算學叢書

初等代數倚數變跡

何魯著

算學叢書

第十種

初等代數倚數變跡

何魯著

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日
敝公司突遭國難總務處印刷
所編譯所書棧房均被炸燬附
設之涵芬樓東方圖書館尚公
小學亦遭殃及盡付焚如三十
五載之經營隳於一旦迭蒙
各界慰問督望速圖恢復詞意
懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
困不敢不勉爲其難因將需用
較切各書先行覆印其他各書
亦將次第出版惟是圖版裝製
不能盡如原式事勢所限想荷
鑒原謹布下忱統祈
垂督

上海商務印書館謹啓

中華民國二十年一月初版
民國廿二年二月印行 國難後第一版

算學叢書 初等代數倚數變跡一冊 (三五二三)

每冊定價大洋壹元捌角
外埠酌加運費匯費

9·00

著作者 何魯

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

二七三四上

初等代數倚數變跡

序

審究初等倚數變值及變跡．爲小代數學所應有．惟近行之本．於此闕然．其不利學者．厥有二端．

一．爲將治高等數學者(如解析幾何等)之阻．何也．以解析幾何論．凡製一曲線．卽當先求倚數(卽曲線方程式)變値．次用經緯制集主要點以成圖．苟學者素不知何謂倚數變値．安望其能領解乎．難之者曰．教者啟焉．書籍實焉．胡爲不能．夫教者良否不可必．而取材異國者．必得譯而達．其困難人咸知之．或有用西語聽講者．亦多勉求字句之解．而罕於問難．若夫書則程級各異．高等之書．不復論中等．中等之書．不以高等之理參之．故應於中等得之而未得者．每不能卽得於高等．必旣融會其難．乃豁然悟其易．如此則事倍而功半矣．雖然著者之意．非謂不治倚數變値．卽終不能明解析幾何也．彊識之士．益以深思．其進烏能限量哉．然學之義溥．溥．謂人人可以企及也．不然必爲學之道．未盡善也．世有能補其闕以助習數者之精進乎．著者何敢讓焉．何敢讓焉．

一．爲將治物理者之阻．何也．物理學之律．無不根於觀察．成於實驗．初學之人．觀察力薄弱．常賴實驗．以成其基．而實驗之方．繫於圖解者爲多．試以氣體言．其容積 v 與其

彈力 p 皆視熱度 t 而變．故三者之中必有關係存焉．卽必有一倚數如

$$f(v, p, t)=0$$

是也．如暫令 v 爲常數．$(v=v_0)$．則在倚數

$$f(v_0, p, t)=0$$

中令 t 爲自變數．於其變時．可以得 p 之相當變值．或暫令 p 爲常數．$(p=p_0)$．則在倚數

$$f(v, p_0, t)=0$$

中．當 t 變時．可以得 v 之相當變值矣．故審究氣體之律．卽不外審究倚數 f．而得此倚數．卽得其律矣．

中華民國五年

西曆一千九百十有六年　　　　著者識

讀　例

一．是書爲著者中等數學類成書之一．專論初等代數倚數．而歸重於製倚數所代表之曲線．故名．

一．倚數變跡．實生於經緯之用．欲明其用．必先解線節及射影之義．此本書首章之恉也．

一．如一變數 x 之限爲一定數 a．一變數 y 之限爲零．則 $\frac{x}{y}$ 之限爲無極．著者視此爲已喻不復證明者．以本書未嘗論限故也．簡捷言之．卽著者視 $\frac{a}{0}=\infty$ 爲定義．(宜參閱著者微分學理解論限)

一．倚數之極大極小者．皆對於其極接近鄰值而言也．故定義必稱間隔．

一．倚數 $y=f(x)$．當 $x=a$ 時爲斷倚數之義有二．其一．卽當 x 愈趨進於 a．$f(x)$ 之絕對值愈增大以至無極．其一．$f(a+\varepsilon)$ 與 $f(a-\varepsilon)$ 當 ε 趨進於零時各有其限．此爲代數倚數所無者．故著者未及斯義．

一．幾近線．在理論．可判別曲線性質．在實際．可精定曲線形樣．爲用宏妙．故宜漸參入中等之書．俾學者常與之習．

一．橢圓拋物線雙曲線統稱圓錐形截面．是書除拋物線外．於他錐形截面．皆未明其界說．取其形似而已．在解析幾何．凡二次曲線．通曰錐形截面．有二幾近線者．曰雙曲線．祇有一者．曰拋物線．無幾近線者．曰橢圓．在純粹幾何．點距兩定點距離之和爲常數者之軌跡．曰橢圓．如此距離之較爲常數．則其跡爲雙曲線．然此二義實不殊也．

一. 求幾近線別法(§87)爲求曲線 $y=f(x)$ 幾近線普通之法. 此法仍適用於下種曲線.

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

中 t 爲自變數.

一. 切線之用. 所以精定曲線形樣. 法以知其方位爲足. (即其角係數)不用引數(微係數)而可以初等之法求者. 祇曲線經過原點分枝而已. 本書所及者亦僅此.

一. 極大極小淺論. 爲習中等數學者所應知. 著者於此章論之極詳. 其舉例皆足助人深省.

一. 是書習題悉付卷末題理均極變換. (可參看嚴君濟慈所演本書習題詳解)

一. 校讎是書者. 爲張鄭二君. 不佞等深謝之.

補　誌

此書民國八年復經嚴君濟慈校對頗有匡正嚴君讀此稿後幷撰有本書習題詳解深便學者特識於此以謝其勤勞

民國九年三月　　何魯

釋名

一．代數倚數(他書作函數)者．外超然倚數(他書作越函數)而言者也．曰初等者．倚數之爲一次及二次代數式者也．當自變數在某間隔內變易時．而究倚數之變易．則有倚數變值．係於經緯．則有變跡．故言倚數變跡．卽此倚數所代表之曲線．欲得其變跡．必先有變值．故變跡實概變值而言者也．

一．連四點或四點以上之不在一平面者．所成多邊形曰多邊左形．推廣言之．凡一圖之不能容於一平面者．皆曰左形．

一．箭形上向如↗．表增變之意．箭形下向者表減變．由小而大曰增變．反之曰減變．

一．變數無窮接近之定數曰此變數之限．以符號 $lim.$ 表之．譬 $lim.\ y=b.$ 卽謂 y 之限等於 b 也．以圖言．凡曰極限位置．爲位置之可達而不可逾者也．

一．符號 $\sim$ 表趨進之意．譬言變數 x 趨進於 a．可誌爲 $x\sim a$．

一．幾近線他書作漸近線．

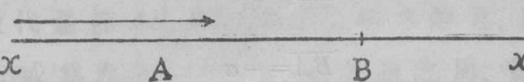
目錄

初等代數倚數變跡

第一章

§1. 線節

定義　線節者任一段直線之有定向者也．其定向之法．則命界此段之兩點一爲端．一爲末．由端至末之向．卽線節之向也．凡名一線節必先端後末．譬言 AB 節．或 $\overline{AB}$．卽線節之以 A 爲端 B 爲末者．



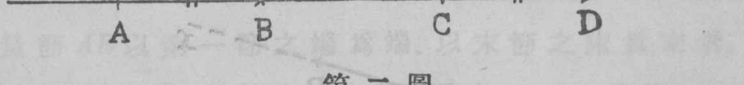
第一圖

1. 由端至末之距離．謂之線節之長．

2. 線節爲零．卽其長爲零．或曰線節之端末合者爲零．

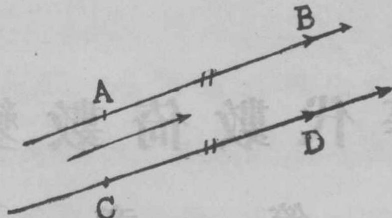
3. 線節所附麗之直線謂之軸．曰軸．其向定也．

4. 一軸上之二線節相等．必二節之長短同．向同．如 AB, CD．謂之等線節．



第二圖

5. 二線節之長同．向同．而附麗於二軸平行者．謂之齊線節．如第三圖．



第三圖

6. 同在一軸之二線節。長同。而向異者。謂之反線節。譬如AB與BA之爲反線節是也。

依定義

(1)…………………………… $\overline{AB}=-\overline{BA}$

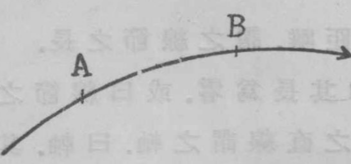
如a爲一數。量$A\ B$之長。(單位任意)

$$\overline{AB}=a$$

則

$$\overline{BA}=-a$$

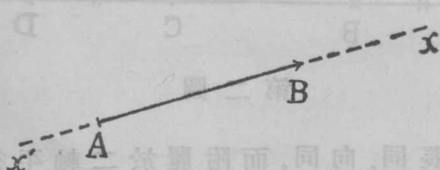
更推廣之。在一曲線上任取一段AB。俾A爲端。則$\widehat{AB}$謂之弧節。



第四圖

§2. 代量節

<u>定義</u>　定代量節之要素四。



第五圖

1. 其原點A.

2. 其方位.以其軸$x'x$定之.

3. 其向.卽線節AB之向也.

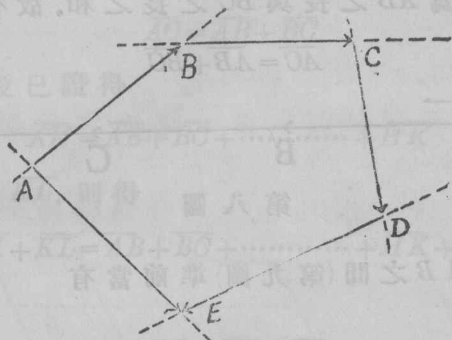
4. 其大小.卽線節AB之長也.

反之.如原點定.方位辨.向別.大小明者.則一代量節定.

機械學物理學上之量.如力之類.所要不僅在明其大小而已.尤必確知其致力之點.及其生動之方位與向.故一數不能以定之.則表之以代量節.其致力之點.原點也.其生動之方位與向.卽軸之方位.及線節AB之向也.其力之大小.卽線節之長也.代量節之名所以生.實本於此.

§3. 霞爾氏定理(Chasles)

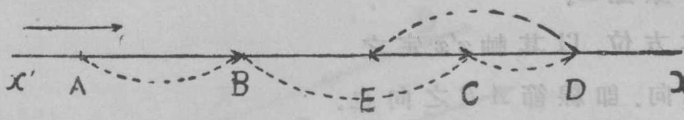
小引: 以數代量節AB, BC, CD, DE,按序連之.則成一多邊形.(或在平面.或爲左形)$ABCDE$.或省謂之周.(第六圖)



第六圖

代量節AE以第一節之端爲端.以末節之末爲末者.謂之$ABCDE$周之總節.其他如AB, BC,謂之…………分節.

如各分節同在一軸上.則周變爲一直線.其總節仍在此軸上.如七圖.AE爲AB,…………DE各節之總節是也.



第七圖

定理

周之在一軸上者．其總節等於其各分節之和．

以第七圖論．卽謂當有

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$$

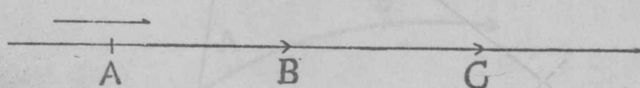
欲證明之．先於一軸上取相連之兩代量節 AB, BC, 則 AC 爲此二節之總節．

余謂無論 C 之位置何如．(對 AB 言)恆有下式

(2)……………………………$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$

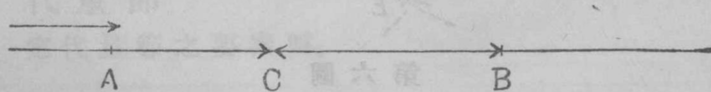
其一．如 C 在 AB 之右(第八圖)．則 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, 三節均同向．而 AC 之長．適爲 AB 之長與 BC 之長之和．故有

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$



第八圖

其二如 C 在 AB 之間(第九圖)準前當有



第九圖

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$$

依(1)式

$$\overline{CB}=-\overline{BC}$$

故

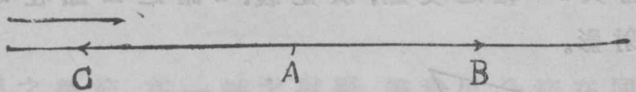
$$\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}$$

即

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

也.

其三. C 在 AB 之左(第十圖).



第十圖

準其一

$$\overline{CB}=\overline{CA}+\overline{AB}$$

依(1)式

$$-\overline{BC}=-\overline{AC}+\overline{AB}$$

易項卽得(2)式

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

更推廣之. 設已證得

$$\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\overline{HK}$$

兩端同加以 $\overline{KL}$. 則得

$$\overline{AK}+\overline{KL}=\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}$$

但

$$\overline{AK}+\overline{KL}=\overline{AL}$$

故有

$$(3)\cdots\cdots\cdots\cdots\overline{AL}=\overline{AB}+BC+CD+\cdots\cdots\cdots\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}$$

(3) 式謂之霞爾氏 Chasles 公式

依(1)式

$$\overline{AL}=-\overline{LA}$$