LINEAR ALGEBRA

河海大学数学教研室编

线性代数

河海大学出版社

线性代数

河海大学数学教研室　编

河海大学出版社

责任编辑　龚　俊

线性代数

河海大学数学教研室　编

出版发行：河 海 大 学 出 版 社

（地址：南京西康路 1 号　邮政编码：210098）

印　　刷：　江苏省科技情报所 印刷厂

（地址：南京锁金村 77 号　邮政编码：210042）

开本 787×1092 毫米　1/16　印张 6　字数 146.1 千字

1996 年 2 月第 1 版　1996 年 2 月第 1 次印刷

印数 1－8,000 册

ISBN 7—5630—0822—5

G·119　　　　定价：7.20 元

前言

本书原是根据国家教委1987年审定的《高等工业院校〈线性代数〉课程基本要求》，为高等工业院校32学时的《线性代数》课程编写的讲义。内容上比较强调对学生的基本概念和基本计算能力的培养，希望学生通过本课程的学习能比较熟练地掌握线性代数的一些基本概念和计算方法，如初等变换、向量概念的应用等等。讲义在河海大学本科学生中用过数次，中间曾修改过两次，这次又经过较仔细的修订后出版。

本书由下列同志执笔：邹清莲（第一、二章），吴道明（第三、四章），朱晓胜、袁永生（第五、六章）；习题：王淑云（第一、二、四章），吴道明（第三章），袁永生（第五、六章）。全书由邹清莲老师统稿。在修订及出版过程中，张乃良教授做了大量组织工作，数学教研室各位任课老师提出了许多宝贵的意见，河海大学出版社领导，特别是龚俊先生给予了大力支持和帮助，在此一并致谢。书中若有不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

1996年1月

目　　录

第一章　行列式

§1　二阶和三阶行列式

在中学代数里，我们学过如何用消元法解二元、三元甚至四元一次方程组；这里，我们将讨论一般的 n 元一次方程组，即一般的线性方程组.

例 1　设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法去求解：

$$\begin{array}{rl} (1)\times a_{22}, & a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ -\ (2)\times a_{12}, & a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2 \\ \hline & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

若　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{array}{rl} (1)\times a_{21}, & a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = a_{21}b_1 \\ -\ (2)\times a_{11}, & a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2 \\ \hline & -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \end{array}$$

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

由此得出一个运算符号，四个数按下列规则运算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，　$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，　$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则上述二元一次方程组的解可以写成

$$x = \frac{D_1}{D},\quad y = \frac{D_2}{D},\quad (D \neq 0) \tag{3}$$

由此，我们得出二阶行列式的定义.

定义 1　四个数排成一个方块

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

按下列规则进行运算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为一个二阶行列式．$a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，它的第一个足码表示元素所在的行，第二个足码表示元素所在的列．

由此可见，如果一个二元一次方程组，它的系数所构成的行列式 $D\neq 0$，则它的解立即可以由(3)得出．其中 D 表示方程组的系数构成的二阶行列式，D_j 是把 D 的第 j 列用常数组成的列代替所得到的二阶行列式．

同理，解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{4}$$

时，为消去 x_2 与 x_3，得到一个只含 x_1 的方程，我们分别以

$$a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23},\quad -(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}),\quad (a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}),$$

去乘这些方程式，然后相加，可得

$$\begin{aligned}&[a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})]x_1\\ &=b_1(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-b_1(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+b_3(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\end{aligned}$$

记

$$(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})=M_{11}$$
$$(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})=M_{21}$$
$$(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})=M_{31}$$

于是有

$$(a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31})x_1=b_1M_{11}-b_2M_{21}+b_3M_{31} \tag{5}$$

定义 2　9 个数排成一个方块，按下列规则进行运算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}$$

称为一个三阶行列式，其中 M_{ij} 是在 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的行和列，剩下的元素按原来的顺序排列所得到的二阶行列式．我们称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，如果附以符号 $(-1)^{i+j}$，得

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式．

D 也可以定义为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

把(5)式展开，可得 x_1 的系数为

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

用同样的方法，可以算出在只含 x_2 或 x_3 的方程中，x_2 或 x_3 的系数均为 D．(5)式等号右侧的常数 $b_1M_{11}-b_2M_{21}+b_3M_{31}$ 是一个用 b_1,b_2,b_3 去代替 D 中第一列元素所得到的三阶行列式：

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理可得只含 x_2 或 x_3 的方程中的常数项为

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

如果 $D \neq 0$,则三元一次方程组(4) 的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

例 2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -ab & ac & al \\ bd & ca & dl \\ bf & cf & -lf \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -ab & ac & al \\ bd & ca & dl \\ bf & cf & -lf \end{vmatrix} = -ab\begin{vmatrix} ca & dl \\ cf & -lf \end{vmatrix} - bd\begin{vmatrix} ac & al \\ cf & -lf \end{vmatrix} + bf\begin{vmatrix} ac & al \\ ca & dl \end{vmatrix} = 4abcdlf$$

例 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

例 4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

D 称为上三角行列式.

由上面例题可见,如果行列式中出现一些零,或行列式具有某些特殊形状,计算起来较为简便.我们可以利用行列式的一些性质,把行列式化为便于计算的形式.

二阶和三阶行列式具有以下性质.

性质 1 行列互换,行列式不变.

设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{32}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{31}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{31}\\a_{22}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

二者相等. D' 称为 D 的转置行列式.

由性质 1 可知,在行列式中,行列的位置是对称的. 因此,凡是对行成立的性质,对列也成立. 三阶行列式的定义也可以写成

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

性质 2 行列式可按任一行(列) 展开.

按第二列展开得

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{32}a_{11}a_{23}+a_{32}a_{21}a_{13}$$

按第三列展开,得

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}+a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}+a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{11}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}+a_{33}a_{11}a_{22}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

性质 3 行列式中任何一行(列) 元素的公因子可以提到行列式号外面来.

例如 $\begin{vmatrix}a_{11}&ka_{12}&a_{13}\\a_{21}&ka_{22}&a_{23}\\a_{31}&ka_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 中按第二列展开,即得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&ka_{12}&a_{13}\\a_{21}&ka_{22}&a_{23}\\a_{31}&ka_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=ka_{12}A_{12}+ka_{22}A_{22}+ka_{32}A_{32}$$

$$=k(a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 4 行列式中如果一行(列)是两组数的和，则这个行列式就等于两个行列式之和，而这两个行列式除这一行(列)外，与原来的行列式对应的行(列)一样.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1+c_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2+c_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3+c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 5 如果行列式中有两行(列)相同，则此行列式为零.

设在 D 中，有两行如第一行与第三行相同，即 $a_{11}=a_{31}, a_{12}=a_{32}, a_{13}=a_{33}$，则

$$\begin{aligned} D &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{12}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{11} \\ &= 0 \end{aligned}$$

性质 6 如果行列式中有两行(列)成比例，则此行列式为零.

由性质 3 与性质 5 立即可得.

性质 7 把一行(列)的倍数加到另一行(列)上去，行列式不变.

由性质 4 与性质 6 立即可得.

性质 8 交换行列式的两行(列)的位置，行列式反号.

由性质 7 与性质 3 立即可得.

利用这些性质，可以把行列式变成比较特殊的形式，简化行列式的计算.

例 5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot 3 = -12$$

§2 n 阶行列式

定义 3 n 阶行列式是把排成一个方块的 n^2 个数

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

按下列规则进行运算.

当 $n=1$ 时，$D=a_{11}$

当 $n=2$ 时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时，

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 为在 D 中划去元素 a_{ij} 所在的行与所在的列后，所余下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式. A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式. 容易看出，

$$A_{ij}=\begin{cases} M_{ij}, & \text{当 } i+j \text{ 是偶数} \\ -M_{ij}, & \text{当 } i+j \text{ 是奇数} \end{cases}$$

这样把 D 用 n 个 $n-1$ 阶行列式的代数和来定义，其中每一个 $n-1$ 阶行列式又用 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式的代数和来定义，最后可变为二阶行列式的代数和.

n 阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们的定义中，可按任何一行（列）来展开 D，可以严格证明，不论选择 D 中哪一行（列）展开，均可得到相同的值①.

例 5 二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

按定义可有四种展开式：

按第一行展开：$D=a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}+a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}$

按第二行展开：$D=a_{21}(-1)^{2+1}a_{12}+a_{22}(-1)^{2+2}a_{11}$

按第一列展开：$D=a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}+a_{21}(-1)^{1+2}a_{12}$

按第二列展开：$D=a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}+a_{22}(-1)^{2+2}a_{11}$

它们都是 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

例 6 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解

① 证明见 E·克雷塞格著《高等工程数学》上册，1988 年第六版 P. 557 — P. 559，彭源昌译，台湾晓园出版社出版.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3(-1 \cdot 2) = 24$$

例 7　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

D 称为上三角行列式，它的值等于主对角线（由左上角到右下角对角线）上元素的乘积.

特别地，有对角形行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

§3　n 阶行列式的性质

与二阶和三阶行列式类似，n 阶行列式有以下性质.

性质 1　行列互换，行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对此性质不加证明.

性质 1 表明，在行列式中，行与列的位置是对称的. 因此凡是有关行的性质，对列也同样成立. 由例 3 上三角行列式的计算，可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

事实上,由行列式的定义,按第 i 行展开

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

令 $k = 0$,就有:如果行列式中一行为零,则此行列式为零.

行列式的第 i 行(或列)乘以数 k,记作 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

性质 3　如果一行是两组数的和,则这个行列式就等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样,即

$$i\text{行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} i\text{行}$$

事实上,由定义立即可得,按第 i 行展开

$$\begin{aligned} i\text{行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (b_1 + c_1)A_{i1} + (b_2 + c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n + c_n)A_{in} \\ &= (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}) + (c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \cdots + c_nA_{in}) \\ &= i\text{行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + i\text{行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

性质 4　如果行列式中有两行相同,则此行列式为零.即

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} = 0$$

此性质不加证明.

性质 5　如果行列式中两行成比例,则此行列式为零.

因为若第 i 行与第 j 行成比例,即

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = k\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = k \cdot 0 = 0$$

性质 6　把一行的倍数加到另一行,行列式不变.

因为

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上,记作 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$).

性质 7　对换行列式中两行的位置,行列式反号.

因为

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}
\xlongequal{r_i+r_j}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_j-r_i}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_i+r_j}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

交换 i,j 两行(列) 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$).

例 8　计算行列式

$$
\begin{vmatrix}
3 & 1 & -1 & 2 \\
-5 & 1 & 3 & -4 \\
2 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -5 & 3 & -3
\end{vmatrix}
$$

解

$$
\begin{vmatrix}
3 & 1 & -1 & 2 \\
-5 & 1 & 3 & -4 \\
2 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -5 & 3 & -3
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
-5 & 1 & 3 & -4 \\
2 & 0 & 1 & -1 \\
3 & 1 & -1 & 2
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[r_4-3r_1]{\substack{r_2+5r_1 \\ r_3-2r_1}} -
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
0 & -24 & 18 & -19 \\
0 & 10 & -5 & 5 \\
0 & 16 & -10 & 11
\end{vmatrix}
= -5
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
0 & -24 & 18 & -19 \\
0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 16 & -10 & 11
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_2} 5
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & -24 & 18 & -19 \\
0 & 16 & -10 & 11
\end{vmatrix}
\xlongequal{\substack{r_3+12r_2 \\ r_4-8r_2}} 5
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 6 & -7 \\
0 & 0 & -2 & 3
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -5
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 3 \\
0 & 0 & 6 & -7
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_4+3r_3} -5
\begin{vmatrix}
1 & -5 & 3 & -3 \\
0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 2
\end{vmatrix}
= 40
$$

例 9　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\cdot 8=48$$

一般地,计算行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}_n$$

解

$$D_n\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&a+(n-1)b&a+(n-1)b&\cdots&a+(n-1)b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}\xlongequal[r_n-br_1]{r_2-br_1,\ r_3-br_1,\ \vdots}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 10 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+\quad+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$