

全国高职高专教育规划教材

# 经济数学

Mathematics for Economics

主编 孙萍  
主审 杨庆生



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

Mathematics for Economics

# 经济数学

Jingji Shuxue

主编 孙 萍

主审 杨庆生

参编 米日古丽 古丽努尔 雷佳宾 汪冶华 马 燕  
谢 竺 李 晓 娟 王雪萍 梁 慧 于莉亚



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合高职院校经管专业学生的特点编写而成。本书分三篇，分别为微积分及其应用、线性代数基础与线性经济模型、概率论基础与数理统计初步。各章加入数学软件 Mathematica 的应用，使学生在“做数学”中学用数学。本书内容讲解形象直观，定理证明简单明了，案例、例题与习题的选取与经管类专业相结合，特别注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，突出经济类数学教材的特色。

本教材可作为高职高专、成人教育和本科院校的二级学院的经济管理类专业的教学用书，也可作为经济管理类人员的自学用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

经济数学/孙萍主编. —北京:高等教育出版社,2011.8

ISBN 978-7-04-033131-8

I. ①经… II. ①孙… III. ①经济数学-高等职业教育-教材  
IV. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 142073 号

策划编辑 崔梅萍      责任编辑 崔梅萍      封面设计 赵 阳      版式设计 范晓红  
插图绘制 尹 莉      责任校对 俞声佳      责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
邮政编码	100120		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
印 刷	北京嘉实印刷有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
印 张	16	版 次	2011 年 8 月第 1 版
字 数	390 千字	印 次	2011 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	27.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 33131-00

# 前 言

本书根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合高职高专院校经管专业学生的特点编写而成。本教材编写的立足点放在“培养高级技术人才的应用能力”上，贯彻“以应用为目的，必需、够用为度”的指导思想，案例、例题与习题的选取尽可能与经管类专业相结合，突出经济类数学教材的特色。

本教材分三篇：第一篇 微积分及其应用，共四章，建议 70 学时；第二篇 线性代数基础与线性经济模型，建议 20 学时；第三篇 概率论基础与数理统计初步，建议 30 学时。教学中可根据学生情况安排 20 学时左右的数学实验。用 \* 号标出的内容根据专业需要选学，其他内容可以根据教学课时进行取舍，不必求全。

本教材编写经过拟纲定纲，分工编写，主编统稿，主审审阅，集体评稿几个环节，最后主编定稿。其特色为：

1. 结合高职高专经管类专业的特点，淡化理论，力图以实例引出数学问题，进而分析、解决所要求解的问题。对于数学的概念、理论、方法、应用等内容只作适当的介绍与阐述。

2. 在不失教材内容的科学性与系统性的前提下，不刻意追求数学的完整性，定理的推导证明尽可能简单明了，能用直观图形说明的，不做严密证明。

3. 注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求过分复杂的计算与变换。

4. 突出实际应用，密切联系经济专业特点，尽力采用经济专业知识去讲解应用实例。

5. 每章后单独编制了便于高职学生理解和接受的、与内容配套的数学实验，以数学软件 Mathematica 为手段将数学概念、原理和方法转化为数学运算、推理和应用的技术。利用数学软件既减少了大量繁琐的数学运算，又使学生在“做数学”中学用数学，较好地凸显了数学技术功能。

6. 文字叙述力求深入浅出，形象思维，注意培养学生的抽象思维、逻辑推理，观察综合、应用计算机以及分析问题和解决问题的能力。

本教材可作为高职高专、成人高校和本科院校的二级学院的经济管理类专业的教学用书，也可作为经济管理类人员的自学用书。

本教材由孙萍担任主编，负责统一编写思想。杨庆生任主审。编写分工为：第一章由雷佳宾、梁慧编写；第二章由古丽努尔编写；第三章由米日古丽、于莉亚（新疆职业大学）编写；第四章由汪冶华编写；第五章由孙萍、李晓娟编写；第六章由马燕、谢竺、孙萍编写；数学实验由米日古丽、王雪萍编写。

特别感谢乌鲁木齐职业大学的校领导和基础部领导对本书编写的大力支持。

本教材涉及面较广,加上编者水平有限,经验不足,难免有欠妥甚至错误之处,恳请读者批评指正。

编者  
2011年3月

# 目 录

## 第一篇 微积分及其应用

第一章 函数与极限 .....	3	实验二 用 Mathematica 数学软件求	
§ 1.1 函数 .....	3	导数与微分 .....	61
§ 1.2 常用经济函数 .....	9	第三章 积分及其经济应用 .....	62
§ 1.3 数列的极限与函数的极限 .....	13	§ 3.1 定积分的概念与性质 .....	62
§ 1.4 无穷小量与无穷大量 .....	16	§ 3.2 不定积分的概念与性质;微积	
§ 1.5 极限的运算法则、两个重要		分基本公式 .....	68
极限 .....	20	§ 3.3 积分的运算 .....	72
§ 1.6 函数的连续性 .....	26	§ 3.4 积分在几何中的应用 .....	82
第一章小结 .....	29	§ 3.5 积分在经济中的应用 .....	87
复习题一 .....	30	第三章小结 .....	91
实验一 用 Mathematica 数学软件作		复习题三 .....	94
函数图像、求极限 .....	32	实验三 用 Mathematica 数学软件	
第二章 导数及其经济应用 .....	35	计算积分 .....	96
§ 2.1 导数的概念 .....	35	第四章 微分方程及其应用 .....	98
§ 2.2 函数的求导法则 .....	39	§ 4.1 微分方程的基本概念、可分离	
§ 2.3 高阶导数 .....	42	变量的微分方程 .....	98
§ 2.4 函数的微分 .....	43	§ 4.2 一阶线性微分方程的解法 .....	102
§ 2.5 导数的应用 .....	46	§ 4.3 微分方程的应用 .....	105
§ 2.6 导数在经济学中的应用 .....	52	第四章小结 .....	108
§ 2.7 利用导数求极限 .....	56	复习题四 .....	108
第二章小结 .....	58	实验四 用 Mathematica 数学软件	
复习题二 .....	59	求解微分方程 .....	109

## 第二篇 线性代数基础与线性经济模型

第五章 线性代数基础与线性经济		§ 5.5 投入产出数学模型 .....	142
模型 .....	113	第五章小结 .....	151
§ 5.1 行列式 .....	113	复习题五 .....	153
§ 5.2 矩阵的概念与运算 .....	120	实验五 Mathematica 计算矩阵和解	
§ 5.3 矩阵的初等变换 .....	130	线性方程组 .....	155
§ 5.4 线性方程组 .....	134		

## 第三篇 概率论基础与数理统计初步

第六章 概率论基础与数理统计初步	161	第六章小结	213
§ 6.1 随机事件与概率	161	复习题六	219
§ 6.2 随机变量及其分布	174	实验六 Mathematica 在概率统计中的	
§ 6.3 随机变量的数字特征	187	应用	223
§ 6.4 数理统计基础	194		
参考答案			226
附表			241
附表 1 泊松分布表			241
附表 2 标准正态分布函数数值表			243
附表 3 $\chi^2$ 分布临界值表			245
附表 4 $t$ 分布临界值表			247
参考文献			248

# 第一篇 微积分及其应用





# 第一章 函数与极限

函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映,也是经济数学的主要研究对象.在这一章中,我们将在中学已有的知识基础上,进一步阐明函数的一般定义,总结在中学已学过的一些函数,并介绍一些经济学中的常用函数模型.

## [学习目标]

1. 理解函数的概念,理解极限与连续的概念.
2. 了解闭区间上连续函数的性质.
3. 掌握基本初等函数的图形和性质,掌握常用的经济函数.
4. 掌握求极限的方法,掌握判断函数连续性的方法.
5. 会利用 Mathematica 作函数的图像,求极限.

## § 1.1 函 数

### 1.1.1 函数的概念

**案例 1 [面积与半径的关系]** 圆的面积公式为  $S = \pi r^2$ , 公式中  $r$  是圆的半径,  $\pi$  是固定的常数,  $S$  随着  $r$  的变化而变化的, 即是说  $r$  和  $S$  都是变量, 当  $r$  取定某一数值时, 则  $S$  也随之有一个确定的数值与之对应.

**案例 2 [成本与产量的关系]** 设某水泥厂每日最多能生产水泥 100 t, 固定成本为 3000 元, 每生产 1 t 水泥成本增加 120 元, 则水泥厂每日的总成本  $C$  与产量  $q$  的关系为:  $C = 3000 + 120q$ , 当产量  $q$  在生产能力允许的范围  $[0, 100]$  内取定某一数值时, 总成本也随之有一个确定的数值与之对应.

综上所述, 就涉及函数包含的具体意义而言, 有几何上的、有经济的, 抛开各自的具体含义, 可抽象出函数的一般性的定义.

**定义 1.1.1** 设有两个变量  $x$  和  $y$ , 当变量  $x$  在非空数集  $D$  内取某一数值时, 变量  $y$  按照某种对应法则  $f$ , 有唯一确定的数值与之对应, 则称变量  $y$  为变量  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x),$$

其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为函数或因变量, 变量  $x$  的取值范围叫做函数的定义域, 变量  $y$  的变化范围叫做这个函数的值域.

若对于确定的  $x_0 \in D$ , 按照对应法则  $f$ , 函数  $f(x)$  有唯一的值  $y_0$  相对应, 则称  $y_0$  为  $y = f(x)$  在

$x_0$  处的函数值, 记作  $y_0 = y \Big|_{x=x_0}$  或  $f(x_0)$ .

对于用函数解析式表达的函数定义域, 就是使式子有意义的一切实数组成的集合, 一般从以下几个方面考虑:

- (1) 分式中分母不能为 0;
- (2) 偶次根号下被开方式必须大于等于 0;
- (3) 对数中真数大于 0, 底必须大于 0 而不等于 1;
- (4) 正切函数符号下的式子不等于  $k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ; 余切函数符号下的式子不等于  $k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ;

(5) 反正弦、反余弦函数符号下的式子的绝对值必须小于等于 1.

在高等数学中, 函数的定义域通常用区间表示, 如一切实数用  $(-\infty, +\infty)$  表示. 如果函数的表达式同时有以上几种情况, 则它的定义域是各项定义域的交集.

**例 1** 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{9-x^2}; \quad (2) y = \frac{\ln(2-x)}{x+1}.$$

**解:** (1) 因为  $9-x^2 \geq 0$ , 解得  $-3 \leq x \leq 3$ ; 即定义域为  $[-3, 3]$ ;

(2) 因为  $\begin{cases} 2-x > 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$  解得  $x < 2$  且  $x \neq -1$ ; 即定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$ .

### 1.1.2 函数的常用表示方法

(1) **解析法:** 用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法. 例如: 直角坐标系中, 半径为  $r$ 、圆心在原点的圆的方程是  $x^2 + y^2 = r^2$ .

(2) **表格法:** 将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法. 例: 在实际应用中, 我们会经常用到的平方表, 三角函数表等都是用表格法表示的函数.

(3) **图像法:** 用坐标平面上曲线来表示函数的方法. 一般用横坐标表示自变量, 纵坐标表示因变量. 例: 直角坐标系中, 半径为  $r$ 、圆心在原点的圆用图像法表示为图 1.1.1.

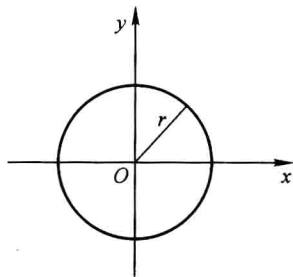


图 1.1.1

### 1.1.3 分段函数

**案例 3 [个人所得税]** 按照最新个人所得税法, 自 2011 年 9 月 1 日起, 工资、薪金个人所得税减除费用标准由每月 2000 元提高到每月 3500 元. 工薪收入缴纳个人所得税, 要先去除纳税人缴纳的“三险一金”费用(按国家有关政策, 该费用免征个人所得税), 然后再按新的减除费用标准扣除 3500 元, 为应纳税所得额, 按 3% 至 45% 的七级超额累计计算个人所得税, 低于起征点的, 不需缴纳个人所得税. 这样算下来, 月工资收入 4545 元以下的人都不用缴纳个税. “三险一金”, 是指基本养老保险费、基本医疗保险费、失业保险费和住房公积金.

具体应纳税所得额与适用税率的关系如表 1.1.1:

表 1.1.1

级数	含税级距	税率(%)
1	不超过 1500 元的	3
2	超过 1500 元至 4500 元的部分	10
3	超过 4500 元至 9000 元的部分	20
4	超过 9000 元至 35000 元的部分	25
5	超过 35000 元至 55000 元的部分	30
6	超过 55000 元至 80000 元的部分	35
7	超过 80000 元的部分	45

试表示应缴税款  $y$  与月收入额  $x$  之间的关系. (月收入额  $x =$  工薪收入 - “三险一金”)

分析: 由于每段税率不同, 应缴税款的计算公式也不一样.

当  $0 \leq x \leq 3500$  时, 应缴税款为  $y = 0$ ;

当  $3500 < x \leq 5000$  时, 应缴税款为  $y = (x - 3500) \times 3\%$ ;

当  $5000 < x \leq 8000$  时, 应缴税款为  $y = (x - 5000) \times 10\% + 1500 \times 3\%$ .

以此类推即得

$$y = \begin{cases} 0, & x \in [0, 3500], \\ (x - 3500) \times 3\%, & x \in (3500, 5000], \\ (x - 5000) \times 10\% + 45, & x \in (5000, 8000], \\ (x - 8000) \times 20\% + 345, & x \in (8000, 12500], \\ (x - 12500) \times 25\% + 1245, & x \in (12500, 38500], \\ (x - 38500) \times 30\% + 7745, & x \in (38500, 58500], \\ (x - 58500) \times 35\% + 13745, & x \in (58500, 83500], \\ (x - 83500) \times 45\% + 22495, & x \in (83500, +\infty]. \end{cases}$$

**定义 1.1.2** 两个变量之间的函数关系用两个或者多于两个的数学式子来表达, 称为**分段函数**. 分段函数的定义域为各段自变量取值范围的并集.

### 例 2 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

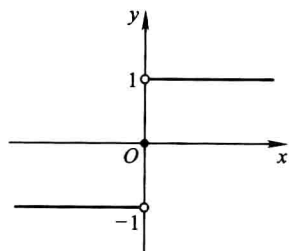


图 1.1.2

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域为  $\{-1, 0, 1\}$ , 图形如图 1.1.2 所示.

## 1.1.4 函数的简单性质

### 一、函数的有界性

**定义 1.1.3** 如果对属于某一定义区间  $I$  内所有  $x$  总有  $|f(x)| \leq M$  成立, 其中  $M$  是一个与  $x$

无关的正常数,那么我们就称 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有界,否则便称无界.

注:一个函数,如果在其整个定义域内有界,则称为有界函数.

例3 函数 $f(x) = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的.

## 二、函数的单调性

定义 1.1.4 如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义,如果对于区间 $I$ 内任意两点 $x_1$ 和 $x_2$ ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调增函数**;如果对于区间 $I$ 内任意两点 $x_1$ 和 $x_2$ ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调减函数**.

例4 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减函数,在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数.

## 三、函数的奇偶性

定义 1.1.5 如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,对于定义域内的任意 $x$ 都满足 $f(-x) = f(x)$ ,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 $x$ 都满足 $f(-x) = -f(x)$ ,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

注:偶函数的图形关于 $y$ 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

## 四、函数的周期性

定义 1.1.6 对于函数 $f(x)$ ,若存在常数 $T > 0$ ,对于定义域 $D$ 内任何 $x$ 有 $x \pm T \in D$ ,使得关系式 $f(x \pm T) = f(x)$ 都成立,则 $f(x)$ 叫做**周期函数**, $T$ 称为 $f(x)$ 的**周期**.

注:我们说的周期函数的周期通常是指**最小正周期**.但并非每个函数都有最小正周期.

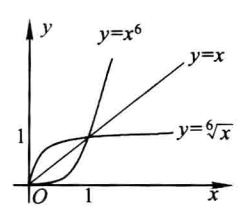
例5 函数 $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数;函数 $f(x) = \tan x$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

## 1.1.5 初等函数

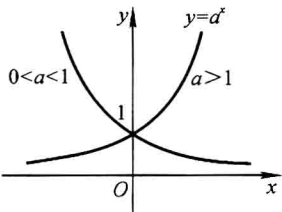
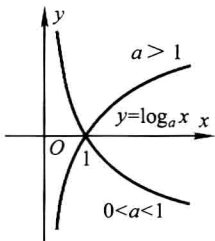
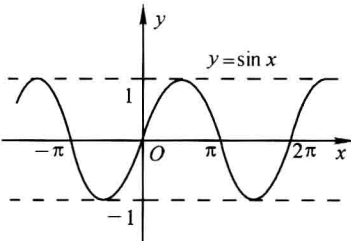
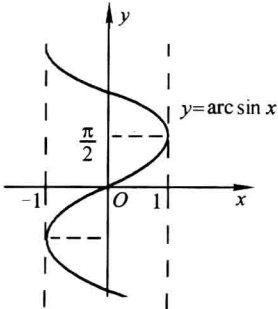
### 一、基本初等函数

**基本初等函数**通常是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.由于在中学数学中,我们已经深入学习过这些函数,下面我们用表格来把它们简要总结一下:

表 1.1.2

函数	图像	性质
幂函数 $y = x^\alpha$ ( $\alpha$ 为任意实数)	 <p>这里只画出<math>\alpha &gt; 0</math>的情况</p>	a) 当 $\alpha > 0$ 时图像过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 点,在 $[0, +\infty)$ 内为单调增函数; b) 当 $\alpha < 0$ 时图像过 $(1, 1)$ 点,在 $(0, +\infty)$ 内为单调减函数.

续表

函 数	图 像	性 质
指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$		a) 图像均在 $x$ 轴上方, 不论 $x$ 为何值, $y$ 总为正数; b) 均过 $(0, 1)$ 点, 当 $a > 1$ 时为单调增函数; 当 $0 < a < 1$ 时为单调减函数.
对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$		a) 图像总位于 $y$ 轴右侧, 并过 $(1, 0)$ 点 b) 当 $a > 1$ 时为单调增函数; 当 $0 < a < 1$ 时为单调减函数.
三角函数 $y = \sin x$ (正弦函数) $y = \cos x$ (余弦函数) $y = \tan x$ (正切函数) $y = \cot x$ (余切函数)	 <p>这里只画出了正弦函数</p>	a) 正弦函数是奇函数、有界、周期为 $2\pi$ ; b) 正弦函数在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调增, 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调减.
反三角函数 $y = \arcsin x$ (反正弦函数) $y = \arccos x$ (反余弦函数) $y = \arctan x$ (反正切函数) $y = \text{arccot } x$ (反余切函数)	 <p>这里只画出了反正弦函数</p>	由于 $y = \arcsin x$ 为多值函数, 因此我们将函数值限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, 并称其为反正弦函数的主值. $y = \arcsin x$ 在 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 范围内为单调增函数, 奇函数

## 二、复合函数

**定义 1.1.7** 设  $y=f(u)$  是  $u$  的函数,  $u=\varphi(x)$  是  $x$  的函数. 如果  $u=\varphi(x)$  的值域或其部分是

$y=f(u)$  的定义域的子集, 则  $y$  通过  $u$  构成  $x$  的函数, 称为  $x$  的复合函数, 记为  $y=f[\varphi(x)]$ , 其中  $u$  称为中间变量.

注: (1) 并不是任意两个函数都可以构成一个复合函数. 例如  $y=\arcsin u, u=2+x^2$ ; 因前者的定义域为  $[-1, 1]$ , 而后者  $u=2+x^2 \geq 2$ , 故这两个函数不能复合成复合函数.

(2) 复合函数还可以由两个以上的函数复合构成.

例 6 设  $y=f(x)=\sin x, \varphi(x)=x^2+1$ , 求  $f[\varphi(x)]$  和  $\varphi[f(x)]$ .

解: 
$$f[\varphi(x)] = \sin[\varphi(x)] = \sin(x^2+1),$$

$$\varphi[f(x)] = [f(x)]^2+1 = \sin^2 x+1.$$

例 7 指出下列复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1)  $y=\sin(\ln x)$ ; (2)  $y=\sqrt{\ln \sin^2 x}$ .

解: (1) 所给函数是由  $y=\sin u, u=\ln x$  两个函数复合而成.

(2) 所给函数是由  $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=w^2, w=\sin x$  四个函数复合而成.

### 三、初等函数

定义 1.1.8 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可由一个式子表示的函数, 称为初等函数.

初等函数的基本特征: 在函数有定义的区间内, 初等函数的图形是不间断的. 例如分段函数不是由一个解析式表达的, 它的图形是间断的, 所以分段函数不是初等函数.

## 习 题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ ;

(2)  $y = -\frac{5}{x^2+4}$ ;

(3)  $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ ;

(4)  $y = 1 - e^{1-x^2}$ ;

(5)  $y = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$ ;

(6)  $y = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ x+1, & x < 0. \end{cases}$

2. 下列各题中, 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  是否相同? 为什么?

(1)  $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$ ;

(2)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, g(x) = x-1$ ;

(3)  $f(x) = x, g(x) = \sin(\arcsin x)$ ;

(4)  $f(x) = x, g(x) = e^{\ln x}$ .

3. 判断下列函数中哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?

(1)  $f(x) = \tan x$ ;

(2)  $f(x) = \sin x - \cos x$ ;

(3)  $f(x) = x \sin x$ ;

(4)  $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ ;

(5)  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ;

(6)  $f(x) = a^x + a^{-x}$ ;

(7)  $f(a) = \frac{a^2+1}{a^2-1}$ ;

(8)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

4. 设  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ , 求  $f[f(x)]$  和  $f\{f[f(x)]\}$ .

5. 指出下列复合函数的分解过程:

$$(1) y = \sqrt{x^2 + 2};$$

$$(2) y = \cos x^4;$$

$$(3) y = \sin^2(x-1);$$

$$(4) y = e^{\arctan x^2}.$$

6.  $f(x) = \sin x$ ,  $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$ , 求  $\varphi(x)$  及其定义域.

## § 1.2 常用经济函数

用数学方法解决实际问题,首先要构建该问题的数学模型,即找出该问题的函数关系.下面我们介绍一些常见的经济函数模型.

### 1.2.1 单利与复利

利息是指借款者向贷款者支付的报酬,它是根据本金的数额按一定比例计算出来的.

#### 一、单利计算公式

设初始本金为  $p$  (元), 银行年利率为  $r$ , 则

$$\text{第一年末的本利和为 } s_1 = p + rp = p(1+r),$$

$$\text{第二年末的本利和为 } s_2 = p(1+r) + rp = p(1+2r),$$

.....

.....

$$\text{第 } n \text{ 年末的本利和为 } s_n = p(1+nr).$$

#### 二、复利计算公式

设初始本金为  $p$  (元), 银行年利率为  $r$ , 则

$$\text{第一年末的本利和为 } s_1 = p + rp = p(1+r),$$

$$\text{第二年末的本利和为 } s_2 = p(1+r) + rp(1+r) = p(1+r)^2,$$

.....

.....

$$\text{第 } n \text{ 年末的本利和为 } s_n = p(1+r)^n.$$

**例 1** 现有初始本金 100 元, 若银行年储蓄利率为 7%, 问:

(1) 按单利计算, 3 年末的本利和为多少?

(2) 按复利计算, 3 年末的本利和为多少?

(3) 按复利计算, 需多少年能使本利和超过初始本金的一倍?

**解:** (1) 已知  $p = 100$ ,  $r = 0.07$ , 由单利计算公式得

$$s_3 = p(1+3r) = 100 \times (1+3 \times 0.07) = 121 \text{ 元},$$

即 3 年末的本利和为 121 元.

(2) 由复利计算公式得

$$s_3 = p(1+r)^3 = 100 \times (1+0.07)^3 \approx 122.5 \text{ 元},$$

即 3 年末的本利和约为 122.5 元.

(3) 若  $n$  年后的本利和超过初始本金一倍, 即要

$$s_n = p(1+r)^n > 2p,$$

即

$$1.07^n > 2,$$

两边取对数

$$n \ln 1.07 > \ln 2,$$



从而 
$$n > \frac{\ln 2}{\ln 1.07} \approx 10.2,$$

即需 11 年后本利和可超过初始本金的一倍.

### 1.2.2 多次付息

#### 一、单利付息情形

因每次的利息都不计入本金,故若一年分  $n$  次付息,则年末的本利和为

$$s = p \left( 1 + n \frac{r}{n} \right) = p(1+r),$$

即年末的本利和与支付利息的次数无关.

#### 二、复利付息情形

因每次支付的利息都记入本金,故年末的本利和与支付利息的次数是有关系的.

设初始本金为  $p$  (元), 年利率为  $r$ , 若一年分  $m$  次付息, 则一年末的本利和为

$$s = p \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m,$$

易见本利和是随付息次数  $m$  的增大而增加的.

而第  $n$  年末的本利和为

$$s_n = p \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^{mn}.$$

### 1.2.3 需求函数

**需求函数**是指在某一特定时期内,市场上某种商品的各种可能的购买量和决定这些购买量的诸因素之间的数量关系.

假定其他因素(如消费者的货币收入、偏好和相关商品的价格等)不变,则决定某种商品需求量的因素就是这种商品的价格.此时,需求函数表示的就是商品需求量和价格这两个经济量之间的数量关系,记作:

$$Q = f(p),$$

其中,  $Q$  表示需求量,  $p$  表示价格. 需求函数的反函数  $p = f^{-1}(Q)$  称为**价格函数**, 习惯上将价格函数也统称为需求函数.

一般地,商品的需求量随价格的下降而增加,随价格的上涨而减少.因此,需求函数是单调减函数,常见的线性需求函数为

$$Q = a - bp \quad (a > 0, b > 0).$$

### 1.2.4 供给函数

**供给函数**是指在某一特定时期内,市场上某种商品的各种可能的供给量和决定这些供给量的诸因素之间的数量关系.某种假定其他因素不变的条件下,供给量  $S$  也可以看成价格  $p$  的函数,记作

$$S = S(p).$$

一般地,商品的市场供给量  $S$  也受商品价格  $p$  的制约,价格上涨将刺激生产者向市场提供更