二次印刷
印数 6171—9220 册 定价 2.30 元
书号 15047·4072

目 录

第二十三章 无穷级数	1
(I) 数项级数	2
§ 1 数项级数概念及其收敛性	2
§ 2 基本性质, 收敛的必要条件	5
§ 3 正项级数, 收敛性的充分判断法	17
§ 4 任意项级数, 绝对收敛	42
(II) 函数项级数	51
§ 5 一般概念	51
§ 6 幂级数	53
§ 7 泰勒级数	72
§ 8 初等函数的展开	75
§ 9 泰勒级数在近似计算上的应用	94
总结	105
第二十四章 富里哀级数	107
§ 1 周期函数	107
§ 2 三角多项式	109
§ 3 周期为 2π 的富氏级数	115
§ 4 奇函数及偶函数的富氏级数	126
§ 5 在半区间 $[0, \pi]$ 上展开的富氏级数	138
§ 6 任意区间上的富氏级数	144
总结	158
第九次测验作业	162
第二十五章 微分方程	167
§ 1 一般概念	167

§ 2	一阶微分方程的几何解释及其存在定理	178
§ 3	可分离变量的微分方程	185
§ 4	齐次微分方程	194
§ 5	一阶线性方程	205
§ 6	柏努利(Bernoulli)方程	214
§ 7	全微分方程	217
§ 8	一阶微分方程的应用	237
§ 9	一阶微分方程总结	248
§ 10	一阶微分方程的近似解	257
§ 11	高阶微分方程的几个特殊类型(可降阶)	271
§ 12	高阶线性方程的一般理论	293
§ 13	常系数线性方程	310
§ 14	二阶常系数线性微分方程的应用	347
§ 15	可化为常系数的微分方程	362
§ 16	级数解法	366
§ 17	微分方程组	387
总结		409
第十次测验作业		415
第二十六章 线性代数初步		420
§ 1	n 阶行列式	421
	(一)全排列	421
	(二) n 阶行列式的定义	422
	(三) n 阶行列式的性质	424
	(四)行列式按行(列)展开	430
	(五)行列式乘法公式的证明	440
	(六)克莱姆(Cramer)法则	442
§ 2	矩阵及其运算	449
	(一)矩阵概念	449
	(二)矩阵的运算(加、减、乘)	456

(三)转置矩阵, 矩阵乘积的行列式	473
(四)逆矩阵	476
(五)分块矩阵及其运算	484
§ 3 解线性方程组的实用方法	500
(一)高斯(Gauss)消元法、初等变换	500
(二)主元素消去法	510
(三)简单迭代法	513
(四)赛德尔迭代法	519
§ 4 n 维向量空间与线性方程组	526
(一) n 维向量及其运算法则	527
(二)向量的线性相关和线性无关	531
(三)矩阵的秩	538
(四)线性方程组有解的判别定理	553
§ 5 线性方程组解的结构	566
第二十七章 概率论初步	575
§ 1 排列与组合	576
(一)排列	576
(二)组合	584
§ 2 事件与概率	591
(一)事件及其运算	591
(二)概率	594
§ 3 概率的基本运算法则	601
(一)加法定理	601
(二)条件概率与乘法定理	602
(三)全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式	606
(四)独立试验序列	610
§ 4 随机变量及其分布函数	619
(一)随机变量	620
(二)离散型随机变量的概率分布	621

(三)连续随机变量的分布密度和分布函数	625
(四)正态分布和均匀分布	629
§ 5 多维随机变量	634
(一)二维随机变量	634
(二)边缘分布	636
(三)条件分布	639
(四)相互独立的随机变量	641
§ 6 随机变量的数字表征	656
(一)数学期望	656
(二)方差	663
(三)契贝雪夫(Чебышев)不等式	671
§ 7 大数定理和中心极限定理	672
(一)大数定理	672
(二)中心极限定理	676
后记	692

第二十三章 无 穷 级 数

〔学习指示〕 无穷级数在数学的领域里是一个很重要工具，有了这一工具，我们可以把复杂的函数化为简单的函数；也可以利用无穷级数作近似计算，大家都知道近似计算在实际工作中是常常遇到的。所以无穷级数在理论上和实际上都有很高的价值，因此在这一章里用了一定的篇幅来讲解。在学习这一章时，读者首先要注意：无穷级数的概念是建立在**无穷和**这一概念上，这里边是包含了无穷步骤的运算——极限运算。因此在没有经过证明以前，不能够把**有限和**的一些性质硬搬到无穷级数上来；其次我们着重关于级数收敛发散性质的讨论，而对于级数求和的问题不是我们这一章所讨论的主要问题（当然并不是说它不重要）。本章讨论四个部分，首先是讲数项级数的敛散性，然后讨论函数项级数中的一种特殊类型——幂级数的收敛范围问题。有了上两项的知识，我们就可以进一步讨论如何把函数展开为泰勒级数。最后谈谈应用无穷级数作近似计算。

学完本章后，要对不太复杂的无穷级数能判断它的敛散性，会求幂级数的收敛区间，能展开函数为泰勒级数和能作简单的近似计算。

(I) 数 项 级 数

§ 1 数项级数概念及其收敛性

提起无穷级数, 我们早已用过, 不过那时还没有作深入的研究。

如将 $\frac{1}{3}$ 用十进位小数表示:

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

就是一个无穷级数, 我们对它并不生疏, 它是一个几何级数, 我们回忆一下, 几何级数的一般写法为:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

今取其前 n 项之和记为 S_n , 则

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$\text{又} \quad rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n (-$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

$$\text{所以当 } r \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

其中当 $0 < |r| < 1$, 取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\text{有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

我们就说这个极限为此级数之和。

$$\text{记为:} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}$$

同样的例如求级数:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$$

之和，因

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

故其前 n 项和为：

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

所以 1 为此级数之和。

但在另一方面，也很清楚，并不是任何级数都能用上面的办法求它的和，例如：

$$1+1+1+\cdots$$

其前 n 项和

$$S_n = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

极限不存在，此时我们说这个级数没有和。又如

$$1-1+1-1+\cdots$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，我们不能肯定它到底是 0 还是 1，我们说，这种情形级数是没有和的。

一般的讲来，**级数的定义**如下：

假若有一个无穷实数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

我们称下式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为无穷级数，称和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

为级数的部分和（或叫做前 n 项和），而称 u_n 为公项（或一般项），也有人称它为普通项。

假若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ 存在。我们说级数为收敛的。并称此极限 s 为级数之和；若 S_n 不趋于任何极限，我们说级数是发散的，即它没有和。当级数收敛时，它的和与部分和之差

$$r_n = s - S_n$$

称为它的余项。

从收敛性的定义，立刻就知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

换句话说，当 $n \rightarrow \infty$ 时，收敛级数的余项为无穷小量，而发散级数没有余项，因为它没有和。

由上面的定义，我们知道，求无穷级数的和跟求有限和并不一样，在无穷级数的求和过程中，参与了一个新的运算，即极限运算，它是一个无限步骤的运算，所以决不能没有经过任何考虑和条件，就把有限和所具有的性质硬搬到无穷级数的和上来。

又我们可以把部分和

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

作成一個數列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

關於任何級數的收斂性以及它的和的問題，都可以歸結到數列的極限存在和求它的極限值的問題，因而無窮級數理論的任何一個問題都可以用數列以及它的極限術語來敘述。數列與無窮級數之間的這種基本聯繫，使得我們往往在證明了這兩個範圍中的一個的某個命題之後，就可以不用再加任何新的證明，立刻把這個命題搬到另一個範圍里去。

我們研究無窮級數，最終目的是如何把複雜的函數化為簡單的函數，這個新的函數是否與原來的相等，和這種化法是否唯一等問題，這些問題與級數收斂性直接有關，因此我們要認真地討論收斂性的問題，而對於級數求和，這裡不作重點要求。

§ 2 基本性質，收斂的必要條件

(1) 若級數 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 收斂，其和為 s ，則對此級數每項乘以不為零的常數 λ ，所得的新級數

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n + \cdots$$

也為收斂，其和為 λs 。

證 我們若能由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ，證得 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda s$ ，即妥。

令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 為原來級數的部分和，

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \lambda u_k \text{ 為新級數的部分和}$$

因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = s$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda u_k \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lambda s \end{aligned}$$

这就是说，新级数的部分和的极限等于 λs ，所以新级数为收敛。

又若原来级数的部分和 S_n 没有极限，则因

$$\sigma_n = \lambda S_n$$

自然 σ_n 也不会有极限，也就是说，对于一个发散级数的各项乘以不为零的常数，它仍然是发散，因此，乘一个不为零的常数到无穷级数的各项，不会影响其原来的敛散性。

$$(2) \text{ 若 } \begin{aligned} &u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \\ &v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \end{aligned}$$

为两个收敛级数，其和分别为 s 、 σ ；若把它们逐项相加减，得一新级数

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也必收敛，且其和为 $s \pm \sigma$ 。

证 若由

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

能证得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$$

即妥。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$$

分别为 u -级数与 v -级数的部分和；又新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$$

的部分和应为

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = S_n \pm \sigma_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s \pm \sigma$$

即是

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$$

这一性质，就是说收敛级数可以逐项相加减。

(3) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 为收敛 (或为发散)，则 $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 也为收敛 (或为发散)。换句话说，即是级数的收敛与发散与从它前边去掉有限项 (或增添有限项) 无关。更明显一点说，即是在无穷级数的前边去掉 (或增添) 有限项，它该收敛还是收敛，它该发散还是发散。

证 因

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$$

$$S_{N+n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_N + u_{N+1} + \cdots + u_{N+n}$$

$$\text{今设 } \sigma_n = \sum_{k=N+1}^{N+n} u_k = u_{N+1} + \cdots + u_{N+n} = S_{N+n} - S_N$$

因设 N 为某固定数，所以 S_N 也是固定数，当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\sum_{k=N+1}^{N+n} u_k \text{ 与 } S_{N+n}$$

同时有极限或无极限，所以级数与去掉 (或增添) 有限项后的级数或同为收敛或同为发散 (但新级数之和，一般地说来是要改变的)。

(4) 收敛级数加括弧后所成的级数，仍然收敛于原来

的和①。

证 若收敛级数为

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_n + \cdots = s$$

设不变更其各项的次序，按照某一规律加括弧后所成的级数为

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$$

用 σ_m 表示前 m 项（即前 m 个括弧）的部分和，用 S_n 表示原来级数相当于 σ_m 的部分和。

$$\text{亦即 } \sigma_1 = S_2, \sigma_2 = S_5, \cdots, \sigma_m = S_n, \cdots$$

由此可见，当 $m \rightarrow \infty$ 时， $n \rightarrow \infty$ ，于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s.$$

(5) 级数收敛的必要条件：若级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

是收敛的，则当 n 无限增大时，它的一般项 u_n 必趋近于零：

$$\text{亦即由于 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$$\text{证 因 } S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

-
- ① 若加括弧后所成的级数是发散的，则原来级数也必发散；这是因为，假若不然，原来的级数为收敛，则根据性质(4)，把它加括弧后必为收敛，这与假设矛盾，故原级数必为发散。

收敛级数去括弧后所成的级数，不一定仍是收敛。

$$\text{例如 } (1-1) + (1-1) + \cdots$$

显然收敛于零，但去括弧后，变为

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

却是发散的。

若所论的级数是正项级数，则无论加括弧或去括弧都不会影响它的敛散性；这是由于单调增加数列的任何子数列必与原来数列同时趋于无穷或同时趋于同一极限的缘故。

所以

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

取极限后得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}\end{aligned}$$

因 S_n, S_{n-1} 同属于数列 $\{S_n\}$, 当 n 趋于无穷时, $\{S_n\}$ 有极限, 则 S_n 与 S_{n-1} 的极限应当一样。所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s - s = 0$$

这个条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数收敛的必要条件, 但却不充分, 换句话说, 即是“有之不必然”。例如调和级数 (各项倒数所成的级数是等差级数)。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

它的一般项为:

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

具备了公项趋于零的条件, 但它却是发散的。

证 根据性质 (4) 注, 调和级数为正项级数, 不因加括弧而影响它的敛散性。

故调和级数可写作:

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ 项}} + \cdots\end{aligned}$$

又因

$$1 > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{6} > \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{7} > \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9} > \frac{1}{16}, \quad \dots, \dots$$

所以

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ & > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{4 \text{ 项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{8 \text{ 项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ 项}} + \dots \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \end{aligned}$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$ 是发散的，因为它的部分和趋于 $+\infty$ 。

一个对应项比 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$ 还要大的调和级数，显然是发散的。

这一条件（指 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ）虽然不足以用来判断级数收敛与否（因为具备了这个条件，级数可以是收敛，也可以是发散），但它是收敛的必要条件，没有它，级数肯定不是收敛。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ，则级数必为发散，换句话说，

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ 却成为发散级数的充分条件。

例 1 $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

$$u_n = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$$

故级数为发散。

例 2 $\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \dots + \frac{n}{100n+1} + \dots$

$$u_n = \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100 + \frac{1}{n}}$$