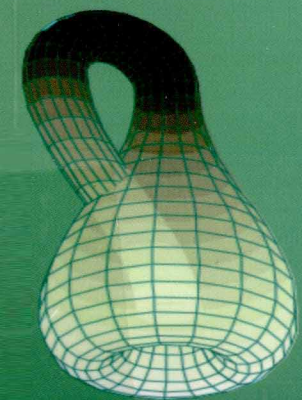
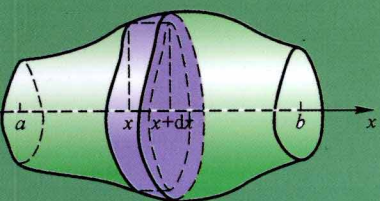




自主创新
方法先行

高等数学同步练习 (全一册)

主编 张学山



 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



自主创新
方法先行

高等数学同步练习 (全一册)

主编 张学山

GAODENG
SHUXUE
TONGBU
LIANXI

内 容 提 要

本书为配合普通高校本科一学年高等数学课程的教学而编写,与一般教学进度同步。本书将高等数学的全部内容分为八个模块(篇),书中的训练题分为练习(包括基础练习、综合练习)和综合测试两部分。练习题以基本概念、基本计算、基本方法、基本应用题为主,综合测试部分则是安排在每个模块(篇)结束后或期中、期末考试前,进一步训练学生的综合应用能力。

本书在每一套训练题的前面,都精心编排了简明的“训练目的”和“解题指导”,便于学生明确方向,尽快聚焦解题思路,少走弯路。为方便同学查阅,书后安排了附录,罗列了一些常用的初等数学和高等数学公式。此外,在本书的最后,还增加了一个“解题提示”,给出习题答案或解题思路、解题方法的提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习:全1册 / 张学山主编. -- 北京:
高等教育出版社, 2012. 6
ISBN 978-7-04-035200-9

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第081640号

策划编辑 王 强 责任编辑 徐 可 封面设计 于 涛 版式设计 范晓红 插图绘制 黄建英 责任校对 刁丽丽 责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 廊坊市文峰档案印务有限公司
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 14.25
字 数 440千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2012年6月第1版
印 次 2012年6月第1次印刷
定 价 21.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 35200-00

前 言

高等数学课程的主要目标是培养学生具有熟练的运算能力和综合的数学应用能力,为后继课程的学习打下扎实的基础。该课程学习质量的好坏会直接或间接地影响到每一位学生的发展。在课程的教与学过程中,除了老师的教,学生的练也是非常重要的一个环节。为规范、合理地加强课后训练,我们针对一学年的高等数学课程编写了这本《高等数学同步练习(全一册)》。

就高等数学课程而言,正确理解基本概念,熟练掌握基本运算,有较强的综合应用能力,是时代的要求。“复杂的机器是由简单的零件装配而成的”这个道理同样适用于数学题的求解。如果对数学概念把握不准,基本的数学公式、基本的计算没有掌握,就没有办法去求解更加一般的、综合性较强或有一定难度的数学题。因此,在教学中,一方面,教师要注意加强对基本概念、基本运算、基本应用的教学,还要更加重视对学生数学应用能力的培养;另一方面,学生要加强训练、多做习题,在解题过程中加深对基本概念的理解,强化对基本理论、基本公式的运用能力训练,总结和提炼解题技巧。

基于上述考虑,《高等数学同步练习(全一册)》不仅与教学同步,还将书中的训练题分为练习(包括基础练习、综合练习)和综合测试两部分。练习题以基本概念、基本计算、基本方法、基本应用的训练为主;综合测试将高等数学的全部内容分为八个模块(篇),在每个模块(篇)结束的地方,或期中、期末考试前选配两套综合测试题,以此来训练学生的综合应

用能力。

2010年,作者所在高校被列入教育部“卓越工程师教育培养计划”的首批试点单位。为更好地适应“卓越计划”试点专业的需求,《高等数学同步练习(全一册)》选编了少量有专业背景的应用题,已在题号上加#标出。

在每套训练题的起始,都精心编排了简短的“训练目的”和“解题指导”,这样做的目的是为了便于学生明确方向,尽快聚焦解题思路,少走一点弯路。为方便同学查阅,书后安排了一个附录,罗列了一些常用的初等数学和高等数学公式。此外,根据同学们的建议,在本书的最后增加了一个“解题提示”,给出习题答案或解题思路、解题方法的提示。

本书由张学山策划并组织编写。参加编写的老师有:周雷(第一章),赵德钧(第二章),洪银萍(第三章),沈亦一(第四、五章),李路(第六章),张颖(第七章),方涛(第八章),李铭明(第九、十章),彭利平(第十一章),张学山(期中、期末考前综合测试卷),李娜(校验与版面),江开忠(插图制作)。上海工程技术大学教务处和基础教学学院的领导、张子厚教授和数学教学部的老师们给予了极大的关心与支持,在此一并致谢。

本书是我校数学课程教学改革的一种尝试与探索,书中可能会有不当之处或错误,恳请使用者不吝雅正。

作 者

2012年5月



目 录

第一篇 函数、极限与连续	1	第三篇综合测试 B 卷	75
第一章 函数、极限与连续	1	第四篇 常微分方程	77
基础练习一、基础练习二、基础练习三、 基础练习四、基础练习五、基础练习六		第六章 常微分方程	77
第一篇综合测试 A 卷	13	基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四、 基础练习五、基础练习六、基础练习七	
第一篇综合测试 B 卷	15	第四篇综合测试 A 卷	91
第二篇 一元函数微分学	17	第四篇综合测试 B 卷	93
第二章 导数与微分	17	上册期末考前综合测试 A 卷	95
基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四		上册期末考前综合测试 B 卷	97
第二章综合练习 A、第二章综合练习 B		第五篇 空间解析几何	99
第三章 微分中值定理与导数的应用	29	第七章 空间解析几何与向量代数	99
基础练习一、基础练习二、基础练习三、 基础练习四、基础练习五、基础练习六		基础练习一、基础练习二、基础练习三、 基础练习四、基础练习五、基础练习六	
第二篇综合测试 A 卷	41	第五篇综合测试 A 卷	111
第二篇综合测试 B 卷	43	第五篇综合测试 B 卷	113
上册期中考前综合测试 A 卷	45	第六篇 多元函数微分学	115
上册期中考前综合测试 B 卷	47	第八章 多元函数微分学	115
第三篇 一元函数积分学	49	基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四、 基础练习五、基础练习六、基础练习七、基础练习八	
第四章 不定积分	49	第六篇综合测试 A 卷	131
基础练习一、基础练习二、基础练习三		第六篇综合测试 B 卷	133
第四章综合练习 A、第四章综合练习 B		第七篇 多元函数积分学	135
第五章 定积分	59	第九章 重积分	135
基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四、 基础练习五、基础练习六 第五章综合练习		基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四、 基础练习五 第九章综合练习 A、第九章综合练习 B	
第三篇综合测试 A 卷	73	下册期中考前综合测试 A 卷	149

目 录

下册期中考前综合测试 B 卷	151	第四章	203
第十章 曲线积分与曲面积分	153	第五章	204
基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四、 基础练习五、基础练习六、基础练习七、基础练习八		第三篇综合测试 A 卷	206
第七篇综合测试 A 卷	169	第三篇综合测试 B 卷	206
第七篇综合测试 B 卷	171	第六章	206
第八篇 无穷级数	173	第四篇综合测试 A 卷	208
第十一章 无穷级数	173	第四篇综合测试 B 卷	208
基础练习一、基础练习二、基础练习三、基础练习四、 基础练习五、基础练习六、基础练习七		上册期末考前综合测试 A 卷	209
第八篇综合测试 A 卷	187	上册期末考前综合测试 B 卷	209
第八篇综合测试 B 卷	189	第七章	209
下册期末考前综合测试 A 卷	191	第五篇综合测试 A 卷	210
下册期末考前综合测试 B 卷	193	第五篇综合测试 B 卷	210
附录 常用数学公式	195	第八章	211
解题提示	199	第六篇综合测试 A 卷	213
第一章	199	第六篇综合测试 B 卷	213
第一篇综合测试 A 卷	199	第九章	213
第一篇综合测试 B 卷	199	下册期中考前综合测试 A 卷	214
第二章	200	下册期中考前综合测试 B 卷	214
第三章	201	第十章	215
第二篇综合测试 A 卷	202	第七篇综合测试 A 卷	216
第二篇综合测试 B 卷	203	第七篇综合测试 B 卷	216
上册期中考前综合测试 A 卷	203	第十一章	216
上册期中考前综合测试 B 卷	203	第八篇综合测试 A 卷	218
		第八篇综合测试 B 卷	219
		下册期末考前综合测试 A 卷	219
		下册期末考前综合测试 B 卷	219



第一篇 函数、极限与连续

第一章 函数、极限与连续

基础练习一

学号 _____ 姓名 _____

训练目的: 在初等数学的基础上, 熟悉、理解与函数有关的基本概念, 会求定义域, 能根据简单实际问题的背景建立函数关系.

解题指导: 注意运用以下知识点: 确定函数的两个要素、确定函数自然定义域的原则、分段函数的概念、函数复合运算的方法. 最后三题是初等的数学建模, 理解题意是解题的关键.

1. 判别下列各组函数是否相同, 说明理由.

(1) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$;

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln x}$.

2. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} e^x + 1, & |x| < 1 \\ x^3, & 1 \leq |x| < 3 \end{cases}$, 确定函数的定义域, 计算 $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi(2)$, 并作出该函数的图像.

3. 求函数 $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$ 的定义域.

4. 找出下列复合函数的复合关系:

(1) $y = e^{-(\cos x)^2}$;

(2) $y = (\arcsin e^x)^3$;

(3) $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域是闭区间 $[0, 1]$, 求函数 $f(x^2 - 1)$ 的定义域.

6. 设 $f(x-1) = x^2$, 求 $f(2x+1)$.
7. 在一长为 20 cm, 宽 12 cm 的矩形的四个角上各剪掉一个边长为 a 的小正方形, 剩下的部分折叠成一个无盖长方体盒子, 求此盒子的容积 V 与 a 之间的函数关系, 并写出定义域.
8. 运输公司为客户运送货物的报价是, 起步价为 a 千米以内 b 元, 超过 a 千米的每千米 k 元, 试求运价 y 与路程 x 之间的函数关系.
- 9*. 某汽车厂推出一款新车, 市场调查和分析的结果是, 如果每辆车按 30 万元销售, 当产量不超过 500 辆时可全部售出; 当产量超过 500 辆时, 通过支付 1 000 万元做广告宣传又可多售出 3 000 辆, 试将该款新车的销售收入与销售量之间的依赖关系用数学式子表示出来.



基础练习二

学号 _____ 姓名 _____

训练目的：体会极限的定义；掌握极限的四则运算法则，会求一些简单的极限。

解题指导：第3题要应用极限和左右极限的关系。解其余各题要运用极限的四则运算法则。第7题解题提示：如果极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，而 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ，试试看 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ?$

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限：

$$(1) x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2};$$

$$(2) x_n = \frac{2n-1}{2n}.$$

2. 观察和判别下列函数在相应的自变量变化趋势下哪些有极限。如果有极限，写出极限值。

$$(1) y = x \sin \frac{1}{x}, x \rightarrow 0;$$

$$(2) y = \frac{x^2 + 1}{2x^2}, x \rightarrow \infty;$$

3. 利用极限和左右极限的关系，证明当 $x \rightarrow 1$ 时，函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \geq 1, \\ x-2, & x < 1 \end{cases}$ 的极限不存在。

4. 设 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \sqrt{2}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3g(x)]$ 和 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - h(x)}{[f(x)]^3}$.

5. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在，且 $f(x) = 3x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ，求函数 $f(x)$ 。

6. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^2+2x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$;

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$;

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 5n^3 - 1}{(n-1)(n+1)^2}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right)$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right)$.

7. 设极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + a}{x - 3} = 4$, 求 a .



基础练习三

学号 _____ 姓名 _____

训练目的：熟悉并掌握两个重要极限和极限存在准则.

解题指导：解题过程会用到三角函数恒等式、分子有理化等，不熟悉的可参考教材后的附录. 理解两个重要极限的形式和结论的重要性. 在利用第二个重要极限时，要将底数简化成 $1 + \alpha$ 的形式，其中 α 是无穷小，而指数位置要出现 α 的倒数，然后进一步求解. 最后两题分别用夹逼准则和单调有界原理.

1. 利用第一个重要极限求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 3x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$$

2. 求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{2x}};$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{-\frac{1}{t}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} \quad (k \in \mathbf{N});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}.$$

3. 如果极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{k}{x}} = e^5$, 求常数 k .

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\csc^2 x}.$$

5. 利用极限存在准则证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$$

6. 证明数列

$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$
极限存在并求其极限.



基础练习四

学号 _____ 姓名 _____

训练目的：熟悉无穷小的概念与性质，会比较无穷小的阶，会利用等价无穷小代换求极限.

解题指导：无穷小与有界量的乘积是无穷小. 无穷小代换只可以用于积或商的极限，不可以用于和或差的极限.

1. 当 $x \rightarrow -1$ 时，无穷小 $1+x$ 与下列无穷小是否同阶？是否等价？说明理由.

(1) $1+x^3$;

(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$.

3. 设 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x$ 与 $a \sin^2 \frac{x}{2}$ 是等价无穷小，求 a .

4. 利用等价无穷小代换，求下列极限：

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{3x}$;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{x}{n};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) \tan x}{1 - \cos^2 x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}{x \arctan x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin 5x}{1 - \cos 2x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 2x}{2 \sin x}.$$

基础练习五

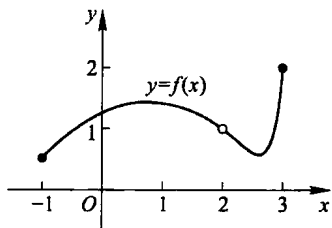
学号 _____ 姓名 _____

训练目的：熟悉函数连续性的概念，会依据函数在一点连续的三个必要条件判断函数的连续性，会找间断点并能判断类型。

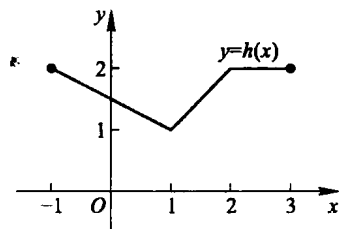
解题指导：间断点就是函数不连续的点，即极限不存在的点，或函数没有定义的点，或极限值不等于函数值的点。分段函数在分段点处的连续性应通过“左、右极限与函数值相等”来确定。第5题先根据 x 取值范围的不同情形求出极限得到 $f(x)$ 不含极限的表达式，再讨论其连续性。

1. 根据下列图形，判断函数是否有间断点，有的话请写出并确定间断点的类型。

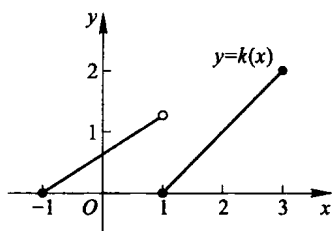
(1)



(2)



(3)



2. 找出下列函数的间断点，并判断间断点的类型(写出计算过程)。如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使得函数在该点连续。

$$(1) f(x) = x \sin \frac{1}{x};$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x > 0, \\ e^x - 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

4. 求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间,
并求极限 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

5. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} x$ 的连续性, 若有
间断点, 判别其类型并画出函数图像.

3. 研究函数的连续性, 并画出函数的图像:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x < -1 \text{ 或 } x > 1. \end{cases}$$

基础练习六

学号 _____ 姓名 _____

训练目的：利用函数的连续性求极限；各种求极限方法的综合应用；熟悉闭区间上连续函数的性质。

解题指导：熟练运用求极限的主要方法非常重要，解题中要不断回忆和总结，提高求极限的速度和综合能力。证明题主要是运用连续函数的零点定理，其中的第2, 5两题要构造辅助函数，第3, 4两题可采用反证法。

1. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3x+1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\ln(1+2x)}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+4} - 2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1});$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. 证明方程 $x^3 + 2x = 6$ 至少有一个根介于1和2之间。