高等数学教材丛书

陈兰荪 主编

线性代数

XIANXING DAISHU

张发秦 傅金波 陈兰荪 编著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等数学教材丛书

线性代数

陈兰荪　主编
张发秦　傅金波　陈兰荪　编著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/张发秦，傅金波，陈兰荪编著．—北京：中国科学技术出版社，2013.2

（高等数学教材丛书/陈兰荪主编）

ISBN 978-7-5046-6309-2

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①张…②傅…③陈…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 028482 号

责任编辑　王晓义
封面设计　孙雪骊
责任校对　赵丽英　孟华英
责任印制　张建农

出　　版　中国科学技术出版社
发　　行　科学普及出版社发行部
地　　址　北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编　100081
发行电话　010-62173865
传　　真　010-62179148
投稿电话　010-62103347
网　　址　http://www.cspbooks.com.cn

开　　本　787mm×1092mm　1/16
字　　数　260 千字
印　　张　13.5
版　　次　2013 年 3 月第 1 版
印　　次　2013 年 3 月第 1 次印刷
印　　刷　北京长宁印刷有限公司

书　　号　ISBN 978-7-5046-6309-2/O·164
定　　价　30.00 元

《高等数学教材丛书》编委会

前言

为了适应21世纪我国高等教育的发展，特别是理工科独立学院的发展，在中国科学院数学研究所研究员、生物数学家、福建师范大学闽南科技学院名誉院长陈兰荪教授的主持下，由张发秦、付金波等人执笔，根据在闽南科技学院十多年的教学实践，编写了这套《高等数学教材丛书》.

这套教材主要特点是采用分层教学理念编写. 一方面，简明直接地阐述最基本内容，让大多数非数学专业的学生掌握最基础的数学知识；另一方面，为保证大学教育的公正性，书中带 * 号内容，提供给学有余力，愿意深入学习的学生. 我们希望通过精讲精练的方式，把高等数学更明白地展现给普通人，展现给未来需要数学工具和方法的人，而不只是数学工作者.

这套书每章的最后一节《综合训练》都应该在全书学完后，再做进一步学习. 另外，它还可以作为非数学专业学生报考研究生的复习资料.

作者水平有限，不妥之处，欢迎读者批评指正.

希望我们的这项工作能为理工科独立学院的发展作出有益的贡献.

目录

第1章　行列式

1.1　行列式的定义

行列式是以行、列构成的表格形来表示一个数，它是按一定方法规定计算法则得到的一个数. 行列式源于解多元线性方程组，并在形式上依赖线性方程组的系数.

定义 1　由 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列称为一个 n 级排列 $\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}$.

例如 $\{1,5,2,4,3\}$ 是一个 5 级排列.

在 $n!$ 个 n 级排列中，唯一的按自然数顺序排列的 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 称为标准排列.

定义 2　在排列中，一个大数排在一个小数之前，称这两个数构成一个逆序.

一个排列中逆序的总和，称为逆序数，记作 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$.

例如：$\{1,5,2,4,3\}$ 中，$5>2,5>4,5>3,4>3$

$\therefore\ \tau(1,5,2,4,3)=4$.

逆序数为偶数的排列称为偶排列.

逆序数为奇数的排列称为奇排列.

$\{1,5,2,4,3\}$ 是偶排列.

$\tau(1,2,3,4,5)=0$，偶排列.

定义 3　由 n^2 个数排列成 n 行 n 列，这个数在第 i 行第 j 列，记为 a_{ij}，它们构成 n 阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，记为 $|A|$ 或 $\det(A)$，定义为 $|A|=\sum\limits_{(j_1,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

其中 $\sum$ 是对所有 n 级排列方式求和，即取遍所有的 n 级排列，也就是共有 $n!$ 项，$\tau(j_1,\cdots,j_n)$ 是逆序数，称 $|A|$ 为行列式，元素 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数 $(i,j=1,$

$2,\cdots,n)$.

例如三阶行列式有

列标所成的排列	逆序数	带符号的乘积项
(1,2,3)	0	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
(1,3,2)	1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
(2,3,1)	2	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
(2,1,3)	1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
(3,1,2)	2	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
(3,2,1)	3	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

注意到行列式中每一项的因子元素下标构成一种排列，因而必定来自不同行不同列（排列中没有相同的两个数字）.

例 1 计算 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解：$|A|$的一般项是$(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$

$$\tau(1,2,\cdots,n)=0$$

除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其他项都有因子 0，从而为 0，

$$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（称此行列式为下三角行列式；同理上三角行列式也等于主对角线元素乘积）.

例 2 $|A|=\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & a & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}=-6$，则 $a=$________.

解：$|A|=(-1)^{\tau(4,3,2,1)}4\times3\times a\times1$

$$\tau(4,3,2,1)=3+2+1=6$$

由已知$|A|=12a=-6$，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

例 3　$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，计算$|A|$（对角线上元素 $a_{1n},\cdots,a_{n1}$ 均不为 0）.

解：$\tau(n,n-1,\cdots,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

非零项只有一项 $(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)}a_{1n}\cdots a_{n1}$

$\therefore\ |A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdots a_{n1}$.

1.2　行列式的性质与计算

将行列式　$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行与列的互换，得到行列式　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

记为 D^T，称为 D 的转置行列式.

性质 1　行列式转置，值不变，即 $D^T=D$.

证明：$D=\sum\limits_{j_1,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 对和式中的任何一项 $(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 而言，它的符号已经给定，只是要求第 2 下标按自然顺序将因子重排，当然值不变，$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=a_{k_1 1}\cdots a_{k_n n}$，当然符号也不变.

事实上，把 $j_1,\cdots,j_n$ 排成由 $1,2,\cdots,n$ 的一组对调而成的置换，同时也就把 $1,2,\cdots,n$ 排成 $k_1,\cdots,k_n$，所以，$j_1,\cdots,j_n$ 与 $k_1,\cdots,k_n$ 逆序数的奇偶性相同.

它还是转置行列式中的一般项，从而

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{k_1,\cdots,k_n}(-1)^{\tau(k_1,\cdots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} \\ &= \sum_{j_1,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= D \end{aligned}$$

例 1 考察 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}=-a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}$$

解:只有一项非零,符号由下式得 $\tau(5,3,2,1,4)=4+2+1=7$

观察以下列表:

$$\begin{array}{cccccc} (k_1,\cdots,k_n) & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (j_1,\cdots,j_n) & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

有 $\tau(4,3,2,5,1)=3+2+1+1=7$

$$D^T=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{41} & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{54} \\ a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-a_{41}a_{32}a_{23}a_{54}a_{15},$$

其中,$-a_{41}a_{32}a_{23}a_{54}a_{15}=-a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}$,这是显然的,因为它只是数交换顺序重排而已,数的乘法交换律当然成立.

性质 1 行列式行具有的性质列同时也具有.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式值变号.

简证:交换两行一次,一般项逆序数奇偶性恰改变一次,从而行列式变号一次.

推论:行列式两行元素对应相等,行列式值为 0.

事实上,若将行列式 D 中这两行互换,仍是 D. 即 $-D=D\Rightarrow D=0$.

性质 3 $D_1=|ka_{i1}\ \ \cdots\ \ ka_{in}|=k|a_{i1}\ \ \cdots\ \ a_{in}|=kD$

证明:D_1 的一般项为:

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=k\left[(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\right]$$

等式右端方括号内恰是 D 的一般项,$\therefore\ D_1=kD$

推论 1 一行(列)的公因子可以提到行列式外面.

推论 2 两行(列)成比例,行列式值为零.

事实上,提出公因子(比例系数)后,由性质 2 的推论知行列式 $D=0$.

性质 4

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则
$$D=D_1+D_2$$

证明:D 的一般项是:

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ =&(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

等号右端的第一项是 D_1 的一般项,第二项是 D_2 的一般项,$\therefore D=D_1+D_2$.

性质 5 将行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)的对应位置元素上,行列式值不变,

即

$$D^*=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{s1} & a_{i2}+a_{s2} & \cdots & a_{in}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D$$

证明:由性质 4,D^* 可以列成两个行列式,一个是 D;另一个是第 i 行与第 s 行成比例的行列式,由性质 3 推论 2 得其值为 0,$\therefore D^*=D$.

有以下三种变换:

(1) 交换 i,j 两行(列),记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;

(2) 第 i 行(列)乘以数 k,记为 $r_i\times k(c_i\times k)$;

(3) 第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上,记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

以数作为元素的行列式数值计算主要是利用性质 5,进行第(3)种保值变换,

将行列式化为上三角形行列式得到行列式的值.

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解:

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

数值计算需要灵活运用行列式性质.

例 3 计算 $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

解:

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{提公因子}} 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,r_3-r_1} 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7\times 3\times 3\times 3 = 189$$

1.3 行列式展开定理

定义 在 n 阶行列式 D 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的 $n-1$ 阶行列式，称为余子式，记为 M_{ij}.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{2+3}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

定理一 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}, \quad (D=a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}).$$
$$(i=1,2,\cdots,n) \qquad\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

证明:(1) 先证 D 的第一行元素除 $a_{11}\neq 0$ 外其余全为 0 的情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(1,j_2,\cdots,j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_2,\cdots,j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

其中 $(-1)^{\tau(j_2,\cdots,j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是 $(n-1)$ 阶余子式 M_{11} 的一般项.

(2) 再证 D 的第 i 行元素除 $a_{ij}\neq 0$ 外，其余元素均为 0 的情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1,\cdots,2,1$ 各行交换，再将第 j 列依次与第 $j-1,\cdots,2,1$ 列交换，有

$$D=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

(3) 对于一般情形，将第 i 行写为

$$a_{i1}+0+\cdots+0,0+a_{i2}+0+\cdots+0,\cdots,0+0+\cdots+0+a_{in}$$

于是有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

定理二 某一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积和为零

$$a_{i1}A_{s1}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0 \quad (i\neq s)$$

$$[a_{1j}A_{1t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0 \quad (j\neq t)].$$

证明：构造行列式 D^* 第 s 行元素与第 i 行元素对应相同，由 $s\neq i$，D^* 有两行元素对应相同，故 $D^*=0$。

再将 D^* 按第 s 行展开，第 s 行元素为 $a_{i1},\cdots,a_{in}$，于是由定理一

$$a_{i1}A_{s1}+\cdots+a_{in}A_{sn}=D^*=0$$

综合定理一和定理二得基本定理：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = \begin{cases} D & i=s \\ 0 & i\neq s \end{cases} \quad (i=1,\cdots,n)$$

$$[\sum_{t=1}^{n} a_{ij}A_{it} = \begin{cases} D & j=t \\ 0 & j\neq t \end{cases} \quad (j=1,\cdots,n)].$$

例 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,试求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 及 $A_{14}+A_{24}+3A_{34}+5A_{44}$.

解:由原行列式构造行列式第 4 行元素全为 1,按第 4 行展开,

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第 2 行相同}]{\text{第 4 行与}} 0$$

由 D 构造第 4 列元素为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 按第 4 列展开,

$$A_{14}+A_{24}+3A_{34}+5A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第 1 列相同}]{\text{第 4 列与}} 0.$$

*1.4 综合训练

例 1 求逆序数(1) $n,n-1,\cdots,2,1$;
(2) $1,3,5,\cdots,(2n-1);2,4,6,\cdots,2n$;
判断奇偶性.
解:(1)

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

令 $n=4k \quad \tau=\frac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$ 偶

$n=4k+1 \quad \tau=\frac{(4k+1)4k}{2}=2k(4k+1)$ 偶

$n=4k+2 \quad \tau=\dfrac{(4k+2)(4k+1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 奇

$n=4k+3 \quad \tau=\dfrac{(4k+3)(4k+2)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 奇

(2) $1,3,5,\cdots,(2n-1)$之间不构成逆序，

$2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，

前组每一个数与后组的某 n 个数形成逆序

$$\begin{aligned}\tau&=0+\tau(3,2)+\tau(5,2,4)+\cdots+\tau[(2n-1),2,\cdots,(2n-2)]\\&=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

$n=4k$ τ偶 $n=4k+2$ τ奇

$4k+1$ τ偶 $4k+3$ τ奇.

例 2 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 0 & 1 \\ 2 & x & 1 & 3 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$中，$x^3$ 的系数是________.

解:由行列式的定义，仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四元素相乘才能出现 x^3 项，这时该项排列的逆序数为 $\tau(2,1,3,4)=1$，$(-1)^{\tau(2,1,3,4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$，故 x^3 项的系数为-2.

例 3 $A_{3\times3}$，$|A|=-2$，按列分块 $A=[A_1,A_2,A_3]$，则$|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$________.

解:

$$|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=3|A_3,A_2,A_1|=-3|A_1,A_2,A_3|=-3|A|=6.$$

例 4 α,β,γ 是 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则行列式$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=$________.

解:由方程中 x^2 系数为 0，故 $\alpha+\beta+\gamma=0$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta+\alpha+\gamma & \gamma+\beta+\alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0.$$

例 5 设 $A=[\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$，$B=[\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$，$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 均为 4 维列向量，