弹性理论

王颖坚　刘凤丽　编著

辽宁大学出版社

弹 性 理 论

王颖坚　刘凤丽　著

辽 宁 大 学 出 版 社

一九九四年·沈阳

（辽）新登字第9号

弹　性　理　论

王颖坚　刘凤丽编著

责任编辑：王德年
封面设计：陈景泓
责任校对：白　文
辽宁大学出版社出版发行
（沈阳市崇山中路66号）
沈阳第六印刷厂印刷
开本:850×1168 1/32 印张:12.25 字数:280千字
1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷
印数：0001—1000册
ISBN 7—5610—2867—9

O·102　定价：12.00元

内 容 简 介

本书是根据作者近几年在北京大学力学系讲授弹性力学课所用讲稿整理而成的。全书分十章系统讲述了弹性力学的基本概念、基本原理、处理问题的基本方法。全书注重理论系统的完整性、严谨性，并系统讲述了大量有实际意义的工程问题的解题方法和重要结果。

为使表述简捷，书中有用向量与张量记法，同时为便于初学者阅读，在讲述具体问题时也给出了分量记法。

本书可作为理科力学专业本科生弹性力学课的教材，可作为工科院校力学专业的教学参考书，也可供相关专业的研究生和工程技术人员参考。

前　言

本书是应教学工作之需，根据作者近几年在北京大学力学系讲授弹性力学课所用讲稿整理而成的。

弹性力学是力学专业本科生的基础课。本书讲述弹性理论的基本概念，基本原理、基本方程组和边界条件、处理弹性力学问题的基本方法。本书在讲述上注重弹性力学问题的数学物理基础，注重理论系统的完整性、严谨性，同时也讲述了很多具体问题的解题方法和对工程应用有重要意义的结果，从而为读者深入学习固体力学其他分支学科并将弹性理论应用于工程实际打下较好的基础。

本书采用向量和张量记法。为了便于初学者阅读，书中很多地方同时给出了分量记法。为了不影响本书关于弹性理论的基本概念、基本理论的讲述，将本书用到的有关的向量和张量的概念和重要定理，详细地列在附录中。它们是阅读本书的必要的基础。为了便于初学者学习与掌握向量和张量运算的基本方法，附录中给出了若干习题。

本书主要讲述线性弹性理论静力学问题，同时也适当地介绍了与固体力学其他分支学科有关的概念。在变形分析一章中，讲述了小变形理论，也给出了非线性应变理论中的Green 应变张量。在第三章讲述平衡方程时，也给出了弹性动力学的运动方程组。在弹性体本构关系一章中，讨论了各向异性材料，正交各向异性材料、横观各向同性材料、各向同性材料的特性，并导出了各向同性材料的热弹性本构关系，这些内容对于学习与研究复合材料力学、热应力问题等都是有用的。在柱体的扭转与弯曲一章中，讲述了 Saint－Venant 问题的解法，也讨论了薄壁杆件的扭转、变截面圆轴的扭转、螺旋位错、纵向剪切裂缝等。在平面问题的解法中，介绍了 I 型裂缝的应力强度因子。在空间问题一章中，讲述了边界积分方程、球体中的热应力等。这些内容，对于了解弹性力学问题的工程应用，对于学习断裂力学、位错理论、边界元方法、热应力问题等是有益的。这样，使古典弹性理论与

近代固体力学的若干分支建立起必然的联系。

在弹性力学变分原理一章中，讲述了线性弹性问题解的适定性，并给出了严格的数学证明。解的适定性问题，是线性弹性理论的基础。但是，在这一节的讲述中用到了泛函分析知识和广义解的概念，它们超出了力学专业本科课程的基本要求，所以在小节号前加了*号。

本书采用武际可、王敏中教授所著“弹性力学引论”中所用的符号系统。本书各章所附的习题，是近几年北京大学力学系弹性力学习题课上做过的习题。它们大部分取自北京大学力学系的“弹性力学引论习题”。

作者的老师、中国科学院院士王仁教授认真审阅了本书的大部分书稿，并提出许多宝贵意见，使本书增色不少。在本书完稿过程中，朱照宣教授、殷有泉教授给予了大力支持。辽宁大学数学系刘凤丽副教授参加了第二章、第三章的编写工作。在此谨致深切谢意。

因水平所限，失误与不当之处难免，恳请批评指正。

王颖坚

1994 年 2 月于北大力学系

目　　录

第一章 绪论

§1. 弹性力学及其发展简史

弹性力学研究弹性固体在外载荷作用下的变形规律。物体的弹性，是指物体在加载过程中其应力与应变之间有单值函数关系，而且当卸除外载荷后物体能完全恢复其受载前的初始状态的性质。本书仅讨论不超过比例极限的单值线性应力应变关系。

弹性力学是固体力学的重要分支，是深入学习与研究固体力学其他分支的基础。在近代固体力学的发展中，例如，在线性与非线性弹性稳定性理论、复合材料力学、断裂力学、地质力学、骨骼生物力学等分支学科与交叉学科中，弹性力学的基本概念、基本原理和方法都起着重要作用。

弹性力学是一门基础理论学科，也是一门与现代工程密切相关的有着广泛应用范围的学科。弹性力学的概念、方法和结果，广泛应用于土木建筑、航空航天、水利电力、船舶结构、机械制造等很多工程领域。

弹性力学的早期研究，始于 17 世纪。通过实践，英国的 R. Hooke 于 1678 年和法国的 E. Mariotte 于 1680 年分别独立地提出了弹性体变形与所受外力成正比的定律，即 Hooke 定律。*

17 世纪末和 18 世纪，瑞士的 J. Bernoulli, D. Bernoulli 和 L. Euler 研究了弹性曲线(elastica)。L. Euler 建立了受压柱体失稳的临界值公式，建立了受压柱体微分方程。1821 年，法国的 C. L. M. H. Navier 建立了弹性力学基本方程。1822 年，法国的 A. L. Cauchy 给

* 据考证，我国东汉郑玄(127—200)就曾提出力与变形间的线性弹性关系。(见老亮著"中国古代材料力学史"，国防科技大学出版社，1991)

出了应力和应变的严格定义，并于尔后几年的论文中导出了六面体微元的平衡微分方程，给出了各向同性和各向异性材料的广义 Hooke 定律，从而奠定了弹性力学的理论基础。[31]

1855～1856 年，法国的 Barre de Saint－Venant 用半逆解法解出了柱体扭转和弯曲问题，并提出了著名的 Saint－Venant 原理。他的理论与实验结果密切吻合，为弹性理论的正确性提供了有力证据。而后，德国的 F. E. Neumann 建立了三维弹性理论。1881 年，德国的 H. R. Hertz 解出了两弹性体局部接触时弹性体内的应力分布。1898 年，德国的 G. Kirsch 在计算圆孔附近的应力分布时，发现了应力集中，在提高机械、结构零件的设计水平上起了重要作用。这些成就，使弹性理论能广泛用于解决工程问题。在解决工程问题中，弹性理论也得到了更大发展。

19 世纪 50 年代至 20 世纪 30 年代是弹性理论大发展的时期。这一时期，除以上提到的重要成就外，还建立了弹性力学的能量原理——虚功原理和最小势能原理，提出了功的互等定理。1872 年，意大利的 E. Betti 给出了功的互等定理的普遍证明。英国的 J. C. Maxwell 发展了光测弹性应力分析技术。1873～1879 年，意大利的 A. Castigliano 建立了最小余能原理。1903 年，德国的 L. Prandtl 提出了解扭转问题的薄膜比拟法。这一时期，在用弹性理论处理工程问题时，许多有效的数值方法，如 Rayleigh－Ritz 法，得到了广泛应用。1913～1915 年，俄国的 И. Г. Бубнов 和 Б. Г. Галёркин 提出了著名的 Бубнов － Галёркин 方法。20 世纪 30 年代，苏联的 Н. И. Мусхелишвили 将保角变换等复变函数方法成功地运用于求解弹性理论问题，发展了弹性力学的复变函数解法。

20 世纪 20 年代以来，在弹性经典理论继续得到发展的同时，许多复杂问题也得到了深入研究，并出现了许多边缘分支，如非线性弹性理论、非线性板壳理论和稳定性分析，各向异性和非均匀体的理论，粘弹性理论，气动弹性理论等。断裂力学、复合材料力学的发展，也和弹性理论密切相关。弹性力学广义变分原理的发展，20 世纪 60 年代以来有限单元法、边界单元法等数值方法的发展，更为用弹性理

论处理工程问题提供了有力的工具。

§2. 弹性力学的基本假定

弹性力学基本假定是连续性假定。弹性力学是连续介质力学的一个分支。连续性假定是连续介质力学的基本假定，也是弹性力学的基本假定。

根据这一假定，我们所研究的物体被看作是密实的连续体，描述物体力学性质的物理量，是物体内各点的连续函数。例如，密度、位移、应力、应变等物理量，除在某些点、线、面而外，是空间点的连续函数。在今后的分析中，我们将从物体内截取出微元——微体积或微面积，并考虑这些微体积、微面积趋于零的极限过程。这时，在物理上我们假定，在取极限的过程中物体的力学性质不改变。

根据这一假定，当物体变形时，变形后物体上的质点与变形前物体上的质点是一一对应的。

物体是由分子、原子构成的，从微观的意义来说，物体不是连续的。因此，物体的连续性是我们研究物体宏观力学性质时采用的假定。然而，连续性假定在物理上是合理的。因为，既使在非常小的宏观体积中，例如在 $1\mu m^3$ 的体积中，仍含有 10^{12} 个原子。可见，我们所用的宏观尺度从微观角度来看是非常大的。这说明，在研究物体的宏观性质时，采用连续性假定是合理的。

连续性假定确定了我们的研究领域是宏观力学，不涉及物质的微观结构。

连续性假定使我们能够运用基于连续函数的一系列数学工具，如极限、微分、积分等。这也就决定了我们的研究方法。

连续介质力学包括弹性力学、塑性力学、流体力学。弹性力学区别于连续介质力学其他分支的特点是，弹性力学仅研究不超过比例极限的有着单值应力应变关系的弹性体。

§3. 本书的研究范围

Ⅰ)本书仅研究不超过比例极限的有着单值线性应力应变关系的弹性体，即，仅研究线性弹性理论。

Ⅱ)本书采用小应变、小转动的假定，认为应变张量分量和转动张量分量都远小于1，且它们属于同量级。即假定

a)位移的一阶偏导数远小于1：

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| << 1,\quad i,j=1,2,3$$

其中 x_j 为坐标分量，u_i 为位移分量，在应变张量和转动张量的表达式中，略去位移偏导数的二次及二次以上的高阶微量。

b)物体上各点因变形而引起的位移与物体的相应特征尺度相比是很微小的，故不考虑变形对外载荷及平衡条件的影响，仍在变形前的弹性体上列平衡条件。

Ⅲ)本书一般仅讨论均匀弹性体，认为弹性体各点的力学性质是相同的。

Ⅳ)本书一般仅讨论各向同性弹性体，即认为物体在任意一点的任何方向上的力学性质相同。关于各向异性弹性体，只在书中个别地方讲述。

第二章　变形分析

§1.　位移和变形

弹性体内各点相对位置的改变，称为弹性体的变形。为描述弹性体在外载荷作用下的变形，我们首先讨论弹性体内各点的位移。

考虑某弹性体区域 R，变形后变成区域 R'。变形前 R 中任意点 P，向径为 $\vec{r}$，变形后 P 的象点为 P'，向径为 $\vec{r}\,'$。$\vec{u}$ 是变形过程中 P 点的位移，则(图 2.1)

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{u} \tag{2.1}$$

我们假定，$\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ 是单值连续函数，具有三阶以上的连续偏导数。根据连续性假定，弹性体在变形过程中不开裂、不重叠。因此，区域 R 内的任意点 P 与变形后区域 R' 中的象点 P' 之间是一一对应的。P 与 P' 之间的对应关系由 (2.1) 表达，其分量形式为

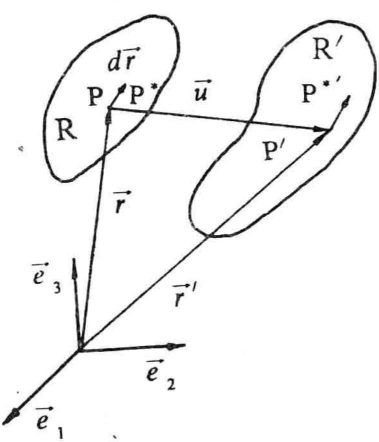

图 2.1

$$x_i' = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1,2,3) \tag{2.2}$$

从数学上讲，P 与 P' 之间一一对应的充要条件是 Jacobi 行列式

$$\frac{D(x_1', x_2', x_3')}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \tag{2.3}$$

由(2.2)可知，Jacobi 行列式