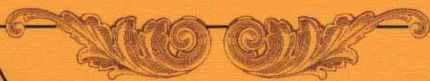


李仲来 主编

*Wangjinggeng
Shu.Xue.Jiao.Yu.Wenxuan*

▼
王敬庚

数学教育文选



王敬庚 著

▼
人民教育出版社



WANG JING GENG

王敬庚

数学
教育
文选

王敬庚 著

人民教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

王敬庚数学教育文选/王敬庚著. —北京:
人民教育出版社, 2011. 12
ISBN 978-7-107-24091-1

I. ①王…

II. ①王…

III. ①数学教学—教学研究—文集

IV. ①01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 253947 号

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销

2011 年 10 月第 1 版 2012 年 2 月第 1 次印刷

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/32 印张: 10.5 插页: 2

字数: 260 千字 印数: 0 001~2 000 册

定价: 22.50 元

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与本社出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

自序

由于受到初中数学老师的影响，我一直喜欢数学，而且也希望将来能当一名中学数学教师。高中毕业时，抱着将来当一名优秀的中学数学教师的梦想进入了北京师范大学数学系。毕业时没有分到中学却留校当了大学数学老师。

对教学的浓厚兴趣，推动自己在教学中不断钻研。我的第一篇文章“一般二次曲线为抛物线时位置的确定”，就是在讲《空间解析几何》时，所用北大教材中的一句“很难确定”引起我的兴趣，研究所得写成的。我要求自己每一学期都要结合教学进行研究，后来又发表多篇关于解析几何的教学研究文章。我在讲《高等几何（射影几何）》课时，一个问题总是在脑中挥之不去，既然《高等几何》只在师范院校开设（综合大学没有），那么《高等几何》对于中学数学教学应该是有用的，到底有什么用处呢？为了回答这个问题，我开始认真研究，还利用带学生到中学实习的机会，与中学数学老师探讨这个问题，研究所得写出了“试论射影几何对中学几何教学的指导意义”，后来进一步的深入研究又写出了“射影几何指导解析几何教学举例”，对这个问题从宏观和微观两方面给出了一个较好的回答。

由于自己对教学研究的兴趣，参加了系里组织的高等数学教学研究小组，共同的讨论交流，也推动了自己的研究。结合教学，发表了多篇关于高等数学教学内容和教学方法研究的文章，如“点集拓扑课中有关反例教学的点滴体会”、“关于仿射变换和二阶曲线的定义”、“关于单纯逼



近的定义与 Croom 商榷”、“关于笛沙格定理的附注”、“采用齐次向量建立二维射影坐标系”、“努力讲清重要概念产生的背景”、“努力挖掘定理证明中具有普遍意义的方法”、“提出辅助问题，类比，猜想，证明”、“浅谈数学课程函授中的集中面授教学”、“论几何直观与高师数学教学”等。

20 世纪初德国著名数学家克莱因就试图研究解决高等数学和初等数学脱节的问题（见《高观点下的初等数学》），这就更加促使我关注用高观点指导中学数学教学的研究。陆续发表了“试论坐标变换在解析几何中的地位和作用”、“关于解析几何是一个双刃工具的思考”、“关于提高中学平面解析几何教材思想性的两点建议”等。这方面的总结性文章“高观点下的解析几何”，分别从射影几何的观点，包括在射影平面上看解析几何；用变换群的观点看解析几何和从方法论的观点看解析几何，进行了系统的分析论述。该论文在 1993 年于长沙举行的全国第二届初等数学研究学术交流会上作为专题发言并获得大会论文一等奖。我的老师刘绍学先生看了有关这次会议的报导得知我获奖以后，对我说，我们北师大数学系就应该有人来研究初等数学，以前傅种孙先生就重视研究初等数学，给了我很大的鼓励。

我对数学教育发生浓厚的兴趣得益于波利亚的《数学的发现》。第一次在阅览室读到这本书时，波利亚对数学教育的精辟论述使我兴奋不已，改变了我过去认为数学教育只是一堆抽象的教育理论的看法，使我从单纯的对教学研究有兴趣，发展到对某种教育思想的兴趣，并从此下决心要努力宣传和实践波利亚的数学教育思想——“教会年轻人思考”（这个解法是如何想到的？）和重视“数学的发现”（有什么规律性的东西？）。我将研究的重心逐渐转向中学数学教学的研究，并要求自己的研究对中学数学教师提高教学水平有实际的帮助。由此写出了“论反例”、“关于一道



成人高考试题的思考——兼谈解题教学”、“关于分类讨论的教学”、“关于在数学教学中强调通法的思考”、“关于重视几何直观分析的思考”、“先猜后证——证明定值问题的常用方法”、“解析几何中的轮换技巧”、“重视应用定比分点解题”、“对称地处理具有对称性的问题”、“几何中的变换思想”、“用特殊值法解题是有条件的”等文章。我的老师、长期担任《数学通报》编委的郝钢新先生一次对我说，“你在《数学通报》上发表的文章‘言之有物’”，这简短的四个字是对我的很大的肯定和鼓励。

我把自己的上述研究心得（包括高观点指导中学数学教学、关于数学思想方法的分析及波利亚数学教育思想的运用）及时地转化为教学内容，在数学系领导的大力支持下，为本科高年级学生开设了选修课程《中学平面解析几何教学研究》，为他们毕业后搞好中学数学教学提供帮助。在1994年于成都召开的第三届现代数学与初等数学学术会议上，向与会代表们介绍了这门应用高等数学观点的新课程。后来又把这个课程推到为中学数学教师举办的校内培训班和专升本的函授班上讲授。讲授中尽力传授波利亚的数学教育思想，并自己身体力行，学员们普遍反映，认为这门课密切联系中学教学实际，又有较高的观点作指导，对自己的教学水平很有帮助，并建议将讲义正式出版，作为在职中学数学教师继续教育的教材。这个课后来又充实发展成为《中学数学课题研究》，多次在在职中学数学教师研究生课程班上讲授。

此外，我还多次为本校文科各系的学生开设公共选修课《数学思想方法漫谈》，选取有趣的题材，用通俗直观的讲解，着重阐明其中的数学思想方法，使他们受到一些必要的数学思维训练。按照波利亚的数学教育思想为中学生编写了两本课外读物《解析几何方法漫谈》和《几何变换



漫谈》。退休后任《中学生数学》杂志的编委，并为该刊撰写了“波利亚教我们怎样解题”、“欧拉是怎样发现公式 $V-E+F=2$ 的”、“欧拉是怎样解决七桥问题的”、“平分火腿三明治”和“猜字谜与解数学题”等数十篇科普文章。

2003年至2004年我有幸参加了人民教育出版社高中数学新课标教材(A版)的编写工作，为数学必修2具体编写了解析几何《直线》一章，努力让学生领会解析几何的思想和方法；并为选修教材系列3编写出《欧拉公式与闭曲面分类》的书稿，力求通俗直观地向中学生初步介绍拓扑学的思想和方法(后因故未能出版)。

回顾自己几十年的教师生涯，能对数学教育事业做一点事情，取得一些成绩，完全离不开数学系历届领导的支持和关怀；离不开几何教研室的朱鼎勋先生、陈绍菱先生、傅章秀先生、傅若男先生和我的同事与朋友余玄冰、蒋人璧、王申怀、刘继志、杨存斌、孙久蕪等同志的关心和帮助；离不开《数学通报》和它的主编丁尔陞先生对我的培养；离不开钟善基先生、曹才翰先生、钱珮玲先生以及数学教育教研室的诸位老师对我的关心和帮助，作者对他们表示衷心的感谢。这部文选的出版，我要特别感谢文选的主编李仲来同志，感谢他长期以来一直对作者的关心，感谢他为出版文选所作的筹划、申请、联络、编辑等辛勤的付出。在此我还要对人民教育出版社中学数学编辑室章建跃主任和本书责任编辑俞求是同志为本文集的出版所付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

王敬庚

2011年4月6日



工作简介

王敬庚先生 1936 年 12 月 3 日出生于江苏省姜堰市溱潼镇，父亲王应生（1906—1983）是米厂副厂长，母亲丁世珍（1908—1995）是家庭妇女。1951 年江苏省泰县溱潼中学初中毕业，1954 年江苏省泰州中学高中毕业，考入北京师范大学数学系，1956 年加入中国共产党，1958 年大学毕业后留校，担任 1955 级学生年级主任一年，后分配到几何教研室任教，1996 年转入数学教育与数学史教研室。1980—1981 年在武汉大学进修代数拓扑。1988 年 6 月任副教授，1996 年 6 月任教授，1991 年获北京师范大学优秀教育工作者称号。参加编写的《拓扑学》获 1995 年度北京师范大学优秀教材奖。1997 年 4 月退休。从 2000 年 1 月起担任《中学生数学》杂志编委。2002 年 9 月被河北承德民族师范高等专科学校聘为客座教授。



1

工作简介

讲授过《空间解析几何》、《射影几何（高等几何）》、《微分几何》、《拓扑学》、《代数拓扑》、《直观拓扑》、《高等数学》等数学类课程，以及《中学解析几何教学研究》、《中学数学方法》、《中学数学课题研究》、《数学思想和方法漫谈》等数学教育类课程。

王敬庚在数学教育方面的工作，主要是研究用高等数学的观点指导中学数学的教学，特别是在几何教学方面。用射影几何的观点指导解析几何的教学，把欧氏平面上二次曲线，放到射影平面上来考查，从而加深了对这几种曲

线的认识，能够解释在欧氏平面上无法解释的一些问题。用变换群的观点看待几何，强调在几何教学中应重视几何变换及变换下的不变性和不变量。认为在解析几何中坐标变换是必不可少的，坐标变换和坐标变换下的不变量对解析几何来说，与坐标系同样重要，是解析几何赖以存在的基础。“试论射影几何对中学几何教学的指导意义”、“射影几何指导中学解析几何教学举例”、“试论坐标变换在解析几何中的地位和作用——对中学《解析几何》课本的一点意见”以及“高观点下的解析几何”等文章，都是这方面研究成果。

关于数学思想方法的研究。王敬庚从笛卡儿作为哲学家创立解析几何的历史中，认识到解析几何的创立是方法论上的一个伟大创造。沟通几何和代数的桥梁——坐标系应该是双向通行的，因此也可以通过坐标系这个桥梁，把某些代数问题变成几何问题来研究，从而使我们加深并提高了对解析几何方法的认识。他的“关于解析几何是一个双刃工具的思考”就是这一研究的成果。此外，“解析几何中的轮换技巧”、“对称地处理具有对称性的问题”、“关于分类讨论的教学”、“几何中的变换思想”等，都是关于数学思想方法的研究方面的。针对不少中学教师误把特殊值法当成一个通用的妙招巧法，王敬庚写了“用特殊值法解题是有条件的”等文章。

王敬庚致力于波利亚数学教育思想的传播和研究。除了在在职中学数学教师的专升本函授班和研究生课程班上介绍波利亚数学教育思想——教会年轻人思考和重视数学的发现以外，他在自己的教学中也努力按波利亚数学教育思想的要求去做，重视启发学生自己发现解法，重视对规律性的归纳总结，重视挖掘和提炼具有普遍意义的方法，等等。在这方面的研究文章有“关于一道成人高考试题的



思考——兼谈解题教学”、“关于在数学教学中强调通法的思考”、“关于重视几何直观分析的思考”、“先猜后证——证明定值问题的常用方法”等。他还写了不少关于这方面的科普文章，如“波利亚教我们怎样解题”、“欧拉是怎样发现公式 $V-E+F=2$ 的”、“欧拉是怎样解决七桥问题的”、“猜字谜与解数学题”等。

王敬庚在高等数学教学研究方面，做了不少工作，取得一些成绩。在教学内容方面，例如，对于同一个数学概念，有时教科书中给出几个不同的定义，那么它们应该是互相等价的，然而有些教科书却违背了这一要求（见“关于仿射变换和二阶曲线的定义”）。几本教材中，对同一个重要概念，给出的定义不等价，对其优劣的比较（见“关于单纯逼近的定义与Croom商榷”）。对于高等几何中的重要定理笛沙格定理，教科书中说，若只有平面公理是不能证明的，只能作为公理，但有的书上却又都给出了证明，对这种情况如何作出合理的解释（见“关于笛沙格定理的附注”）。此外，如对某一方法的改进（见“采用齐次向量建立二维射影坐标系”），以及他自己在教学中新的发现（见“含一个参数的二元二次方程表示九类不同曲线的例子”）等等。他还重视高等数学教学方法的研究和改进。例如，重视反例的作用（见“点集拓扑课中有关反例教学的点滴体会”）、重视几何直观的分析（见“论几何直观与高师数学教学”、“浅谈数学课程函授中的集中面授教学”）、重视总结一般规律（见“努力挖掘定理证明中具有普遍意义的方法”）、重视启发式（见“提出辅助问题，类比，猜想，证明——关于向量外积分配律证明的教学尝试”）等。

王敬庚重视数学的科学普及，在这方面做了三件事。一是编了一本教材《直观拓扑》，用通俗直观的方式向师范院校的学生和中学数学教师介绍拓扑学的基本思想和方法，



姜伯驹院士称赞“这是一本好书”。他指出：“题材要引人入胜；讲法要直观易懂；内容又要经得起推敲，不能以谬传谬。这本书兼顾了这几方面的要求，是难能可贵的。”二是在我校多次开设文科公共选修课《数学思想和方法漫谈》，向从此远离数学的文科学生普及基本的数学思想和方法，使他们受到一些必要的数学思维训练。三是编写了两本中学生课外读物《解析几何方法漫谈》（是河南科学技术出版社编辑出版的《让你开窍的数学》丛书中的一本，这本书被河南科技出版社誉为是“独具匠心、颇有特色、国内数学科普著作中不可多得的精品”，这套丛书1998年9月获第12届北方10省市（区）优秀科技图书二等奖）和《几何变换漫谈》（是刘绍学主编、湖南教育出版社出版的中学生数学视野丛书中的一本，该丛书2001年获第2届全国优秀数学教育图书奖特等奖）；翻译了两本前苏联青年数学科普丛书《反演》和《依给定比分割线段》；在《中学生数学》、《科学》和《湖南教育（数学教师）》等刊物上发表科普文章40余篇。

王敬庚还编写或参与编写了多部教材：《拓扑学》、《高等几何》、《空间解析几何》、《解析几何》、《高等数学基础》和高中新课标教材《数学（必修2）》等。

1961年2月1日王敬庚和范秋君女士（1936年8月14日～）结婚，她毕业于北京师范大学数学系，和王敬庚是同班同学，后在首都师范大学（原北京师范学院）数学系工作，现已退休。育两子王运生（1965年1月8日～）和王松文（1968年12月4日～），家庭生活美满幸福。

目 录



一、高观点指导中学数学教学	1
试论射影几何对中学几何教学的指导意义	1
射影几何指导中学解析几何教学举例	7
试论坐标变换在解析几何中的地位和作用——	
对中学《平面解析几何》课本的一点意见	14
关于解析几何是一个双刃工具的思考	19
关于提高中学平面解析几何教材思想性的两点	
建议	26
高观点下的解析几何	30
 二、中学数学思想方法和教学研究	40
在中学解析几何教学中注意灌输不变量的思想 ..	40
论反例	45
关于一道成人高考试题的思考——兼谈解题教学 ..	53
关于分类讨论的教学——以有向线段数量公式	
的教学为例	61
解析几何中的轮换技巧	68
重视应用定比分点解题——从 1992 年全国成人	
高考的一道考题谈起	75
关于在数学教学中强调通法的思考	81
关于重视几何直观分析的思考	88



目 录

先猜后证——证明定值问题的常用方法	95
对称地处理具有对称性的问题	104
几何中的变换思想	109
应注意“函数”和“到上函数”的区别——对高 中《代数》第一册（甲种本）的一点意见	115
用特殊值法解题是有前提条件的	119
三、高等数学的教学内容和教学方法研究	123
关于仿射变换和二阶曲线的定义	123
射影平面的模型和默比乌斯带	129
关于笛沙格定理的附注	137
关于单纯逼近的定义与 Croom 商椎	143
采用齐次向量建立二维射影坐标系	152
关于曲线族产生曲面的理论证明的一点补充 ——多项式的结式在几何上的一个应用	160
含一个参数的二元二次方程表示九类不同曲线的 例子	167
解析几何教学中的数学思想初探	170
射影几何课程中的基本数学思想初探	175
点集拓扑课中有关反例教学的点滴体会	181

目 录



尽力讲清重要概念产生的背景	
——关于二次曲线不变量教学的点滴体会 …	187
努力挖掘定理证明中具有普遍意义的方法 ……	194
提出辅助问题, 类比, 猜想, 证明——关于向量	
外分配律证明的教学尝试 ……………	200
浅议数学课程函授中的集中面授教学 ……………	206
试论几何直观在教学中的作用 ……………	214
论几何直观与高师数学教学 ……………	226
从解析几何的产生谈教改的一点想法 ……………	237
高等师范院校数学系解析几何课程改革 ……………	242
高师开设《直观拓扑》的尝试 ……………	248
四、数学科普 ……………	253
一般寓于特殊之中 ……………	253
用纸折椭圆、双曲线和抛物线 ……………	256
奇妙的默比乌斯带 ……………	259
从一个线绳魔术谈纽结 ……………	262
漫话纽结、链环及其数学 ……………	268
平分火腿三明治 ……………	280
猜字谜与解数学题 ……………	283
环面趣谈 ……………	286



目 录

你知道代数与算术的区别吗	291
笛卡儿写书为何故意让人难懂	294
欧拉是如何发现欧拉公式 $V-E+F=2$ 的? ...	297
欧拉是怎样解决七桥问题的	304
附录1 王敬庚(赓)简历	309
附录2 王敬庚发表的论文和著作目录	311
后记	319

一、高观点指导中学数学教学

■试论射影几何对中学几何教学的指导意义^{*}

“当一个中学数学教师为什么一定要学习射影几何?”, “学了射影几何, 对中学几何教学有哪些指导意义?”, 常常有人提出这样的问题。

和其他许多高等数学课程一样, 射影几何课程中包含许多基本数学思想, 例如关于研究变换和变换下不变性的思想, 关于对各种几何加以统一研究的思想, 关于对偶性的思想, 等等。也包含了多种基本数学能力的训练, 例如注意从几何直观上分析问题的能力, 以及几何与代数的结合即运用代数方法研究几何的能力, 等等。这些和包含在其他高等数学课程中的基本数学思想与基本数学能力一起构成了人们通常所说的“数学修养”。这种修养对于教学上某个具体问题的处理, 或某段具体教材的分析, 也许不会收到立竿见影的效果。但从高等数学的学习中所获得的对数学的总的认识, 以及对数学的基本思想和方法的了解与掌握, 却是对搞好教学经常地、长久地起作用的因素, 这种指导作用表面上好象看不见摸不着, 实际上却是无时不在、无所不在的。这种指导作用虽是抽象的, 但是巨大而重要的。这就是人们常说的“后劲”。关于这方面, 本文不准备多谈, 本文重点探讨射影几何对中学几何教学的具体的指导意义。



^{*} 本文原载于《数学通报》, 1986, (12): 29-31.

依照克莱因用变换群刻划几何学的观点，一种变换群下不变性的研究就构成一门几何学，射影几何学是专门研究图形在射影变换下的不变性的一个数学分支。所谓平面上的射影变换，我们可以直观地把它理解为连续施行有限次中心投影所得到的平面到自身的一个变换。射影变换的一个特例是仿射变换，我们可以直观地把它理解为连续施行有限次平行投影所得到的变换，仿射变换下不变性的研究，构成仿射几何学，因此它是射影几何学的一章。仿射变换的一个特例是等距变换，我们可以直观地把它理解为连续施行平移和旋转或者再施行一个轴反射所得到的变换。等距变换下不变性的研究，构成欧氏几何学，因此它是仿射几何学的一章，因而也是射影几何学的一章。平面射影几何只研究平面图形的那些与点和直线的结合关系有关的性质，实际上比欧氏几何学研究的内容更为基本。了解了欧氏几何、仿射几何、射影几何三者之间的关系，也就扩大了我们的几何学的视野，原来在欧氏几何以外还有一个广宽的几何学的新天地。俗话说“站得高，才能看得远”，学习了射影几何课程，了解了欧氏几何在几何学中所处的地位，有助于我们从几何学的全局与整体上来理解和把握中学的几何教材，即把中学几何教材放在一个更广阔的背景中来加以考虑。

与欧氏几何并列的还有罗巴切夫斯基几何——在其中过已知直线外任一点可以引两条直线与已知直线平行，和黎曼几何——在其中过已知直线外任一点没有任何直线与已知直线平行。因为在欧氏几何中，过已知直线外任一点只能作一条直线与已知直线平行，因此我们把罗氏几何和黎曼几何统称为非欧几何学。这三种几何学表面上互相矛盾，互相排斥，但它们在射影几何中得到统一，它们分别是射影几何的三种不同的特殊情形，都是射影几何的儿

