

高级中学

立体几何全一册

教 学 参 考 书

人民教育出版社

说 明

立体几何是研究空间图形(由空间的点、线、面所构成,也可以看成是空间点的集合)的性质、画法、计算以及它们的应用的学科。这就是说,在立体几何里,实际上是撇开抽象的空间图形所代表实际物体的那些物理性质、化学性质等,而只研究它们的几何性质。由于空间图形的抽象性,一个图形可以是许多实际物体的抽象形式,因而立体几何是在生产实际、科学试验中有广泛应用的一门基础学科。

中学里开设立体几何这门课程,目的是要使学生系统地掌握空间图形的基本性质,从而掌握一些简单多面体和旋转体的画法、表面积和体积公式;进一步发展他们逻辑思维能力和空间想象力,以及应用这些知识去分析问题、解决问题的能力。这对将来直接参加工农业生产或进一步学习,都是非常必要的。

本册教材是在学生已有平面图形知识的基础上来研究空间图形的。从平面观念过渡到立体观念,对一般学生来说,困难较多,是教学的难点,为了解决这一难点,可采取下列措施:

1. 尽量做到从实际提出问题。概念应尽可能由分析实例引入,使学生在感性认识的基础上上升为理性认识。

2. 开始教学时,可多用教具,从模型到图形,再从图形到模型,逐步培养学生认识空间图形的能力。对学生画空间图形容易发生的错误,要预先指出和及时纠正。

3. 联系平面几何知识, 注意平面几何知识与立体几何知识相互间的关系, 用对比的方法, 区别异同, 指出特点。

本册教材共有两章“直线和平面”, “多面体和旋转体”, 其中第一章直线和平面的位置关系是第二章中简单几何体(多面体与旋转体)的概念、性质、直观图画法、表面积和体积公式等内容的理论根据, 牢固掌握第一章直线和平面的位置关系是学好第二章多面体和旋转体的关键, 也是学好立体几何的关键; 同时第二章多面体和旋转体的教材内容是第一章直线和平面位置关系的具体化, 在这一章中不仅能进一步培养学生的空间想象力, 还可以使第一章学过的内容得到进一步巩固。在讲各种多面体和旋转体的性质时, 教材中虽省略了证明, 但教师应引导学生明确它与第一章有关定理的关系, 以保证学生理解这些性质并进一步熟悉第一章有关定理的应用。

本册教材的证明方法, 除大量使用直接证法外, 还运用了间接证法的反证法, 其中个别命题的证明, 虽用了同一思想, 但仍采用反证法的叙述。教学中应要求学生会用反证法, 至于同一思想的应用, 只限于课本的程度, 不要求出现同一法的名词, 也不要求学生掌握利用同一法证题。

教师在使用本册教材教学时, 应该注意把握其主要的目的要求, 不宜求全求严, 扩大教材内容。对于主要概念, 一定要使学生理解实质, 弄清概念间的区别与联系。对于主要定理, 要着重让学生掌握它们的条件、结论、证明过程和应用。

教师要明确教材中采用的扩大公理的目的。教材把“平行于同一条直线的两条直线互相平行”, “长方体的体积等于它的长、宽、高的积”, 祖暅原理作为公理, 其目的在于, 精简

这个命题的预备命题，或一些在学生认识上并不认为必要的繁复的证明，节约了课时，以保证学生集中精力来学习其他重要内容。关于几何中研究对象的存在性的证明问题，经验证明，高中一年级学生，并不感到它是必要的，对此课本中一般是采用直观上承认的办法，也不要求教师加以证明。关于唯一性，课本已从理论上加以说明了的，不要求学生完全掌握，有关内容也不要扩大，限制于课本范围为宜。课本中例、习题中用文字叙述形式出现的命题，在证明后，均可作为证题的根据。

关于课本中四类习题的用法，已写在课本前的说明中，希望教师切实按照这些说明，结合班级具体情况，注意因材施教，避免加重学生的负担。

这本教学参考书，每章分以下几项内容：

教学要求 结合教材内容，提出本章的基础知识、培养能力的要求以及思想教育的要求。

教材分析和教学建议 按章说明这一章教材的主要内容，指出这些内容间的联系和作用，分析教材的重点、难点和关键，提出课时分配的参考意见；按节分条说明对教材的理解，提出教学建议。

习题的答案、提示和解答 对于教材中练习、习题、复习参考题和总复习参考题的题目，简单的给出答案，稍难的给以提示或略解，较难的给出解答。

附录(参考资料) 与教材内容有关且有参考价值的内容；与教材内容有关的数学史料。这部分内容仅供教师参考，不是课堂上给学生讲解用的。

目 录

说明	1
第一章 直线和平面	1
I 教学要求	1
II 教材分析和教学建议	1
一 平面	4
二 空间两条直线	10
三 空间直线和平面	14
四 空间两个平面	22
小结	29
III 习题的答案、提示和解答	32
IV 附录	61
一 演绎法与归纳法, 直接证法与间接证法	61
二 与直观图画法有关的初步知识	64
第二章 多面体和旋转体	72
I 教学要求	72
II 教材分析和教学建议	73
一 多面体	75
二 旋转体	82
三 多面体和旋转体的体积	92
小结	99
III 习题的答案、提示和解答	102
IV 附录	148
一 祖暅原理和祖暅求积法	148
二 辛卜生公式的证明	151
总复习参考题解答	155

第一章 直线和平面

I 教学要求

1. 使学生掌握平面的基本性质, 空间两条直线、直线和平面、两个平面的位置关系(特别是平行和垂直关系), 以及它们所成的角与距离等概念;

2. 使学生能运用上述概念、有关直线和直线、直线和平面、平面与平面的位置关系的平行、垂直关系的性质和判定, 进行论证和解决有关的实际问题, 以进一步发展学生的逻辑推理能力, 培养学生的空间想象力, 以及有根有据、实事求是等严肃的科学态度和品质;

3. 使学生在掌握用斜二测投影画水平放置的平面图形直观图的基础上, 能够画出空间直线和平面的各种位置关系的直观图, 以培养他们的空间想象力;

4. 通过教材的实例抽象出概念, 再进行推理、判断得出定理, 再由概念、定理去解决实际问题的教学思想, 使学生进一步认识到数学知识来源于实践并服务于实践; 又从线线关系、线面关系、面面关系的内在联系逐步培养学生的辩证唯物主义观点.

II 教材分析和教学建议

本章教材是在学生已有平面图形知识的基础上, 研究空

间直线和平面的位置关系。空间直线和平面的位置关系既是学习多面体和旋转体的基础知识，又是学生树立空间观念的基础。由于它既是开头课，又是基础，所以学生对本章内容理解和掌握得如何，是能否学好立体几何的关键。教师要注意到这一点，教学中务求使学生学懂。

本章教材分为四大节：平面，空间两条直线，空间直线和平面，空间两个平面。第一大节主要研究平面的基本性质、水平放置的平面图形的直观图的画法；第二大节主要研究空间两条直线的位置关系、平行直线、两条异面直线所成的角；第三大节主要研究直线和平面的位置关系，直线和平面平行的判定与性质、直线和平面垂直的判定与性质、斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、三垂线定理；第四大节主要研究两个平面的位置关系、两个平面平行的判定和性质、二面角、两个平面垂直的判定和性质。这四大节之间紧密联系着。前一大节的内容是研究后几大节内容的理论根据，后一大节内容既巩固了前一大节的知识，又发展和推广了论证根据。由此逐节地发展和推广，得到了一整套直线和平面位置关系的概念、判定和性质，这就为下面研究多面体和旋转体概念、性质、直观图画法、面积和体积公式奠定了理论基础。

本章教材的重点是平面的基本性质，两条直线、直线和平面、两个平面的平行和垂直关系。其中平面的基本性质和平面的确定，是研究立体几何的基础，因为当判定一个空间图形是一个平面图形后，就可以运用平面几何知识进行研究。所以学好本章第一大节是学好立体几何的基础。

使学生建立空间观念是本章教学的难点。学生刚学完平

面几何，习惯于平面几何的观念，往往从平面几何的角度来理解空间图形的问题，常把空间图形看成平面图形，并且对于在平面内画出空间图形未受过训练，因而在教学中要注意从学生熟悉的事例引进，要多运用模型进行分析和画图，要指导学生正确地画出空间图形，比较它们和平面图形的异同，要注意联系平面几何知识，逐步从已知引到未知，对于一些类似的性质和图形，注意应用对比的方法，区别其异同，指出其特点。本章教学时，可要求学生准备纸板三块（代平面用），竹针四根（代直线用），随时指导他们进行模型演示，进行观察分析，并指导他们画出图形，就这样从模型到图形，再从图形到模型，逐步培养学生认识空间图形的能力，也就可以使学生逐步地建立起空间观念。就本章具体教材而言，异面直线的概念和所成的角，二面角的平面角是学生比较难接受的概念。

本章教学时间约需 28 课时，具体分配如下（仅供参考）：

- | | |
|--------------------------|----------|
| 1.1 平面(连引言) | 约 1 课时 |
| 1.2 平面的基本性质 | 约 2 课时 |
| 1.3 水平放置的平面图形的直观
图的画法 | 约 2 课时 |
| 1.4 两条直线的位置关系 | 约 1 课时 |
| 1.5 平行直线 | 约 2 课时 |
| 1.6 两条异面直线所成的角 | 约 2 课时 |
| 1.7 直线和平面的位置关系 | } 约 3 课时 |
| 1.8 直线和平面平行的判定与性质 | |
| 1.9 直线和平面垂直的判定与性质 | 约 2 课时 |

1.10	斜线在平面上的射影, 直线和平面所成的角	约 1 课时
1.11	三垂线定理	约 2 课时
1.12	两个平面的位置关系	约 3 课时
1.13	两个平面平行的判定和性质	
1.14	二面角	约 1 课时
1.15	两个平面垂直的判定和性质	约 3 课时
	小结和复习	约 3 课时

一 平 面

1.1 平面

1. “平面”是一个只描述而不定义的最基本的概念, 教学时应向学生着重指出, 数学中所说的平面在空间是无限伸展着的. 对初学者来讲, 理解平面的无限伸展性是一个难点, 因为学生日常接触到的很多平的面的实例都只是平面的一部分; 用平行四边形来表示平面时, 也只能画出平面的一部分, 所以学生往往把平面理解成是有限的有边界的, 因而有时错误地认为两个平面相交于一条线段或一点. 解决这个难点的途径有二:

(1) 向学生指出: 对平面的无限伸展性, 可以联系直线是无限延伸的去理解, 平面把空间分成两部分.

(2) 在讲平面的基本性质时, 都要提到直线在平面内的问题, 这时可再向学生指出: 直线是无限延伸的, 如果平面有限, 那直线怎么能在平面内呢? 借以加强学生对平面的无限

伸展性的认识.

2. 在讲“通常画平行四边形表示平面”时,要结合实际画图,逐步向学生强调下列各点:

(1) 所画的平行四边形是表示它所在的整个平面,需要时,我们可以把它扩展出去,这同画直线一样,直线是可以无限延伸的,但在画图时,也只能画一段来表示直线.

(2) 加“通常”两字的意思,是因为有时根据需要也可用其他的平面图形,如菱形、封闭的曲线图形等表示平面.

(3) 画表示水平平面的平行四边形时,通常把它的锐角画成 45° ,横边画成邻边的两倍.但在画图时,可根据图形的不同需要来画,并不强求一律.如果画非水平的平面时,只要画成平行四边形(画直立的平面时,要有一组对边为铅垂线)即可.画相交平面时,一定要画出它们的交线.

3. 当用一个希腊字母表示平面时,字母常写在平行四边形的一个锐角内,并且不被其它平面遮住的地方.用语言叙述时,在字母前面可加上“平面”二字,但为了简单,在不发生误会的情况下,也可以不加.

4. 立体几何中,被遮住的部分可画成虚线或不画.为了不产生混淆,立体图形的直观图中,辅助线和图形中原有的线同样处理,可见部分不画成虚线.

1.2 平面的基本性质

1. 平面的基本性质是研究空间图形性质的理论基础,必须要求学生牢固掌握.

2. 公理和推论中的“有且只有一个”，学生比较生疏，对这些词作一些简明的解释，能够使学生对所讲的公理、推论的内容理解得更透彻。“有”说明图形是存在的，“只有一个”说明图形是唯一的。数学中的“只有一个”并不保证符合条件的图形一定存在，所以不能用“只有一个”来代替“有且只有一个”。符合某一条件的图形既然存在，而且只能有一个，就说明这个图形完全是确定的，因此“有且只有一个”和“确定”是同义词。例如，在数学中，如果仅说“有一个平面”只说明存在一个平面，而不能说只有一个平面，如果说“只有一个平面”是说的话顶多只有一个，但不保证平面存在。

3. 公理 1 除可以用来判定直线是否在平面内之外，还可用来检验平面。例如木工常用曲尺来检查工作物的表面是不是平的面时，他们把曲尺的直边紧靠在所要检查的面上任意滑动，如果曲尺的直边和面处处密合，这个面就是平的；如果曲尺的直边和面有一处不能密合，这个面就不是平的。

4. 讲公理 2 时，应紧紧抓住平面在空间是无限伸展着的这一特征来讲。应使学生明确如果两个平面相交，它们就交于一条直线。应特别强调如果两个平面有一个公共点，它们就有过这个点的一条交线。也只有这一条交线。

5. 公理 3 实际上是给出了确定平面的条件。讲解时，应突出“不在同一直线上”和“三点”几个字。可引导学生明确过一点、两点或在同一直线上的三点都可以有无数个平面，只有过不在一条直线上的三点才有且只有一个平面。过四点不一定有平面，也不一定只有一个平面。这样不但可以让学生体会到“不在一直线上的三点”这一条件的重要性，还可加深

对“有且只有一个”的理解。

确定平面是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要条件，因为我们研究空间图形的时候，往往是将有关点、线归结到一个平面内，再利用平面图形的性质来解决，所以不掌握确定平面的条件，这样转化就不容易实现。

6. 这一节内，使用了 $\in$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ 等符号，它们是借用的集合符号，读法上仍用几何语言。如 $A \in a$ ，读作“点 A 在直线 a 上”； $\alpha \cap \beta = a$ ，读作“平面 α 、 β 相交于直线 a ”。课本中在后面使用的这类符号也按同一办法处理。

这些符号是借用集合的符号，使用时原则上不违背集合符号的含意，但有时为了简便起见，个别地方的记法有不同，如后面用到的 $a \cap b = A$ 、 $a \cap \alpha = A$ ，我们对点 A 不使用 $\{A\}$ 的记法。一方面把一个点的集合和一点混同在几何概念上不会产生矛盾，它们反映在图形上都是一点；另一方面，集合的符号也可以用一个大写字母来表示。对学生说明时，只要讲清楚是借用集合符号，并在读法上不使用集合语言而使用几何语言就可以了。

也有些集合符号，我们并不使用，例如空集 $\emptyset$ 、并集符号 $\cup$ 等。

7. 公理3的推论2和推论3的证明如下：

推论2 经过两条相交直线，有且只有一个平面。

证明：如图1-1，设直线 a 、 b 相交于点 A ，在 a 、 b 上分别取不同于点 A 的点 B 、 C ，得不在一直线上的三点 A 、 B 和 C 。过这三点有且只有一个平面 α （公理3）。因为 a 、 b 各有两点在平面 α 内，所以 a 、 b 在平面 α 内。因此平面 α 是过相交直

线 a, b 的平面.

如果过直线 a 和 b 还有另一个平面 β , 那么 A, B, C 三点也一定都在平面 β 内. 这样, 过不在一条直线上的三点 A, B, C 就有两个平面 α, β 了, 这和公理 3 矛盾, 所以过直线 a, b 的平面只有一个.

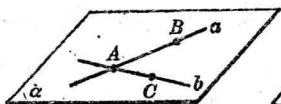


图 1-1

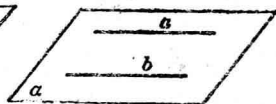


图 1-2

推论 3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面(图 1-2).

证明: 因为当两条直线在同一平面内, 且不相交时叫做平行线, 所以两条平行直线 a 和 b 必在某个平面 α 内. 就是说, 过两条平行直线有一个平面.

如果过 a 和 b 还有一个平面 β , 那么在 a 上的任意一点 A 一定在 β 内, 这样过点 A 和直线 b 有两个平面 α 和 β , 这和推论 1 矛盾, 所以过平行直线 a 和 b 的平面只有一个.

名 称	作 用
平面的基本性质 1(公理 1)	判定直线在平面内的依据
平面的基本性质 2(公理 2)	两个平面相交的依据
平面的基本性质 3(公理 3)及三个推论	确定一个平面的依据

8. 讲完有关平面的三个公理和三个推论后,也可用上表进行一次小结,使学生对平面的基本性质有个全面的认识。

1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法

1. 水平放置的平面图形的直观图的画法,指的是在纸上或黑板上画空间的这种图形的方法,它是后面柱、锥、台、球等直观图画法的基础。一般地说,正确的图形,对理解问题很有帮助,在立体几何中,正确地画出直观图,同样是十分重要的。

2. 关于“直观图”可向学生指出:把空间图形在平面内画得既富有立体感,又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形,就是直观图。

3. 关于直观图画法,由于本章不涉及圆的问题,所以只学习斜二测画法,正等测画法到第二章画圆柱、圆锥、圆台时再出现。这样,在平面图形直观图画法的系统上显得有些间隔,但正等测画法规则与它的应用结合比较紧密,这从教学上来说可能是有利的。用斜二测画法画直观图的方法,课本也是分两次介绍的,在1.3节先讲平面图形的画法,在2.1节再讲空间图形的画法。

4. 画直观图时,不管用什么方法,都需多次画平行线,学生往往凭目视图,这样就不够准确,建议在教学中,严格要求,用两块三角板画平行线给学生示范,培养学生正确的画图习惯。在一开始画图时就应对学生严格要求,养成良好的习惯。

5. 对于立体几何的基本语句一开始就应抓紧训练,教学中应将各种语句列出,严格要求,逐步培养。

二 空间两条直线

1.4 两条直线的位置关系

1. 空间两条直线的位置关系,是在学生已经学过同一平面内的两条直线不相交就平行,及前面刚讲过平面的基本性质的基础上提出来的. 它既是研究直线和直线、直线和平面、平面和平面各种位置关系的开始,又是学习这些位置关系的基础,因此对本节教材应予以足够的重视. 从现在起,要提醒和帮助学生处处从空间来考虑问题,逐步改变学生只在一个平面内考虑问题的习惯.

2. 本小节的重点和难点是异面直线的概念. 教学时应抓住这个主要矛盾. 在讲异面直线定义之前,可先复习一下在同一平面内两条不重合直线的位置关系,进而通过对实物的观察,使学生了解不在同一平面内的直线是大量存在的,从而抽象出异面直线的概念. 讲解时应向学生指出:

(1) “不同在任何一个平面内的两条直线”,是指这两条直线不能同在任何一个平面内的意思,画在某两个平面内的直线,也有可能同时在另一个平面内,因而不是异面直线.

异面直线既不能在同一平面内,当然它们不相交也不平行.

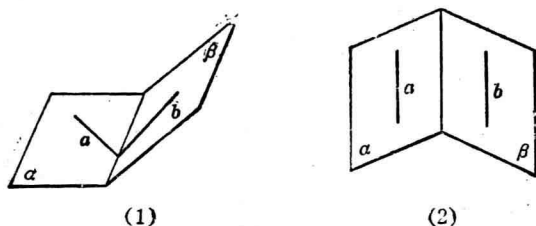


图 1-3

(2) 分别在某两个平面内的两条直线, 不一定是异面直线, 它们可能是相交线, 如图 1-3(1), 也可能是平行线, 如图 1-3(2).

(3) 画异面直线时, 以辅助平面作衬托, 可使两直线不能共面的特点显示得更清楚, 如图 1-4(1), 否则就会分不清是不是异面直线了, 如图 1-4(2).

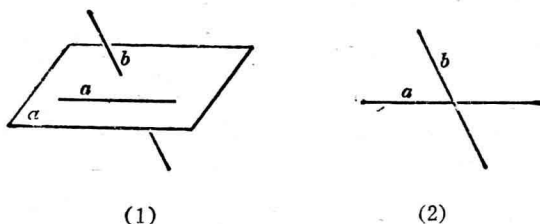


图 1-4

3. 空间两条不重合的直线有三种位置关系, 若从公共点的数目方面看, 可以分为:

- (1) 只有一个公共点——相交直线;
- (2) 没有公共点 $\begin{cases} \text{平行直线,} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

若从平面的基本性质方面看, 可以分为:

- (1) 在同一平面内 $\begin{cases} \text{相交直线,} \\ \text{平行直线;} \end{cases}$
- (2) 不在同一平面内——异面直线.

课本中的分法是上述两种分法的综合.

1.5 平行直线; 1.6 两条异面直线所成的角

1. 公理 4 在传统教材里是定理, 由于证明较繁, 而结论又很明显, 所以课文中把它当作公理了. 它是证明“对应边平行且方向相同的两个角相等”这个定理的基础, 也是今后论证平行问题的主要根据. 两条异面直线所成的角, 是研究空间两条直线互相垂直、直线和平面垂直、三垂线定理等的基础.

2. 两条异面直线既不相交, 但又有所成的角, 这对于初学立体几何的学生来说, 是难以理解的, 所以两条异面直线所成的角也是学习的一个难点. 讲解时, 应首先使学生明了学习异面直线所成角的概念的必要性. 同两条相交直线可用夹角来表示它们的相互位置一样, 两条异面直线的相互位置也可用它们所成的角来表示, 例如要表示大桥上火车的行驶方向与桥下轮船航行方向间所成的角, 就要用到两条异面直线所成的角的概念.

3. “等角定理”(指的是课本第 12 页上的定理)给两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与唯一性, 即过空间任意一点引两条直线分别平行于两条异面直线, 它们所成的锐角(或直角)都是相等的, 而与所取点的位置无关, 所以把“等角定理”放在两条异面直线所成的角前面讲.

4. 对于两条异面直线所成的角的定义, 需要说明如下三点(如课本图 1-17):

(1) 我们取直线 a' 、 b' 所成的锐角(或直角)作为异面直线 a 、 b 所成的角.

(2) 在这个定义中, 空间一点是任意选取的. 根据等角定理, 可以肯定异面直线 a 和 b 所成的角和 a' 和 b' 所成的锐