三导丛书

高等数学（同济·第四版）

导教·导学·导考

（下册）

符丽珍 等编

- 重要内容提要
- 重点知识结构图
- 常考题型分析
- 考研典型题精解
- 学习效果两级测试题
- 课后习题全解

西北工业大学出版社

三导丛书

高等数学

（同济·第四版）

导教·导学·导考

（下册）

符丽珍　刘克轩　肖亚兰
王雪芳　杨月茜　陆　全　编

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导教·导学·导考/符丽珍等编.—西安:西北工业大学出版社,2001.9

ISBN 7-5612-1377-8

Ⅰ.高… Ⅱ.符… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 054220 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029—8493844

网 址:http://www.nwpup.com

印 刷 者:西安市向阳印刷厂

开 本:850mm×1 168mm 1/32

印 张:19.25

字 数:674 千字

版 次:2001 年 11 月第 1 版 2002 年 3 月第 2 次印刷

印 数:5 001～13 000 册

定 价:全书:25.00 元 本册:12.00 元

前　言

高等数学课程是理工科院校的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了满足广大读者学习和考研复习的需要，更好地帮助广大读者学好高等数学课程，我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》（第四版）的章节顺序，分为十二章，每章均设计了五个板块。

一、重要内容提要　列出了基本概念、重要定理和公式，突出考点的核心知识。

二、重点知识结构图　用框图形式列出，并指出了各知识点的有机联系。

三、常考题型及考研典型题精解　从历年本科生期末试题和历年研究生入学统考试题中精选出典型题目，并进行了解答。

四、学习效果两级测试题　（一）基础知识测试题及答案；（二）考研训练模拟题及答案。这一部分是为读者检查学习效果和应试能力设计的，通过两级测试，读者可以进一步加深对所学内容的理解，增强解题能力。

五、课后习题全解　对同济大学数学教研室编的《高等数学》（第四版）的课后习题（含各章总习题）全部做了详细解答。因篇幅所限，对超出教学基本要求的标 * 号的内容，仅对欧拉方程一节的习题作了解答。

本书从指导课程教学、学习和考试、考研的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答，揭示了高等数学的解题方法，解题规律和解题技巧。这对于提高读者分析问题的能力，理解基本概念和理论，开拓解题思路，全面增强数学素质，会

收到良好的效果。对于课后习题，希望读者在学习过程中先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖于解答。

全书共分上、下两册，分别由符丽珍（编写第一至三章）、刘克轩（编写第四至六章）、肖亚兰（编写第七章）、王雪芳（编写第八、九章）、杨月茜（编写第十、十一章）、陆全（编写第十二章）分工执笔编写，由符丽珍负责统稿。

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2001 年 3 月

于西北工业大学

目　录

下　册

第八章　多元函数微分法及其应用

一、重要内容提要

（一）基本概念

1. 二元函数：定义域和对应关系为二元函数 $z=f(x,y)$ 的两要素. 其定义域为平面上的点集.

2. 极限：函数 $z=f(x,y)$ 的极限为 A，是指点 (x,y) 以任何方式，沿任意路径趋于 (x_0,y_0) 时，均有 $f(x,y)$ 趋于定常数 A，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

3. 连续：函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续必须满足：(1) 在 $U(x_0,y_0)$ 内有定义；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在；(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 三个条件缺一不可. 否则，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续.

（二）偏导数

1. 定义与计算：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时，只要把 $z=f(x,y)$ 中的 y 固定（看做常数），仅对 x 求导；求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 时，固定 x，仅对 y 求导.

2. 高阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

如果二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续时，在 D 内恒有

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

（三）全微分

1. 定义与计算：若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与 (x_0,y_0) 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的全微分 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y$. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$.

2. 二元函数在一点连续、可导（两个偏数存在）与可微的关系：

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{可导} \arrow[dl, shift left, "/" marking] & \\
\text{偏导数连续} \arrow[r, shift left] & \text{可微} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \\
 & & \text{连续} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[r, shift left] & \text{极限存在} \arrow[l, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

3. 方向导数与梯度：

(1) 方向导数：$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中 α 为射线 l 与 x 轴正向的夹角.

(2) 梯度：函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处的梯度为

$$\mathbf{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

（四）多元复合函数的导数

1. 多元复合函数的求导法则（链式法则）：

若 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 几种推广情形：

(1) 若 $z=f(u,v,w)$，而 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=w(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(2) 若 $z=f(u,x,y)$，而 $u=\varphi(x,y)$，则

复合后　　前(u,x,y)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

注意:这里$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$不同,$\frac{\partial z}{\partial x}$是把复合后的函数$f[\varphi(x,y),x,y]$中的$y$看做不变,对$x$求导数;而$\frac{\partial f}{\partial x}$是把复合前的函数$f(u,x,y)$中的$u,y$看做不变,对$x$求导数.$\frac{\partial z}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$也有类似区别.

(3) 设$z=f(u,v,w)$,而$u=\varphi(t),v=\psi(t),w=w(t)$,则复合函数$z=f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$只是一个自变量$t$的函数,这个复合函数对$t$的导数$\frac{dz}{dt}$称为全导数,且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

注意:$\frac{dz}{dt}$与$\frac{\partial z}{\partial t}$的区别.

(五) 隐函数求导法

通常有以下三种方法:

1. 把方程(或方程组)看做恒等式,两边对自变量求导,然后解出所求的导数或偏导数.由于因变量是自变量的函数,在此法中一定会用到链式公式.

2. 公式法.设$z=f(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的隐函数,且$F_z\neq 0$,则

公式法

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

3. 微分法.利用一阶全微分形式的不变性,方程两边求全微分,可以求出所需偏导数或导数.

(六) 微分法在几何上的应用

1. 空间曲线的切线与法平面:

设空间曲线Γ的参数方程为$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$,则在曲线$\Gamma$上点$(x_0,y_0,z_0)$的切线方程为

t_0

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

其中 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$，$z_0=\omega(t_0)$.

2.空间曲面的切平面与法线：

(1) 设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，则在曲面 Σ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

(2) 设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$，则在 Σ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

（七）多元函数极值问题

1.函数 $z=f(x,y)$ 取得极值的必要条件：

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

2.二元函数极值存在的充分条件：

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(x_0,y_0)$ 内有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

(1) $AC-B^2>0$ 时有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，$A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能无极值.

3.二元函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下极值的求法：

(1) 降元法：从条件方程 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=y(x)$，代入 $z=f(x,y)$，即化为一元函数的无条件极值问题.

(2) 拉格朗日乘数法：作 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$（$\lambda$ 为参数），再从方程组 $F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0$，$F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0$，$\varphi(x,y)=0$ 中解出 x,y，就是可能极值点.

二、重点知识结构图

多元函数微分法及其应用
- 基本概念(区域、定义、极限、连续)
- 偏导数(定义、计算、高阶偏导数)
- 全微分(定义、计算、必要条件、充分条件、方向导数、梯度)
- 多元复合函数的导数(链式法则、全导数)
- 隐函数求导法(一个方程、方程组)
- 微分法在几何上的应用
  - 空间曲线的切线与法平面
  - 空间曲面的切平面与法线
- 多元函数极值问题
  - 必要条件,充分条件
  - 无条件极值问题
  - 拉格朗日乘数法

三、常考题型及考研典型题精解

例 8-1 (1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,试问在(0,0)处 $f(x,y)$是否连续?偏导数是否存在?

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,试问在(0,0)处 $f(x,y)$的偏导数是否存在?是否可微?

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=kx\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,其值随 k 而变,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ 不存在,故 $f(x,y)$在(0,0)点不连续.

但
$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0$,同理 $f_y(0,0)=0$.

但是 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\mathrm{d}y]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在.因此 $f(x,y)$在(0,0)点处的偏导数存在,但不可微.

例 8-2 求空间曲线 $y^2=2x, z^2=1-x$ 在点$(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2})$处的切线方程. ×看作参考.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2z}$，在点$(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2})$处的切线方向为$\left\{1,1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$，切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{(y-1)}{1}=\frac{(z-\frac{\sqrt{2}}{2})}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

例 8-3 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$在点$(2,1,1)$处的切线与 y 轴的夹角余弦.

解 令

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$$
$$G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4$$
$$J=\begin{vmatrix}2y & 2z\\2y & -2z\end{vmatrix}=-8yz, \qquad J|_{(2,1,1)}=8$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2x & 2z\\2x & -2z\end{vmatrix}_{(2,1,1)}=-\frac{1}{J}(8xz)|_{(2,1,1)}=-2$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2y & 2x\\2y & 2x\end{vmatrix}=0$$

故切线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,-2,0\}$.

又 y 轴的方向向量为 $\boldsymbol{k}=\{0,1,0\}$，$\|\boldsymbol{s}\|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$，则切线与 y 轴的夹角余弦 $\cos\beta=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{s}\|\ \|\boldsymbol{k}\|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

例 8-4 求曲线 $x=t^2, y=\frac{8}{\sqrt{t}}, z=4\sqrt{t}$ 在点$(16,4,8)$处的法平面方程.

解
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{8}{2}t^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\sqrt{t}}$$

在点$(16,4,8)$处对应的参数 $t=4$，故法向量为$\{8,-\frac{1}{2},1\}$，可取法向量为$\{16,-1,2\}$，则法平面方程为

$$16(x-16)-(y-4)+2(z-8)=0$$

即
$$16x-y+2z=268$$

例 8-5 (1999 考研)设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求$\frac{dz}{dx}$.

解法 1 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导数得:

$$\frac{dz}{dx}=f(x+y)+xf'_1(1+\frac{dy}{dx}) \tag{1}$$

由 $F_x+F_y\frac{dy}{dx}+F_z\frac{dz}{dx}=0$ 解出$\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x-F_z\frac{dz}{dx}}{F_y}$,代入(1)式有

$$\frac{dz}{dx}=f+xf'_1(1-\frac{F_x+F_z\frac{dz}{dx}}{F_y})$$

由此式解出 $$\frac{dz}{dx}=\frac{fF_y+xf'_1F_y-xF_xf'_1}{F_y+xf'_1F_z}$$

解法 2 $$dz=fdx+xdf=fdx+xf'_1(dx+dy) \tag{2}$$

由 $$dF=F_xdx+F_ydy+F_zdz=0$$

解出 $$dy=\frac{-F_zdz-F_xdx}{F_y}$$

代入(2)式得 $$dz=fdx+xf'_1(dx+\frac{-F_zdz-F_xdx}{F_y})$$

由此解得 $$\frac{dz}{dx}=\frac{fF_y+xF_yf'_1-F_xxf'_1}{F_y+xf'_1F_y}$$

例 8-6 (2000 考研)设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有连续二阶导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f'_1+y[f''_{11}\cdot x+f''_{12}(-\frac{x}{y^2})]+(-\frac{1}{y^2}f'_2)+$$

$$\frac{1}{y}(f''_{21}\cdot x+f''_{22}\cdot(-\frac{x}{y^2}))-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''(\frac{1}{x})=$$

$$f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

例 8-7 (2001 考研)设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微,且 $f(1,1)=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3, \varphi(x)=f(x,f(x,x))$,求$\frac{d}{dx}(\varphi^3(x))|_{x=1}$.

解 $$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$$

$$\frac{d}{dx}(\varphi^3(x))=3\varphi^2(x)\cdot\frac{d\varphi}{dx}=3\varphi^2(x)\{f'_1(x,f(x,x))+$$

$$f'_2(x,f(x,x))\cdot[f'_1(x,x)+f'_2(x,x)]\}$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x))|_{(1,1)}=3\{f'_1(1,f(1,1))+f'_2(1,f(1,1))\cdot[f'_1(1,1)+$
$f'_2(1,1)]\}=3\{f'_1(1,1)+f'_2(1,1)\cdot[f'_1(1,1)+$
$f'_2(1,1)]\}=3\{2+3[2+3]\}=51$

例 8-8 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 此题是由变上限函数给出的二元函数.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\mathrm{e}^{-(xy)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^{-(xy)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3\mathrm{e}^{-x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}-2x^2y^2\mathrm{e}^{-x^2y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3y\mathrm{e}^{-x^2y^2}$$

所以
$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}$$

例 8-9 在曲面 $z^2=2(x-1)^2+(y-1)^2(z>0)$ 上求点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，使点 P_1 到原点 O 的距离为最短，并且证明该曲面在点 P_1 处的法线与向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 平行.

解 目标函数为 $f=d^2=x^2+y^2+z^2$，约束条件为 $z^2=2(x-1)^2+(y-1)^2$，化为无条件极值为

$$f(x,y)=x^2+y^2+2(x-1)^2+(y-1)^2,\quad (x,y)\in R^2$$

$$\begin{cases}f_x=2x+4(x-1)=0\\ f_y=2y-2(y-1)=0\end{cases}\quad 解出惟一驻点\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{3}\\ y_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

代入曲面方程得 $z_1=\frac{\sqrt{17}}{6}$（舍去负值）.

$A=f_{xx}(x_1,y_1)=6, B=f_{xy}(x_1,y_1)=0, C=f_{yy}(x_1,y_1)=4$，因为 $AC-B^2=24>0$，且 $A>0$，所以在点 $P_1(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{17}}{6})$ 处取得最短距离 $d=\frac{\sqrt{42}}{6}$.

或由题意，原点 O 到上半椭圆 $z^2=2(x-1)^2+(y-1)^2(z>0)$ 存在最小距离，所以 $f(x,y)$ 在惟一驻点处达到最小值.

令
$$F(x,y,z)=2(x-1)^2+(y-1)^2-z^2$$

所以
$$F_x(P_1)=-\frac{4}{3},\quad F_y(P_1)=-1$$

$$F_z(P_1)=\frac{-\sqrt{17}}{3},\quad \overrightarrow{OP_1}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{17}}{6}\right\}$$

曲面在点 P_1 处法向量 $\boldsymbol{n}=-2\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{17}}{6}\right\}/\!/\overrightarrow{OP_1}$.

例 8-10 在椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 的第一卦限上求一点,使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小.

解 设(x_0,y_0,z_0)是椭球面第一卦限部分上的点,则切平面方程为

$$x_0x+y_0y+\frac{1}{4}z_0z=1$$

设目标函数为

$$f=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}$$

约束条件为

$$x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1=0$$

作

$$F=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}+\lambda(x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1)$$

由

$$\begin{cases} F_{x_0}=-\dfrac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0=0 \\ F_{y_0}=-\dfrac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0=0 \\ F_{z_0}=-\dfrac{32}{y_0^3}+\dfrac{\lambda}{2}z_0=0 \\ x_0^2+y_0^2+\dfrac{1}{4}z_0^2=1 \end{cases}$$

解之得 $x_0=y_0=\frac{1}{2}$,$z_0=\sqrt{2}$.

由实际问题知$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2})$为所求点.

例 8-11 (2000 考研)假定某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数分别为 $P_1=18-2Q_1$,$P_2=12-Q_2$,其中 P_1 和 P_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨),Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量,单位:吨),并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$,其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量,即

$$Q=Q_1+Q_2$$

(1) 如果该企业实行价格差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量和价格,使该企业获得最大利润.

(2) 如果该企业实行价格无差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量及其统一价格,使该企业的总利润最大化;并比较两种价格策略下的总利润大小.

解 (1) 总利润函数

$$L=R-C=P_1Q_1+P_2Q_2-(2Q+5)=$$

$$-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5$$

令 $L'_{Q_1}=-4Q_1+16=0$，$L'_{Q_2}=-2Q_2+10=0$，解得 $Q_1=4$，$Q_2=5$，则 $P_1=10$（万元/吨），$P_2=7$（万元/吨）. 由于驻点惟一，根据问题的实际意义，故最大值必在驻点达到，最大利润为 $L=52$（万元）.

(2) 若实行价格无差别策略，则 $P_1=P_2$，于是有约束条件：$2Q_1-Q_2=6$. 构造拉格朗日函数

$$F(Q_1,Q_2,\lambda)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6)$$

令
$$\begin{cases} F_{Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda=0 \\ F_{Q_2}=-2Q_1+10-\lambda=0 \\ F_\lambda=2Q_1-Q_2-6=0 \end{cases}$$

解得 $Q_1=5$，$Q_2=4$，$\lambda=2$，则 $P_1=P_2=8$，最大利润

$$L=-2\times5^2-4^2+16\times5+10\times4-5=49\text{（万元）}$$

由上述可知，企业实行差别定价所得总利润要大于统一价格的总利润.

四、学习效果两级测试题

（一）基础知识测试题及答案

1. 填空题

(1) 函数 $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为________.

（答案：$D\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant0,x^2+y^2<1\}$）

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=$________.（答案：0）

(3) 设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}$ $=$________（答案：$2f_x(a,b)$）

(4) 函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P_0(0,1,2)$ 沿方向 $l=\{1,\sqrt{2},1\}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=$________.（答案：$\dfrac{11}{2}$）

(5) $z=f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，点 $M_1(1,1)$，$M_2(-1,-1)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，则点________是 $f(x,y)$ 的极小值点.（答案：$(1,1)$）

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & (x^2+y^2\neq0) \\ 0 & (0,0)\end{cases}$，问在点 $(0,0)$ 处：