



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

振 动 力 学

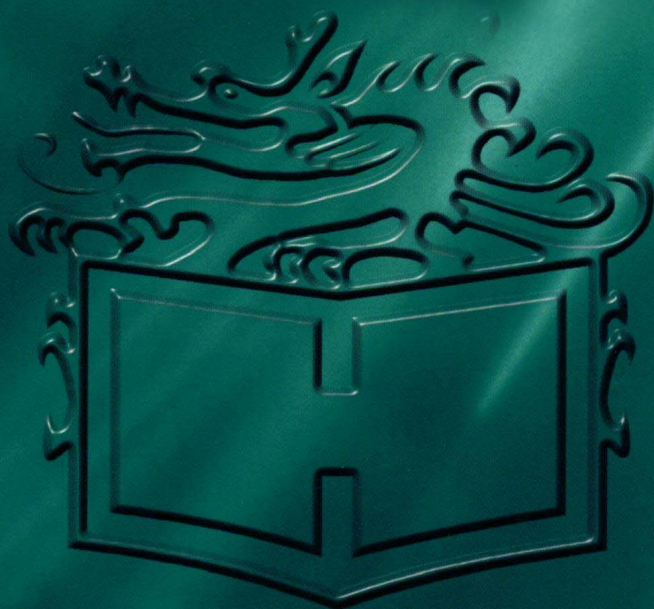
(第 2 版)

刘延柱 陈立群 陈文良 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Mechanics of Vibration



ISBN 978-7-04-031000-9



9 787040 310009 >

定价 31.00 元

面向 21 世纪 课程 教材
Textbook Series for 21st Century

振 动 力 学

Z h e n d o n g L i x u e

(第 2 版)

刘延柱 陈立群 陈文良 编著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是在第1版的基础上修订而成的。第1版是面向21世纪课程教材,获2000年中国高校自然科学奖教材类一等奖。第1版以起点较高、将线性振动和非线性振动纳入统一的理论体系、注意反映近代研究成果等为特色。第2版以本科生教学为目标,删去针对研究生教学要求的提高部分内容。线性振动部分补充了频域分析方法和能量方法,适当增加有关连续系统振动的新内容,加强了对近似方法的理论依据和误差估计的叙述,使理论更为完整和系统。同时,保留原教材中以通俗易懂的方式对工程中常见的非线性振动问题的简单分析,以及随机振动和混沌振动的基本知识。适当补充了例题和习题。

本书系统地论述机械振动的基础理论和分析方法。绪论叙述振动力学的概况和简史。正文共分8章,第一、二、三章讨论单自由度系统的自由振动、受迫振动和暂态响应,第四章叙述自激振动,第五、六章讨论多自由度系统的振动和近似计算方法,第七、八章讨论连续系统的振动和近似计算方法。各章均附有习题和答案。

本书可作为工程力学、机械工程、航空工程和土木工程等专业的教科书,也可作为从事与机械振动有关工作的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

振动力学/刘延柱,陈立群,陈文良编著. —2版. —北京:高等教育出版社,2011.1

ISBN 978-7-04-031000-9

I. ①振… II. ①刘… ②陈… ③陈… III. ①工程力学-振动理论-高等学校-教材 IV. ①TB123

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第245906号

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京四季青印刷厂		http://www.landaco.com.cn
开 本	787×960 1/16	版 次	1998年10月第1版
印 张	19.75		2011年1月第2版
字 数	360 000	印 次	2011年11月第2次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	31.00元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 31000-00

主要符号表

a 振幅	$H(s)$ 传递函数, 广义导纳
a_j 里茨法待定系数	$H=(H_{ij})$ 复频响应矩阵
$\mathbf{a}$ 待定系数矩阵	I 截面二次矩
A 振幅	I_p 截面二次极矩
b 截面宽度	I_0 脉冲力
B 单位质量物体的摩擦力, 弹簧静变形, 激励振幅	J 转动惯量
c 黏性阻尼系数	k 弹簧刚度系数, 抗扭刚度
c_D 阻力系数	k^* 等效刚度
c_L 升力系数	k_e 单元刚度矩阵
$C=(c_{ij})$ 阻尼矩阵	$K=(k_{ij})$ 刚度矩阵
C_p 模态阻尼矩阵	$\tilde{K}$ 缩并刚度矩阵
d 直径	K_{pi} 第 i 阶主刚度
D 板的抗弯刚度	l 长度
$D=FM$ 动力矩阵	$L=T-V$ 拉格朗日函数
E 总机械能, 弹性模量	$\mathcal{L}F(t)$ 拉普拉斯变换
E 单位矩阵	$\mathcal{L}^{-1}X(s)$ 拉普拉斯逆变换
f 频率, 单位质量物体的作用力, 分布力	m 质量
F 弹簧恢复力, 激励力	m_e 单元质量矩阵
$F(t)$ 傅里叶变换	M 力矩, 弯矩
F_d 黏性阻尼力	M_T 扭矩
F_N 正压力	M_{pi} 第 i 阶主质量
F_S 剪力	$M=(m_{ij})$ 质量矩阵
F_{cr} 临界载荷	$\tilde{M}$ 缩并质量矩阵
$F=(f_{ij})$ 柔度矩阵	n^0 法线轴基矢量
F_e 单元广义力	$N(x)$ 形函数
g 重力加速度	O 固定点
G 切变模量	O_1 几何中心
h 截面高度, 膜、板厚度	O_c 质心
$h(t)$ 脉冲响应函数	p 流体压强
$\mathbf{h}=(h_{ij})$ 脉冲响应矩阵	q 流量
$H(\omega)$ 复频响应函数, 动柔度	q_i 第 i 广义坐标

$q=(q_j)$ 广义坐标列阵	α 攻角
Q 品质因数	$\beta=A/B$ 振幅放大因子
$Q=(Q_i)$ 非保守广义力列阵	γ 切应变
R 瑞利商	$\delta(t)$ 脉冲函数
$R_x(\tau)$ 自相关函数	δ_{ij} 克罗内克符号
$R_{xy}(\tau)$ 互相关函数	δW 虚功
$s=\omega/\omega_n$ 量纲一的激励频率	$\Delta\omega$ 带宽
$s=\sigma+i\omega$ 拉普拉斯变换辅助变量	ε 小参数,正应变
S 奇点,截面面积	$\varepsilon(t)$ 阶跃函数
$S_x(\omega)$ 自谱	ζ 阻尼比
$S_{xy}(\omega)$ 互谱	ζ_* 等效阻尼比
S 传递矩阵	η 减缩因数,隔振因数
t 时间	θ 初相角,相位差,角度坐标
T 动能	κ 截面形状因数
T_n 无阻尼自由振动周期	λ_j 第 j 本征值
T_d 阻尼自由振动周期	Λ 对数减缩
u x 方向位移,节点坐标	Λ 本征值矩阵
u_e 节点坐标矩阵	μ 动摩擦因数
U 节点坐标列阵	μ_x 均值,数学期望
v y 方向位移,速度	ν 泊松比
V 势能	$\nu=1/\omega^2$ 频率平方倒数
w z 方向位移,挠度	ρ 密度
x 直角坐标	σ 正应力
x_f 基座牵连位移	σ_x^2 方差
x_{pi} 第 i 阶主坐标	τ 切应力
$\mathbf{x}=(x_i)$ 坐标列阵	$\boldsymbol{\tau}^0$ 切线轴基矢量
$\mathbf{x}_p=(x_{pi})$ 主坐标列阵	φ 角度坐标
X 复振幅	$\varphi(v)$ 干摩擦变化曲线
$X(s)$ 拉普拉斯变换	$\phi_j(x)$ 第 j 模态函数
$X(t)$ 随机变量	$\phi^{(i)}$ 第 i 阶模态
X 状态变量矩阵	$\phi_N^{(i)}$ 第 i 阶简正模态
y 直角坐标	$\Phi(\omega)$ 频谱函数,傅里叶逆变换
$y=\dot{x}$ 速度	Φ 模态矩阵
z 直角坐标	Φ_N 简正模态矩阵
Z_x 位移阻抗,位移导纳,动刚度	Φ^* 截断模态矩阵
Z_v 速度阻抗,速度导纳	ψ 相角
$Z_{\ddot{x}}$ 加速度阻抗,加速度导纳	ψ_x^2 均方值
$Z(s)$ 广义阻抗	$\psi(v)$ 相对平衡状态的干摩擦变化曲线

ψ 假设模态, 里茨基矢量

ψ 假设模态矩阵

ψ_N 假设简正模态矩阵

ω 激励频率

ω_n 无阻尼振动固有角频率

$\omega_{n.}$ 等效固有频率

ω_d 阻尼振动固有角频率

ω_m 共振频率

ω_i 第 i 阶固有频率

$\tilde{\omega}$ 固有频率的近似值

第2版序言

本书第1版于1998年作为普通高等教育“九五”重点教材出版,2000年列入面向21世纪课程教材。第1版以起点较高、将线性振动和非线性振动纳入统一的理论体系、注意介绍各种类型振动的工程背景和近代非线性动力学研究成果等为特色。鉴于第1版的提高部分已于2001年作为研究生教材《非线性振动》另行出版,本书第2版的修订工作以本科生教学为主要目标,特点如下:

1. 线性振动部分适当补充新内容,使理论更为完整和系统。将周期激励下的受迫振动和非周期激励下的暂态响应分为两章叙述。增加了拉普拉斯变换等实用的频域分析方法和能量方法。在连续系统部分,增加了铁摩辛柯梁、有轴向力和阻尼力的梁、轴向运动梁等特殊梁振动问题,以及弹性薄膜和薄板横向振动的基础知识。

2. 在近似计算部分,将多自由度系统和连续系统分为两章叙述。加强了对近似方法理论依据和误差估计的叙述,增加了近似求解连续系统模态函数方程和动力学方程的加权残数法,包括伽辽金法、并置法、子区域法和最小平方方法。

3. 为保持初版的特色,仍保留初版中以通俗易懂方式对工程中常见的非线性振动问题的初步分析。如保留初版自由振动一章中的相平面方法和静态分岔概念;保留自激振动一章和动态分岔概念;在受迫振动一章中保留非线性系统的响应,以解释跳跃、多频响应等非线性振动现象。

4. 通俗介绍专题性内容以开阔学生的视野。除前述非线性振动知识以外,在受迫振动和暂态响应两章中分别简要叙述混沌振动和随机振动的基本概念、分析方法和工程实例。各章的例题和习题也作了适当补充。

本书绪论叙述振动力学的概况和简史。正文共分8章,第一、二、三章讨论单自由度系统的自由振动、受迫振动和暂态响应,第四章叙述自激振动,第五、六章讨论多自由度系统的振动和近似计算方法,第七、八章讨论连续系统的振动和近似计算方法。本书绪论以及第六章和第八章增加的内容,第二章中的混沌振动、第七章中的轴向运动梁和能量法推导动力学方程的内容由陈立群编写。各章习题由陈立群选编。第七、八章的部分内容和第三章中的随机振动内容由陈文良编写。刘延柱编写第一至五章以及第七章增加的内容,并对全书修改统稿。

书稿承蒙西北工业大学方同教授详细审阅并提出宝贵修改意见,上海大学博士研究生张国策、张海娟和彭丽协助校对书稿,在此表示衷心感谢。书中不足之处望读者不吝指正。

作者

2010年4月于上海交通大学和上海大学

第1版序言

随着工程技术的发展,机械振动问题已成为各个工程领域内经常提出的重要问题。电子计算机的广泛使用和动态测量技术的进步也为复杂振动问题的解决提供了有力的工具。因此,振动力学已成为工程技术人员必须具备的理论知识。在机械、航空、土建、水利等工程专业的本科生和研究生教学过程中,振动力学是一门重要的专业基础课程。它更是工程力学专业本科教学的主干课程之一。这门课程要求学生掌握机械振动的基本理论和分析、计算方法,并能初步应用理论研究和解决工程中的各种振动问题。

作为振动力学教材,本书根据教育部工程力学专业教学指导委员会制订的“振动力学教学基本要求”编写。全书除绪论外共分十一章。前六章为基本部分,包括自由振动、受迫振动、自激振动、多自由度系统的振动、线性振动的近似计算方法和连续系统的振动。后五章为提高部分,包括振动问题的定性理论、非线性振动的近似解析方法、参数振动、随机振动和混沌振动。各章附有适量的习题,以加深对内容的理解。基本部分适用于工程力学等专业的本科生,提高部分适用于研究生。本书也可作为从事与机械振动有关工作的工程技术人员的参考书。

在编写中,作者力求贯彻以下意图:

1. 提高基本部分的起点,精简与物理、理论力学的重复内容。
2. 将线性振动和非线性振动纳入统一的理论体系。在基本部分中除线性振动内容之外,也引导学生接触非线性振动问题,对诸如多频响应、自激振动等一些工程中常见的非线性振动现象作出初步的理论分析和解释。关于非线性振动更深入的讨论在提高部分中进行。
3. 对各种类型的振动均举出工程中具体实例加以说明,使理论与工程实际紧密联系。
4. 关于数值计算问题,着重介绍各种算法的基本原理。利用电子计算机的解题训练可自编或应用已有的标准计算程序和软件。
5. 引入分岔、混沌等反映近代非线性动力学研究成果的内容,使学生了解振动理论前沿基础研究的新进展以扩大知识面。

本书第六章和第十章由陈文良编写,绪论和第十一章由陈立群编写,其余八章由刘延柱编写。全书由刘延柱加工定稿,陈立群选编习题并打印初稿。编写

工作得到各方面的支持和鼓励,并且汲取了已出版的国内外振动力学教材的许多宝贵经验。部分内容取材于作者在清华大学和上海交通大学所编写的教学讲义,初稿完成后曾在上海交通大学工程力学系本科生和研究生中试用。书稿承蒙清华大学郑兆昌教授和西北工业大学方同教授详细审阅并提出许多宝贵意见,作者谨表示衷心感谢。限于水平,书中不足之处恳请读者指正。

作者

1998年2月于上海交通大学

目 录

绪论	1
§ 0.1 振动和振动力学	1
§ 0.2 振动的分类	2
§ 0.3 振动力学发展简史	3
§ 0.4 振动力学在工程中的应用	7
第一章 自由振动	8
§ 1.1 线性系统的自由振动	8
§ 1.2 相轨迹与奇点	15
§ 1.3 保守系统的自由振动	17
§ 1.4 静态分岔	23
§ 1.5 耗散系统的自由振动	27
习题	32
第二章 受迫振动	36
§ 2.1 线性系统的受迫振动	36
§ 2.2 工程中的受迫振动问题	46
§ 2.3 非线性系统的受迫振动	49
§ 2.4 受迫振动的混沌性态	54
习题	57
第三章 暂态响应	60
§ 3.1 暂态响应的时域分析	60
§ 3.2 暂态响应的频域分析	64
§ 3.3 随机激励的响应	73
§ 3.4 工程中的暂态响应问题	81
习题	83
第四章 自激振动	86
§ 4.1 自激振动概述	86
§ 4.2 极限环与范德波尔方程	88
§ 4.3 工程中的自激振动问题	90
§ 4.4 张弛振动与动态分岔	97
习题	100
第五章 多自由度系统的振动	103

§ 5.1 多自由度系统的动力学方程	103
§ 5.2 多自由度系统的自由振动	108
§ 5.3 频率方程的零根和重根情形	120
§ 5.4 多自由度系统的响应	126
§ 5.5 有阻尼的多自由度系统	135
§ 5.6 非线性多自由度系统	142
习题	145
第六章 多自由度系统振动的近似计算	151
§ 6.1 邓克利法	151
§ 6.2 瑞利法	153
§ 6.3 里茨法	158
§ 6.4 矩阵迭代法	163
§ 6.5 子空间迭代法	169
习题	173
第七章 连续系统的振动	175
§ 7.1 弦和杆的振动	175
§ 7.2 梁的弯曲振动	181
§ 7.3 梁振动的特殊问题	193
§ 7.4 膜和板的振动	204
§ 7.5 能量原理与动力学方程	212
习题	215
第八章 连续系统振动的近似计算方法	218
§ 8.1 集中质量法	218
§ 8.2 能量原理与瑞利商	226
§ 8.3 假设模态法	239
§ 8.4 加权残数法	247
§ 8.5 传递矩阵法	255
§ 8.6 有限元法	262
习题	270
附录 拉普拉斯变换表	274
习题答案	275
参考文献	285
索引	286
外国人名译名对照表	292
Synopsis	294
Contents	295
作者简介	298

绪 论

§ 0.1 振动和振动力学

在自然界、工程技术、日常生活和社会生活中,普遍存在着状态的循环变化或物体的往复运动。这类现象称为**振荡**。如大海的波涛起伏、花的日开夜闭、钟摆的摆动、心脏的跳动、经济发展的高涨和萧条等形形色色的现象都具有明显的振荡特性。**振动**是一种特殊的振荡,即平衡位置附近微小或有限的振荡。工程技术涉及的机械和结构的振动称为**机械振动**。

在许多情况下,机械振动被视为消极因素。例如,振动会影响精密仪器的性能,降低加工精度和光洁度,加剧构件疲劳和磨损,缩短机器和结构物的使用寿命,甚至引起结构的破坏。典型的案例是 1940 年美国塔科马 (Tacoma) 吊桥因风载引起振动而坍塌的事故。即使不引起破坏,汽车和飞机的振动也会劣化承载条件,强烈的振动噪声会形成公害。然而,振动也有积极的一面,如将振动用于振动传输、振动筛选、振动抛光、振动沉桩、振动消除内应力等生产过程。此外,电系统的振动是通讯、广播、电视、雷达等工作的基础。可以预期,随着生产实践和科学研究的进展,振动的利用还会与日俱增。

各个不同领域中的振动现象虽然各具特色,但有着共同的客观规律,可以建立统一的理论来进行研究。振动力学就是这样一门力学分支学科。在统一的力学模型基础上,振动力学应用数学分析、实验量测和数值计算等方法,探讨振动现象的机理,阐明振动的基本规律,为解决实践中可能出现的各种振动问题提供理论依据。

关于振动问题的研究内容,可用系统、激励和响应来概括。能产生振动的机械部件、工程结构等研究对象称为**振动系统**,简称**系统**。就机械系统而言,构成系统的基本要素是惯性元件和弹性元件,即质量和弹簧。实际工程系统中还有阻尼元件。质量储存的动能和弹簧储存的势能在振动过程中互相转换,阻尼则消耗系统的能量。初始干扰、强迫力等外界因素对于系统的作用统称为**激励**。系统在激励作用下产生的运动称为**系统的响应**。通常可将振动问题分为三类。

(1) **振动分析**:已知激励和系统特性求系统的响应。为机械强度或刚度计

算提供依据。

(2) **系统识别**:已知激励和响应求系统的特性参数。这类问题也可称为系统设计,即在一定的激励条件下确定系统参数,使响应满足指定的条件。

(3) **振动环境预测**:已知系统特性和响应求激励,即判断系统的环境特性。实际振动问题往往错综复杂,可能同时包含识别、分析和设计几方面的问题。振动力学作为一门力学课程着重讨论振动分析问题。

§ 0.2 振动的分类

根据研究侧重点的不同,可从不同的角度对振动进行分类。

1. 按对系统的激励类型分为

(1) **自由振动**:系统受初始激励后不再受外界激励的振动。

(2) **受迫振动**:系统在外界控制的激励作用下的振动。

(3) **自激振动**:系统在自身控制的激励作用下的振动。

(4) **参数振动**:系统自身参数变化激发的振动。

2. 按系统的响应类型分为

(1) **确定性振动**:响应是时间的确定性函数。根据响应存在时间分为**暂态振动**和**稳态振动**:前者只在较短的时间中发生,后者可在充分长的时间中进行。根据响应是否有周期性还可分为

(a) **简谐振动**:响应为时间的正弦或余弦函数。

(b) **周期振动**:响应为时间的周期函数,可用频谱分析方法展开为一系列周期可通约的简谐振动的叠加。

(c) **准周期振动**:若干个周期不可通约的简谐振动组合而成的振动。

(d) **拟周期振动**:响应为时间的拟周期函数。拟周期函数 $f(t)$ 是指对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon) > 0$, 使得 $|f(t) - f(t + T(\varepsilon))| < \varepsilon$ 。

(e) **混沌振动**:响应为时间的有界非周期函数。

(2) **随机振动**:响应为时间的随机函数,只能用概率统计的方法描述。

3. 按系统的性质分为

(1) **确定性系统和随机性系统**:确定性系统的系统特性可用时间的确定性函数给出。随机性系统的系统特性不能用时间的确定性函数给出,只具有统计规律性。

(2) **离散(集中参量)系统和连续(分布参量)系统**:离散系统是由彼此分离的有限个质量元件、弹簧和阻尼构成的系统,自由度为有限个,数学描述为常微分方程。最简单也是最基本的离散系统为单自由度系统。连续系统是由弦、杆、

轴、梁、板、壳等弹性元件组成的系统,有无限多个自由度,数学描述为偏微分方程。

(3) **定常系统和参变系统**:定常系统是系统特性不随时间改变的系統,数学描述为常系数微分方程。参变系统是系统特性随时间变化的系統,数学描述为变系数微分方程。

(4) **线性系统和非线性系统**:线性系统是质量不变、弹性力和阻尼力与运动参数成线性关系的系統,数学描述为线性微分方程。非线性系統是不能简化为线性系统的系統,数学描述为非线性微分方程。

还需指出,对于相同的振动问题,在不同条件下或为不同目的,可以采用不同的振动模型。例如,外界激励很小的受迫振动可视为自由振动;微幅振动的非线性系統可近似作为线性系統处理;连续系統可将分布参量近似地凝缩为有限个集中参量,简化为离散系統;在较短时间间隔内研究周期很长的周期振动,便与混沌振动难以区分。模型的建立及分析模型所得的结论,必须通过科学实验或生产实践的检验。只有那些符合或大体符合客观实际的模型和结论,才是正确或基本正确的。

§ 0.3 振动力学发展简史

人类对振动现象的了解和利用有着漫长的历史,远古时期的先民已有利用振动发声的各种乐器。人类对振动问题的研究起源于公元前 6 世纪毕达哥拉斯(Pythagoras)的工作,他通过实验观测得到弦线振动发出的声音与弦线的长度、直径和张力的关系。在同一时期,即我国春秋时期成书的《管子》中已根据弦线振动与长度的关系提出最早的音律学原理^①。战国时期成书的《庄子》记载了共振现象^②。在 16 世纪,现代物理科学的奠基人伽利略(Galilei, G.)对振动问题进行了开创性的研究。他发现了单摆的等时性,并利用他提出的自由落体公式计算了单摆周期。此后,惠更斯(Huygens, C.)注意到单摆大幅摆动对等时性的偏离,并发现了两只频率接近时钟的同步化等两类非线性现象。墨森(Mersenne, M.)在实验基础上系统地总结了弦线振动的频率特性。胡克(Hooke, R.)于 1678 年发表的弹性定律和牛顿(Newton, I.)于 1687 年发表的动力学定律分别为振动力学的发展奠定了物性和物理的基础。

① 根据《管子·地员篇》中记载的计算音律的“三分损益律”,三分损一($2/3$)所发之音较原音高五度,三分益一($4/3$)所发之音较原音低四度。

② 《庄子·渔父》中记载:“同类相从,同声相应,固天之理也。”

离散系统线性振动的理论在 18 世纪中叶基本成熟。1727 年约翰·伯努利 (Bernoulli, John) 研究了不计质量弹性弦线上等距分布的等质量质点, 建立了无阻尼自由振动的动力学方程, 并求出解析解。欧拉 (Euler, L.) 于 1728 年建立并求解了单摆在有阻尼介质中运动的微分方程。1739 年他研究了无阻尼简谐受迫振动, 从理论上解释了共振现象。1747 年他对 n 个等质量质点由等刚度弹簧连接的系统列出微分方程组并求出精确解, 从而发现系统的振动是各阶简谐振动的叠加, 特定振型的出现取决于初始条件。1762 年拉格朗日 (Lagrange, J. L.) 建立了离散系统线性振动的一般理论, 但其中关于频率方程有重根情形的结论有误, 直到 1858 年威尔斯特拉斯 (Weierstrass, K.) 才加以更正。

最早研究的连续系统是弦线, 1746 年达朗贝尔 (D'Alembert, J. R.) 用偏微分方程描述弦线振动而得到波动方程并求出行波解。1753 年丹尼尔·伯努利 (Bernoulli, D.) 用无穷多个模态叠加的方法得到弦线振动的驻波解, 1759 年拉格朗日从驻波解推得行波解, 但严格的数学证明直到 1811 年傅里叶 (Fourier, J.) 提出函数的级数展开理论才完成。1762 年欧拉和 1763 年达朗贝尔分别研究了非均匀弦线和重弦线。1897 年史考区 (Skutch, R.) 导出了轴向运动弦线的固有频率。1784 年库仑 (Coulomb, C.) 对圆柱扭转振动进行了理论和实验研究, 而扭转振动问题是 1829 年泊松 (Poisson, S. D.) 将其作为他所建立的三维弹性体振动理论的特例才得到系统解决。1802 年克拉尼 (Chladni, E. F. F.) 研究了杆的纵向振动。1829 年彭赛列 (Poncelet, J. V.) 研究了杆在冲击作用下的纵向振动, 据此说明一队士兵以整齐步伐通过悬索桥的危险性。欧拉于 1744 年、丹尼尔·伯努利于 1751 年分别研究了梁的横向振动, 导出了自由、铰支和固定端梁的频率方程和模态函数。所忽略的截面转动和剪切变形的影响, 直到 1849 年和 1916 年才分别由瑞利 (Rayleigh, J. W. S.) 和铁摩辛柯 (Timoshenko, S.) 加以补充修正。1878 年艾肯 (Aiken, J.) 研究了轴向运动梁的横向振动。1759 年欧拉将弹性薄膜视为两组互相正交的弦线解决了矩形膜的振动问题, 但同样方法不能解决圆形膜问题。直到 1829 年泊松才完全解决了膜振动问题。1787 年克拉尼发表了不同边界条件下玻璃和金属板振动波节线的实验结果, 激发了对板和壳振动研究的热情。1789 年詹姆斯·伯努利 (Bernoulli, James) 将板视为两组互相正交的梁而导出缺少混合二阶偏导数项的动力学方程。1815 年热尔曼 (Germain, S.) 经过拉格朗日的指正导出了正确的板横向振动的动力学方程, 对克拉尼的实验结果做出初步理论解释。泊松在 1814 年以来的系列工作中导出了板的正确动力学方程, 但所建立的边界条件尚有缺陷。1928 年纳维 (Navier, C. L.) 建立了板的弯曲振动理论并研究了三维弹性体的振动。1850 年基尔霍夫 (Kirchhoff, G. R.) 修正了泊松的错误, 引入了符合实际的板变形假说, 并给出圆板的自由振动解, 比较完整地解释了克拉尼的实验结果。