高等院校经典教材全程同步辅导用书
配套《概率论与数理统计教程》第四版 沈恒范 编

概率论与数理统计教程

（第四版）

课后习题同步精解

孙志荣 编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等院校理工类教材全程同步辅导用书

概率论与数理统计教程

（第四版）

课后习题同步精解

孙志荣 编

北京航空航天大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程(第四版)课后习题同步精解/孙志荣编. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5124-0896-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①概率论—高等学校—题解 ②数理统计—高等学校—题解 Ⅳ. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 173713 号

概率论与数理统计教程

(第四版)

课后习题同步精解

孙志荣 编

责任编辑：葛瑞英

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net 邮购电话：(010)82316936

三河市华润印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：710×1 000 1/16 印张：12 字数：249 千字

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷 印数：4500 册

ISBN 978-7-5124-0896-8 定价：16.80 元

前　　言

“概率论与数理统计”是大学数学类、统计类以及经济类相关专业的基础课程，是考研数学的一部分。由高等教育出版社出版、沈恒范编写的《概率论与数理统计教程》（第四版）是该专业课的经典教材，被很多高校采用。

本书是为沈恒范编写的《概率论与数理统计教程》（第四版）配套的课后习题精解答案书，按照该教材各章的课后习题编排。每个题目后紧跟分析部分，包括解题思路、所用的原理和方法，并且指出与教材对应的知识点；对相应的课后题做出了详细解答。

该辅导书旨在帮助读者提高自身的习题分析能力和解题能力，学会基本的解题方法和技巧，深化对概率论与数理统计相关基本知识的理解和巩固，从而更好地学习该课程，提高应试能力。

本书可以作为大学相关专业的学生学习“概率论与数理统计”课程的参考书，相关专业考试的复习用书，也可以作为教授本课程的老师备课和批改作业时的参考用书。由于作者水平有限，书中难免有不足之处，对于书中不妥和疏漏的地方，希望读者批评指正，提出意见。

孙志荣

2012 年 6 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

1.1　任意抛掷一颗骰子，观察出现的点数．设事件 A 表示“出现偶数点”，事件 B 表示“出现的点数能被 3 整除”．

(1)写出实验的样本点及样本空间；

(2)把事件 A 及 B 分别表示为样本点的集合；

(3)下列事件：

$$\overline{A},\overline{B},A\cup B,AB,\overline{A\cup B}$$

分别表示什么事件？并把它们表示成样本点的集合．

【分析】实验结果中每一个可能发生的事件叫做实验的样本点，所有样本点构成的集合叫做样本空间．熟记事件的交、并、互斥的关系．

解：(1)把抛掷一次骰子作为一次随机试验，则会出现 6 个不同的点数，即“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”．

样本点为 $\omega_i=$“出现的点数为 i”，$i=1,2,3,4,5,6$. 样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}.$$

(2)A 表示“出现偶数点”，即

$$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\},$$

B 表示“出现的点数能被 3 整除”，即

$$B=\{\omega_3,\omega_6\},$$

(3)$\overline{A}$表示“出现奇数点”，即$\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，

$\overline{B}$表示“出现的点数不能被 3 整除”，即$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$，

$A\cup B$ 表示“点数为偶数或点数能被 3 整除”，即 $A\cup B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$，

AB 表示“点数为偶数且能被 3 整除”，即 $AB=\{\omega_6\}$，

$\overline{A\cup B}$表示“点数不是偶数且不能被 3 整除”，即$\overline{A\cup B}=\{\omega_1,\omega_5\}$.

1.2　设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1)仅 A 发生；

(2)A、B、C 都发生；

(3)A、B、C 都不发生；

(4)A、B、C 不都发生；

(5)A 不发生，且 B、C 中至少有一事件发生；

(6)A、B、C 中至少有一事件发生；

(7)A、B、C 中恰有一事件发生；

(8)A、B、C 中至少有两事件发生；

(9)A、B、C 中最多有一事件发生．

【分析】"发生"和"不发生"是互斥事件，有些情况从对立事件考虑问题，表示方法会变得很简便．

解:(1)A 发生，B、C 不发生，表示为 $A\overline{BC}$.

(2)ABC.

(3)$\overline{ABC}$.

(4)A、B、C 不都发生的对立事件为都发生，因此表示为$\overline{ABC}$.

(5)A 不发生且 B 发生或者 C 发生，表示为$\overline{A}(B\cup C)$.

(6)A、B、C 中至少有一事件发生是三个事件的并 $A\cup B\cup C$.

(7)是三个互不相容事件 $A\overline{BC}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{AB}C$ 的并，表示为 $A\overline{BC}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{AB}C$.

(8)可以理解为 AB、BC、AC 至少有一事件发生，表示为 $AB\cup BC\cup AC$.

(9)其对立事件为 A、B、C 中至少有两事件发生，按照(8)的表示方法，可以表示为$\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

1.3 袋中有 10 个球，分别写有编号 1～10，其中 1,2,3,4,5 号球为红球；6,7,8 号球为白球；9,10 号球为黑球．设试验为：

(1)从袋中任取一个球，观察其颜色；

(2)从袋中任取一个球，观察其号码．

分别写出试验的基本事件及样本空间，并指出样本空间中的基本事件是否是等可能的．

【分析】研究对象不同，因此样本空间也不同．由于某种对称性，使得若干随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是相同的，则称这些事件是等可能的.

解:(1)由于袋中有三种不同颜色的球，因此任意取出一个球，观察其颜色的基本事件有 3 个：

$\omega_1=$"取出的球为红色"，$\omega_2=$"取出的球为白色"，$\omega_3=$"取出的球为黑色"，
则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},$$

由于袋中三种颜色的球的个数是不同的，因此它们不是等可能的．

(2)因为口袋中有 10 个不同的号码，因此任意取出一个，观察其号码的基本事件有 10 个，$\omega_i=$"取出的球的号码为 i"($i=1,2,3,\cdots,10$)，则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,.\omega_{10}\},$$

不同号码的球各只有一个，因此这 10 个基本事件是等可能的．

1.4 电话号码由 7 个数字组成，每个数字可以是 0,1,2,…,9 中的任一个数字(但第一个数字不能为 0)，求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率．

【分析】先求出基本事件总数，再求满足条件的基本事件数，第一位有 9 种选法，后六位数是 9 个剩余数字的全排列．

解:由于第一个数字不能为 0，因此第一个数字有 9 种选择 P_9^1，后 6 位数字的选取方法共有 10^6 种，因此基本事件的总数为 $N=P_9^1 10^6$.

如果电话号码数字完全不同，则第一位数字的选法为 P_9^1，后 6 位数从剩余的 9 个数字里面做全排列 P_9^6，则包含的基本事件数为 $M=P_9^1\cdot P_9^6$.

则电话号码是由完全不相同的数字组成的概率为 $P=\dfrac{P_9^1\cdot P_9^6}{P_9^1\cdot 10^6}\approx 0.0605$.

1.5　把 10 本书任意地放在书架上，求其中指定的 3 本书放在一起的概率.

【分析】本题可利用捆绑的思想，将指定的三本书看作一个整体，再和剩余的 7 本书做全排列，其中指定的三本书的排列方法有 3!种.

解：10 本书任意放置的总的基本事件数为 10!.

将指定 3 本书放在一起，即事件 A 的基本事件数为 $8!\times 3!$，因此

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}\approx 0.0667.$$

1.6　为了减少比赛场次，把 20 个球队任意分成两组（每组 10 队）进行比赛，求最强的两队被分在不同组内的概率.

【分析】先考虑总的基本事件数是从 20 个球队里任意选取 10 个，再考虑有利事件的基本事件数，即从 2 个强队里任意选出一组，再从剩余的 18 个队中任意选出 9 组的选法数.

解：从 20 个球队里任意选出 10 个队分成一组，剩余的 10 个队为第二组的总的基本事件数为

$$N=C_{20}^{10}$$

用 A 表示两个强队不在同一组内，则可以先从这两个强队中任意选出一队，再从剩余的 18 个队中任意选出 9 组，则事件 A 的基本事件数为 $M=C_2^1C_{18}^9$，则最强的两队被分在不同组内的概率为

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}}\approx 0.5263.$$

1.7　在桥牌比赛中，把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家（每家 13 张牌），求北家的 13 张牌中：

(1)恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花的概率；

(2)恰有大牌 A、K、Q、J 各 1 张，其余为小牌的概率.

【分析】先考虑基本事件总数为 52 张牌全排列的方法数，结合每种花色有 13 张牌，每家有 13 张牌，得出有利事件的基本事件数，第二小问结合每个数字的牌只有 4 张得出基本事件数.

解：52 张牌任意发放的基本事件数为 $N=52!$.

(1)设 A 表示北家恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花的概率，从各个花色中分别选择满足条件的牌的张数，则其基本事件数为

$$M=C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1\times 13!\times 39!,$$

因此
$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1\times 13!\times 39!}{52!}\approx 0.00539.$$

(2)用 A' 表示北家恰有大牌 A、K、Q、J 各一张，其余为小牌的概率，则北家的

牌可以先从每 4 张 A、K、Q、J 中各选一张，再从 36 张小牌中选 9 张，则其基本事件数为

$$M'=(C_4^1)^4C_{36}^9\times 13!\times 39!,$$

因此 $$P(A')=\frac{M'}{N}=\frac{(C_4^1)^4C_{36}^9\times 13!\times 39!}{52!}\approx 0.03795.$$

1.8 将 3 个球随机地投入 4 个盒子中，求下列事件的概率：

(1)A——任意 3 个盒子中各有 1 个球；

(2)B——任意 1 个盒子中有 3 个球；

(3)C——任意 1 个盒子中有 2 个球，其它任意 1 个盒子中有 1 个球.

【分析】可以从选盒子和选小球两个方面同时考虑，即先选出满足条件的盒子数，再选择适当数目的小球放入选好的盒子中.

解:3 个小球都可以随机投放到 4 个盒子中的任意一个，因此总的基本事件数为 $N=4^3=64$.

(1)从 4 个盒子中任意选出 3 个，将 3 个小球全排列，A 的基本事件数为

$$M_1=C_4^3\cdot P_3^3$$

则事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{M_1}{N}=\frac{C_4^3\cdot P_3^3}{64}\approx 0.375.$

(2)从 4 个盒子中任意选出 1 个，将 3 个小球全部放入，A 的基本事件数为

$$M_2=C_4^1=4$$

则事件 A 的概率为 $P(B)=\frac{M_2}{N}=\frac{C_4^1}{64}\approx 0.0625.$

(3)从 4 个盒子中任意选出 1 个，从 3 个小球中选出 2 个投入到选出的 1 个盒子中，剩下的 1 个小球随机投放到剩下的三个盒子中，C 的基本事件数为

$$M_3=C_4^1\cdot C_3^2\cdot C_3^1,$$

则事件 A 的概率为 $P(C)=\frac{M_3}{N}=\frac{C_4^1\cdot C_3^2\cdot C_3^1}{64}\approx 0.5625.$

1.9 同时掷四个均匀的骰子，求下列事件的概率：

(1)A——四个骰子的点数各不相同；

(2)B——恰有两个骰子的点数相同；

(3)C——四个骰子的点数两两相同，但两对的点数不同；

(4)D——恰有三个骰子的点数相同；

(5)E——四个骰子的点数都相同.

【分析】先求出总的基本事件数，再结合将骰子随机配对成组，讨论各个事件含有的基本事件数，每个骰子有 6 个不同的点数.

解:每次投掷一颗骰子，都有可能出现 6 个不同的点数，共有 4 颗骰子，同时投掷出现的点数共有 6^4 种，因此总的基本事件数为 $N=6^4$.

(1)事件 A 包含的基本事件数为

$$M_1=C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1=360.$$

因此事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{M_1}{N}=\dfrac{C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1}{6^4}\approx 0.2778$.

(2)先从 4 个骰子中任意选 2 个点数相同组成一组的方法数为 $C_4^2\times 6$,与另外两个骰子点数不同的事件 B 包含的基本事件数为

$$M_2=C_4^2\times 6\times C_5^1C_4^1=720,$$

因此事件 B 发生的概率为:$P(B)=\dfrac{M_2}{N}=\dfrac{C_4^2\times 6\times C_5^1C_4^1}{6^4}\approx 0.5556$.

(3)将 4 个骰子两两组成一组的方法数为 $\dfrac{1}{2}C_4^2$,满足点数不同的条件共有 $C_6^1C_5^1$ 种不同情况,因此事件 C 包含的基本事件数为

$$M_3=\frac{1}{2}C_4^2\times C_6^1C_5^1=90,$$

因此事件 C 发生的概率为 $P(C)=\dfrac{M_3}{N}=\dfrac{\frac{1}{2}C_4^2\times C_6^1C_5^1}{6^4}\approx 0.0694$.

(4)从 4 个骰子中任意选出 3 个的方法数为 C_4^3,并且与另一个点数不同的情况共有 $C_6^1C_5^1$ 种,因此 D 包含的基本事件数为

$$M_4=C_4^3\times C_6^1C_5^1=120,$$

因此事件 D 发生的概率为 $P(D)=\dfrac{M_3}{N}=\dfrac{C_4^3\times C_6^1C_5^1}{6^4}\approx 0.0926$.

(5)四个骰子的点数都相同的情况共有 6 种,因此事件 E 发生的概率为

$$P(E)=\frac{M_4}{N}=\frac{6}{6^4}\approx 0.0046.$$

* **1.10**　在半径为 R 的圆内画平行弦.如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的,求任意画的弦的长度大于 R 的概率.

【分析】本题属于几何概率的问题,总的基本事件数为所有平行弦与直径交点的区域,满足给定条件的基本事件数是长度大于 R 的弦与直径交点的区域.

解:设直角坐标系的原点是圆心,取一条与 x 轴重合的直径 AB,则与直径 AB 垂直的弦与 AB 的交点都在 x 轴上.设交点的横坐标为 x,如图 1-1 所示.

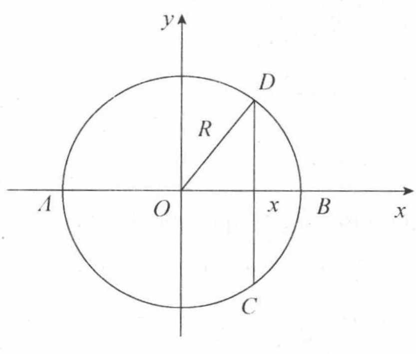

图 1-1

弦与垂直于弦的直径的交点区域为 x 轴上的$(-R,R)$,设事件 M 代表弦的长度大于R,则它的横坐标应满足条件

$$弦长=2\sqrt{R^2-x^2}>R,$$

则交点横坐标,即满足条件的基本事件区域为

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}R<x<\frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

所求概率为弦的长度大于 R 时交点区域$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R,\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$与所有弦交点区域$(-R,R)$的比值,即

$$P(M)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866.$$

*1.11　把长度为 a 的棒任意折成三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

【分析】总的基本事件数为所截成的三段长度均比 a 短,如果要构成三角形,必须满足三角形三边关系,即任意两边长度之和大于第三边.

解:设所截成的三段长度分别为 $x,y,a-x-y$,根据题意,满足

$$0<x<a,0<y<a,0<a-x-y<a,$$

即

$$0<x<a,0<y<a,0<x+y<a.$$

将(x,y)视为直角坐标系里的一个点的坐标,则上述三个式子可以构成坐标系里的一个三角形区域,作为总的基本事件. 如图 1-2 所示.

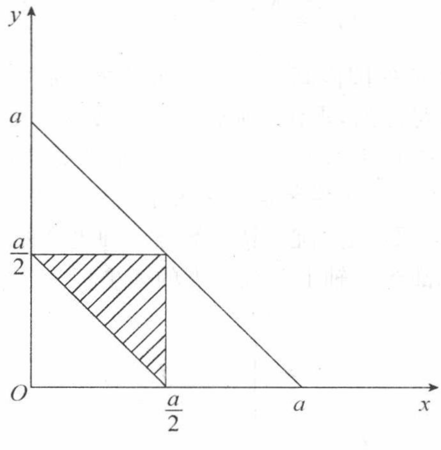

图 1-2

如果设事件 A 为所折成的三段构成三角形,则满足

$$y+(a-x-y)>x,x+(a-x-y)>y,x+y>a-x-y,$$

即

$$x<\frac{a}{2},y<\frac{a}{2},x+y<\frac{a}{2}.$$

上述三个不等式构成另一个小的三角形区域,作为事件 A 的基本事件数,则

根据几何概型，基本事件总数用大三角形的面积 $S=\frac{1}{2}a^2$ 表示，事件 A 的基本事件数用小三角形的面积 $s=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{8}$表示，根据古典几何概型可得，所求概率为

$$P(A)=\frac{s}{S}=\frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}}=0.25.$$

*1.12　甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊，它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的．如果甲船的停泊时间是一小时，乙船的停泊时间是两小时，求它们中的任何一艘都不需要等候码头空出的概率．

【分析】把甲乙两艘船到达的时间分别设为 x,y，根据时间关系列出二者满足的不等式，将(x,y)视为直角坐标系里的一个点的坐标，根据不等式找到满足条件的区域，根据古典概型求概率．

解：设甲乙两艘船到达的时间分别为 x,y，并把(x,y)视为直角坐标系里的一个点的坐标，x,y 满足条件

$$0\leqslant x\leqslant 24, 0\leqslant y\leqslant 24.$$

则总的基本事件数为坐标系中边长为 24 的正方形的面积，如图 1-3 所示．

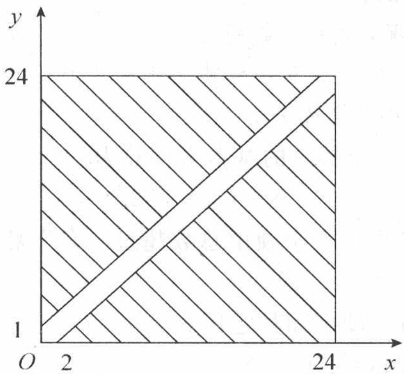

图 1-3

用 A 表示事件“两艘船中任何一艘都不需要等候码头空出”，则 x,y 满足不等式

$$y-x\geqslant 1, x-y\geqslant 2.$$

则上述不等式组表示的区域为图 1-3 中阴影部分的面积，即事件 A 的基本事件数．

容易求得正方形面积为 $S=24^2$，阴影部分面积为 $s=\frac{1}{2}\times 22^2+\frac{1}{2}\times 23^2$，根据几何概型，可得

$$P(A)=\frac{s}{S}=\frac{\frac{1}{2}\times 22^2+\frac{1}{2}\times 23^2}{24^2}\approx 0.879.$$

1.13 某工厂生产的一批产品共100个，其中有5个次品．从这批产品中任取一半来检查，求发现次品不多于1个的概率．

【分析】将事件“发现次品不多于1个”分成两个互斥事件的并，即没有发现次品和只发现了1个次品．

解：从这批产品中任意取出50个进行检查，则基本事件总数为

$$N=C_{100}^{50}.$$

设 A 表示事件“发现次品的个数为0”，其包含的基本事件数为

$$M=C_{95}^{50},$$

用 A' 表示事件“发现次品的个数恰好是1”，其包含的基本事件数为

$$M'=C_5^1C_{95}^{49},$$

则满足条件“发现次品不多于1个的”基本事件数为 $C_{95}^{50}+C_5^1C_{95}^{49}$，因此

$$P(A+A')=\frac{C_{95}^{50}+C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}\approx 0.181.$$

1.14 袋内放有2个伍分的钱币，3个贰分的钱币，5个壹分的钱币．任取其中5个，求总数超过一角的概率．

【分析】根据实际情况，如果总数超过一角，则5个硬币里至少要有1个伍分的，因此可以分成三种情况：2个伍分和其它任意3个；1个伍分加3个贰分1个壹分；1个伍分加2个贰分及2个壹分．

解：从袋中任意取出5个的总的基本事件数为

$$N=C_{10}^5=252.$$

用 A 表示事件“任意取出5个硬币总数超过一角”，将其分成三个互斥事件的和，即

A_1——“取出2个伍分硬币和其它任意3个”，

其包含的基本事件数为 $M_1=C_2^2C_8^3=56$；

A_2——“取出1个伍分硬币，3个贰分硬币和1个壹分硬币”，

其包含的基本事件数为 $M_2=C_2^1C_3^3C_5^1=10$；

A_3——“取出1个伍分硬币，2个贰分硬币和2个壹分硬币”，

其包含的基本事件数为 $M_3=C_2^1C_3^2C_5^2=60$.

因此事件 A 的概率为

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{56+10+60}{252}=0.5.$$

1.15 在桥牌比赛中，定约人(南家)及其同伴(北家)共有9张黑桃，求其余4张黑桃在防守方(东、西两家)手中各种分配情况的概率：

(1)“2-2”分配的概率；

(2)“1-3”或“3-1”分配的概率；

(3)“0-4”或“4-0”分配的概率．

【分析】将黑桃分成两组，只需求出在东家的黑桃总数，剩余的就是在西家的，总的基本事件数为东家从剩余的 26 张牌中任意拿 13 张．

解：基本事件的总数为东家从剩下的 26 张牌中任意拿到 13 张，即

$$N=C_{26}^{13}.$$

(1)设 A_1 表示事件“东家手中有 2 张黑桃和 11 张其它花色的牌”，其包含的基本事件数为 $M_1=C_4^2C_{22}^{11}$，因此事件 A_1 发生的概率为

$$P(A_1)=\frac{M_1}{N}=\frac{C_4^2C_{22}^{11}}{C_{26}^{13}}\approx 0.407.$$

(2)用 A_2 表示所求事件，可以将其分为两个事件的和，即“东家手中有 1 张黑桃和 12 张其它花色的牌”和“东家手中有 3 张黑桃和 10 张其它花色的牌”，其基本事件数分别为

$$M_2=C_4^1C_{22}^{12},\ M_3=C_4^3C_{22}^{10},$$

因此事件 A_2 发生的概率为

$$P(A_2)=\frac{M_2}{N}+\frac{M_3}{N}=\frac{C_4^1C_{22}^{12}}{C_{26}^{13}}+\frac{C_4^3C_{22}^{10}}{C_{26}^{13}}\approx 0.497.$$

(3)令 A_3 表示所求事件，可以将其分为两个事件的和，即“东家手中没有黑桃，只有 13 张其它花色的牌”和“东家手中有 4 张黑桃和 9 张其它花色的牌”，其基本事件数分别为

$$M_4=C_4^0C_{22}^{13},\ M_5=C_4^4C_{22}^{9},$$

因此事件 A_2 发生的概率为

$$P(A_3)=\frac{M_4}{N}+\frac{M_5}{N}=\frac{C_4^0C_{22}^{13}}{C_{26}^{13}}+\frac{C_4^4C_{22}^{9}}{C_{26}^{13}}\approx 0.096.$$

1.16　一批产品共 20 件，其中一等品 9 件，二等品 7 件，三等品 4 件．从这批产品中任取 3 件，求：

(1)取出的 3 件产品中恰有 2 件等级相同的概率；

(2)取出的 3 件产品中至少有 2 件等级相同的概率．

【分析】本题需要应用概率的加法公式计算．第 1 问将事件分成三个互不相容的事件的并，第 2 问可以先考虑其对立事件，再求解．

解：从 20 件产品中任取 3 件，总的基本事件数为

$$N=C_{20}^3=1140.$$

(1)设 A 表示事件“取出的 3 件产品中恰有 2 件等级相同”，则可以将事件 A 分成 3 个互不相容事件的并，即

A_1——“3 件产品中恰有 2 件一等品”，其基本事件数为 $M_1=C_9^2C_{11}^1=396$，

A_2——“3 件产品中恰有 2 件二等品”，其基本事件数为 $M_2=C_7^2C_{13}^1=273$，

A_3——“3 件产品中恰有 2 件三等品”，其基本事件数为 $M_3=C_4^2C_{16}^1=96$.

因此事件 A 发生的概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}+\frac{M_3}{N}\\&=\frac{396}{1140}+\frac{273}{1140}+\frac{96}{1140}\\&\approx 0.671.\end{aligned}$$

(2)用 B 表示"取出的 3 件产品中至少有 2 件等级相同",可以先考虑事件 B 的对立事件,即

$\overline{B}$——"任意两件产品的等级均不相同",则$\overline{B}$包含的基本事件数为

$$M=\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_4^1=252,$$

因此$\overline{B}$发生的概率为 $P(\overline{B})=\dfrac{M}{N}=\dfrac{\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_{20}^3}\approx 0.221.$

由于 B 与$\overline{B}$是对立事件,因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})\approx 1-0.221=0.779.$$

1.17 设 $P(A)>0,P(B)>0$,将下列四个数:

$$P(A),P(AB),P(A\cup B),P(A)+P(B),$$

按由小到大的顺序排列,用符号"$\leqslant$"联系它们,并指出在什么情况下可能有等式成立.

【分析】结合概率的加法公式和事件之间的所属关系作联系.

解:A、AB、$A\cup B$ 之间的所属关系为

$$AB\subset A\subset A\cup B,$$

因此有

$$P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B),$$

根据概率的加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,有

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B),$$

因此四个数由小到大排列为

$$P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

$P(AB)=P(A)$成立的条件是 $AB=A$,即 $A\subset B$.

$P(A)=P(A\cup B)$成立的条件是 $A=A\cup B$,即 $B\subset A$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$成立的条件是 $P(AB)=0$,即 $AB=\varphi$.

1.18 已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.7$,则

(1)在怎样的条件下,$P(AB)$取得最大值?最大值是多少?

(2)在怎样的条件下,$P(AB)$取得最小值?最小值是多少?

【分析】根据事件之间的所属关系,结合乘法公式和加法公式计算.

解:(1)由于

$$AB\subseteq A,AB\subseteq B,$$

因此

$$P(AB)\leqslant P(A),P(AB)\leqslant P(B),$$

即

$$P(AB)\leqslant \min\{P(A),P(B)\}.$$

已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.7$，所以

$$P(AB)\leqslant \min\{P(A),P(B)\}=P(A)=0.5,$$

$P(AB)$的最大值是 0.5，$P(AB)=P(A)=0.5$ 成立的条件是 $AB=A$，即 $A\subset B$.

(2)根据概率的加法原理，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.7-P(AB)=1.2-P(AB)$，

因此可得

$$P(AB)=1.2-P(A\cup B).$$

因为 $P(A\cup B)\leqslant 1$，所以

$$P(AB)=1.2-P(A\cup B)\geqslant 1.2-1=0.2,$$

$P(AB)$的最小值是 0.2，$P(AB)=0.2$ 成立的条件是 $P(A\cup B)=1$，即 $A\cup B=\Omega$.

1.19　在 1～100 共一百个数中任取一个数，求这个数能被 2 或 3 或 5 整除的概率.

【分析】本题考查加法公式，题中"或"表示求的是三个事件的并.

解：所求的事件可以分解成：

A_1——"任取一个数能被 2 整除"，在 1～100 中共有 50 个.

A_2——"任取一个数能被 3 整除"，1～100 这 100 个数中共有 33 个.

A_3——"任取一个数能被 5 整除"，1～100 这 100 个数中有 20 个.

A_1A_2——"任取一个数能被 6 整除"，1～100 这 100 个数中共有 16 个.

A_1A_3——"任取一个数能被 10 整除"，1～100 这 100 个数中共有 10 个.

A_2A_3——"任取一个数能被 15 整除"，1～100 这 100 个数中共有 6 个.

$A_1A_2A_3$——"任取一个数能被 30 整除"，1～100 这 100 个数中共有 3 个.

根据概率的加法公式，有：

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&\quad -P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=\frac{50}{100}+\frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{16}{100}-\frac{10}{100}-\frac{6}{100}+\frac{3}{100}\\&=0.5+0.33+0.2-0.16-0.1-0.06+0.03\\&=0.74.\end{aligned}$$

1.20　在习题 1.7 中，求北家分到的 13 张牌中：

(1)至少缺一种花色的概率；

(2)四中花色都有的概率.

【分析】北家的 13 张牌中至少缺少一种花色，可以分成四个互不相容的事件的并，用 A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示缺少黑桃、红心、方块、草花，应用概率的加法原理计算. 四中花色都有的互逆事件是至少缺一种花色，因此第 2 问可以利用第 1 问的结果.

解：(1)用 A 表示"北家分到的 13 张牌中至少缺一种花色"，

A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示“北家分到的 13 张牌中缺少黑桃(红心、方块、草花)”,则 A 表示成四个互不相容事件 A_1、A_2、A_3、A_4 的并 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$.

如果北家分到的 13 张牌中只缺一种花色,则

$$P(A_i)=\frac{C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}\quad i=1,2,3,4.$$

如果北家分到的 13 张牌中缺两种花色,则

$$P(A_iA_j)=\frac{C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant 4.$$

如果北家分到的 13 张牌中缺三种花色,则

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}}\quad 1\leqslant i<j<k\leqslant 4.$$

北家分到的 13 张牌中不可能四个花色都没有,因此

$$P(A_1A_2A_3A_4)=0.$$

根据概率的加法公式,可得

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\\ &=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}P(A_iA_jA_k)-P(A_1A_2A_3A_4)\\ &=4\times\frac{C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}-6\times\frac{C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}+4\times\frac{C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}}-0\approx 0.0511.\end{aligned}$$

(2)设 B 表示事件“四中花色都有”,由于四中花色都有的互逆事件是至少缺一种花色,因此 B 和 A 互逆,即 $B=\overline{A}$,因此

$$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)\approx 1-0.0511=0.9489.$$

1.21 袋中有 a 个白球与 b 个黑球.每次从袋中任取一个球,取出的球不再放回去,求第二次取出的球与第一次取出的球颜色相同的概率.

【分析】本题考查的是条件概率的定义,因为第一次取出的球没有放回,第二次是在第一次取出的基础上再取出相同颜色,典型的条件概率.

解:设事件 A_1 表示第一次取出的是白球,A_2 表示第二次取出的也是白球,B_1 表示第一次取出的是黑球,B_2 表示第二次取出的也是黑球.

如果两次取出的球颜色相同,则用 $A_1A_2+B_1B_2$ 表示.

不放回抽取属于条件概率,

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\qquad P(A_2|A_1)=\frac{a-1}{a+b-1},$$

即 $$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

$$P(B_1)=\frac{b}{a+b},\qquad P(B_2|B_1)=\frac{b-1}{a+b-1},$$

即 $$P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$