高职高专“十二五”规划教材

公共基础类

郑轶鹏　李以渝　主编

应用数学

$$\int\frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$$

——微积分基础

YINGYONG SHUXUE

—weijifenjichu

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

高职高专“十二五”规划教材·公共基础类

应用数学——微积分基础

主　编　郑铁鹏　李以渝
副主编　李　娜　段　莎
主　审　黄　春

中国海洋大学出版社
·青岛·

内 容 简 介

本书是大学数学的基础教学用书。主要包括一元微积分和多元微积分两部分内容。

本书作为非数学专业的大学数学教材，在本着结构简明、理念创新、内容深入浅出、素质教育与应用性教育并重的前提下，结合了微积分的发展史、科学思想、科学方法、科学家的故事、微积分的哲学、马克思对微积分的研究，以及微积分的工程技术应用等各个方面作为教材的内容，以更好地培养学生的数学应用思想。

同时，本书设计了工程技术、经济管理、社会生活、自然现象等广泛领域的数学应用题作为例题和习题，题型从基础知识到高级解题技巧再到应用实例做了非常细致的划分，并且在很多方面体现出了高等数学在工程技术与经济分析中的应用，重点突出，难度适中，较好地考虑到了应用型院校的特点和实际情况。

本书适合作为高职高专的数学课程教材和高校数学课程的参考书，亦可作为培养学生数学兴趣的初级读本。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学——微积分基础/郑铁鹏，李以渝主编. —青岛：中国海洋大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-81125-885-1

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①郑…②李…　Ⅲ. ①应用数学②微积分　Ⅳ. ①O29②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 182834 号

出版发行 中国海洋大学出版社
社　　址 青岛市香港东路 23 号　　**邮政编码** 266071
网　　址 http://www.ouc-press.com
电子信箱 bjzhangxf@126.com
责任编辑 韩玉堂
印　　制 北京天正元印务有限公司
版　　次 2011 年 9 月第 1 版
印　　次 2011 年 9 月第 1 次印刷
印　　数 1-3000 册
成品尺寸 185mm×260mm　1/16
印　　张 12.25
字　　数 286 千字
定　　价 29.00 元

前　言

本书内容符合国家教育部关于“高等教育要面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本要求，是编者总结多年的教学实践经验，参照原国家教委颁发的《高等学校工科专科基础课程教学基本要求》，为高等工科院校各专业编写的大学数学课程教材。本书作为非数学专业的大学数学教材，在本着结构简明、理念创新、内容深入浅出、素质教育与应用性教育并重的前提下，结合了微积分的发展史、科学思想、科学方法、科学家的故事、微积分的哲学、马克思对微积分的研究，以及微积分的工程技术应用等各个方面作为教材教育的材料，以更好的培养学生的数学应用思想。

本书在编写过程中力求突出以下几个方面的特点：

(1) 尝试用新的数学观看待问题。

数学是一门特殊的科学，数学充分显示着一般科学精神、思想和方法；数学是一种文化，它属于甚至代表科学文化。

(2) 将应用性融入数学教育。

现代社会，数学的技术作用日益突出，学校教育随之强调数学的技术作用，笔者则进一步认为，由新的数学观有新的教育观：数学教育的意义、价值不仅在于数学知识和方法的教育，数学学习能为人一生的可持续发展提供动力，原因正在于培养了人的这些素质。

(3) 开拓数学的素质教育价值。

新的数学素质教育观，即数学课程的素质教育应有“数学素质”与“一般素质”的双重意义。数学素质即数学观念、数学思维、数学语言、数学技能及应用能力等数学学科素质；一般素质包括思想素质、文化素质、思维素质、创新素质、审美素质等人的综合素质的各重要方面。新的数学素质观，是重视数学(学科)素质教育并努力使其扩展为人的一般素质、全面素质，即：

数学知识→科学知识、一般知识
数学方法→科学方法、一般方法
数学思维→科学思维、一般思维
数学精神→科学精神、一般精神
数学创造→科学创造、一般创新
数学之美→科学之美、世界之美

(4) 高等教育高等数学教育观的改进。

高等教育培养的一方面时是生产、服务一线的技术工人，另一方面，是可培养高技术、高知识的研究型人才，而本教材(以及教法) 的特色是大学高等数学和高职高专的应用性数学的“融合压缩版”，充分体现高等数学的学科性、理论性的同时突出数学应用的思想方法，以探究式学习的角度重点突出素质教育。

本书是面向高等院校非数学专业的教材，建议授课时数为 60～90。不同专业在使用时，可根据自身的特点和需要加以取舍。

本书由郑铁鹏、李以渝任主编，李娜、段莎任副主编。全书由黄春主审。

由于编者水平所限，书中如有不足之处敬请使用本书的师生与读者批评指正，以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议，恳请向编者(bjzhangxf@126.com)踊跃提出宝贵意见。

编　者

目　录

第 1 章　函数 ……1

1.1　基本初等函数 ……1
1.1.1　函数的意义 ……1
1.1.2　基本初等函数 ……1
习题 1.1 ……3
1.2　来自原来函数的新函数 ……5
1.2.1　平移与伸缩 ……5
1.2.2　函数加减 ……5
1.2.3　复合函数 ……6
习题 1.2 ……7
1.3　初等函数 ……8
1.3.1　数学模型：基本初等函数的应用 ……8
1.3.2　数学建模基础知识 ……11
习题 1.3 ……12
复习题 ……12

第 2 章　导数 ……15

2.1　关键概念：导数 ……15
2.1.1　如何求瞬时速度 ……15
2.1.2　基础知识：极限 ……16
2.1.3　导数的定义 ……18
2.1.4　对符号 $\frac{dy}{dx}$ 的直观理解 ……19
2.1.5　由导数的单位理解导数 ……20
2.1.6　导数概念的直观表示 ……20
习题 2.1 ……21
2.2　基本导数公式 ……22
习题 2.2 ……23
2.3　导数的几何意义与经济意义 ……23
2.3.1　导数的几何意义 ……24
2.3.2　导数的经济意义 ……25
习题 2.3 ……26
2.4　二阶导数 ……27
2.4.1　二阶导数的概念 ……27
2.4.2　二阶导数的意义 ……28
习题 2.4 ……28
2.5　连续、间断与导数 ……29
2.5.1　连续的定义 ……29
2.5.2　分析函数连续的定义 ……30
2.5.3　可导的注释：可导与连续的关系 ……30
习题 2.5 ……32
复习题 ……32

第 3 章　积分 ……35

3.1　关键概念：定积分 ……35
3.1.1　如何计算曲面面积 ……35
3.1.2　定积分的定义 ……36
3.1.3　定积分的几何意义 ……36
习题 3.1 ……37
3.2　定积分的再认识 ……39
3.2.1　作为路程的定积分 ……39
3.2.2　定积分的符号与单位 ……40
习题 3.2 ……40
3.3　微积分基本定理 ……41
习题 3.3 ……43
复习题 ……44

第 4 章　求导方法 ……45

4.1　求导公式与基本法则 ……45
习题 4.1 ……47
4.2　复合函数求导 ……48
习题 4.2 ……50
4.3　隐函数求导 ……51
4.3.1　隐函数求导法 ……51
4.3.2　对数求导法 ……52
4.3.3　求参数方程的导数 ……53

习题 4.3 …… 54
复习题 …… 54
第 5 章 导数的应用 …… 56
5.1 理论基础：中值定理 …… 56
习题 5.1 …… 57
5.2 一阶导数的应用 …… 57
5.2.1 函数单调性的判定 …… 58
5.2.2 函数的极大值和极小值 …… 59
习题 5.2 …… 61
5.3 二阶导数的应用 …… 62
5.3.1 曲线凹凸区间的判定 …… 62
5.3.2 了解曲线的凹凸性的作用 …… 63
习题 5.3 …… 66
5.4 数学建模：最优化问题 …… 66
习题 5.4 …… 72
5.5 微分：导数的代数应用 …… 73
5.5.1 微分的概念及思想 …… 73
5.5.2 微分基本公式 …… 74
5.5.3 微分四则运算法则 …… 74
5.5.4 微分在近似计算中的应用 …… 75
习题 5.5 …… 76
复习题 …… 77
第 6 章 求定积分 …… 79
6.1 原函数与不定积分 …… 79
习题 6.1 …… 80
6.2 直接积分法 …… 81
习题 6.2 …… 83
6.3 换元积分法 …… 84
6.3.1 不定积分换元法 …… 84
6.3.2 定积分换元法 …… 87
*6.3.3 第二类换元法 …… 87
习题 6.3 …… 88
6.4 分部积分法 …… 89
习题 6.4 …… 90
6.5 求定积分 …… 91
6.5.1 定积分的计算性质 …… 91
6.5.2 由不定积分求定积分 …… 92
习题 6.5 …… 93
6.6 广义积分 …… 94
习题 6.6 …… 94
6.7 微分方程基础 …… 95
6.7.1 什么是微分方程 …… 95
6.7.2 微分方程的应用性——增长与衰减 …… 98
习题 6.7 …… 99
复习题 …… 100
第 7 章 定积分的应用 …… 103
7.1 定积分在几何上的应用 …… 103
7.1.1 平面图形的面积 …… 103
7.1.2 旋转体的体积 …… 104
习题 7.1 …… 106
7.2 定积分在物理上的应用 …… 107
7.2.1 功的计算 …… 107
7.2.2 流体的压力 …… 109
7.2.3 函数平均值的计算 …… 110
7.2.4 定积分在工程技术中的应用 …… 111
习题 7.2 …… 112
7.3 定积分在经济中的应用 …… 113
习题 7.3 …… 114
复习题 …… 114
第 8 章 多元函数微分学 …… 116
8.1 空间解析几何基本知识 …… 116
8.1.1 空间解析几何的有关概念 …… 116
8.1.2 空间向量的概念及运算 …… 117
8.1.3 平面 …… 119
8.1.4 简单的二次曲面 …… 120
习题 8.1 …… 122
8.2 二元函数的基本概念 …… 122
8.2.1 多元函数的概念 …… 123
8.2.2 二元函数的极限 …… 123
8.2.3 二元函数的连续性 …… 124
习题 8.2 …… 124
8.3 偏导数 …… 125

8.3.1 偏导数的定义 ……125
8.3.2 高阶偏导数 ……127
习题 8.3 ……128
8.4 多元复合函数的求导法则 ……128
习题 8.4 ……130
8.5 全微分 ……131
8.5.1 全微分的概念 ……131
8.5.2 全微分在近似计算中的应用 ……132
习题 8.5 ……132
8.6 多元函数的极值与最值 ……133
8.6.1 二元函数极值的定义 ……133
8.6.2 二元函数极值存在的必要条件 ……133
8.6.3 多元函数的最值 ……134
习题 8.6 ……136
复习题 ……137

第 9 章 多元函数积分学 ……141

9.1 二重积分的概念和性质 ……141
9.1.1 二重积分的概念 ……141
9.1.2 二重积分的性质 ……143
习题 9.1 ……145
9.2 二重积分的计算方法 ……145
9.2.1 二重积分在直角坐标系中的计算法 ……145
9.2.2 二重积分在极坐标系中的计算法 ……149
习题 9.2 ……150
9.3 二重积分的应用 ……151
9.3.1 曲面的面积 ……151
9.3.2 平面薄片的转动惯量 ……151
9.3.3 经济方面 ……152
习题 9.3 ……152
复习题 ……153

附录 1 相关阅读 ……156

附录 2 部分习题参考答案 ……165

附录 3 相关网站与在线学习 ……187

参考文献 ……188

第 1 章　函　　数

微积分是现代许多科学技术的基础和重要工具，它的研究对象是函数．函数是数学用来刻画万事万物规律的主要方式，微积分则通过研究函数的几何图像和数据将事物的规律更具体地呈现出来．

通过本章的学习，将进一步了解到函数描绘事物变化规律的作用．

1.1　基本初等函数

1.1.1　函数的意义

【先行问题】什么是函数？如 $1\mathrm{m}^2$ 的价格确定后，一套房子总购置费与其面积就有确定的关系．复杂一点的问题是，气温随着时间的变化而变化，一个城市每天(t)与其最高气温(h)之间的关系怎样？

这些问题的一般性是，事物总是相互联系、相互影响的，反映在数学上就是变量与变量之间的函数关系，即函数是一种反映变量之间相依关系的数学模型．如果变量 x 的每一个值都有变量 y 的唯一一个值与之对应，称 y 是自变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 f 为对应法则，为函数名．x 的变化范围为 f 的定义域(D)，相应 y 的变化范围为 f 的值域(R)．也可以说 x 是输入量， y 是输出量．

函数 $y=f(x)$ 的表示有表格法、图象法及公式法，这三种表示都同样适用．如经济生产中有许多数量关系表格用函数的表格法表示，而如雷达散点图、人的心电图等用函数的图象表示法表示．

值得注意，函数表现事物相互关系的规律，也表达了这样一种思想：通过某一事实的信息去推知另一事实．例如，已知一个圆的半径则可推知它的面积，由一物体的运动性质和运动规律得知它的运动路程．又如，历史上是伽利略意识到流体受热会膨胀，他首先把温度看成是流体体积的函数，制作了温度计．

函数有单调性、奇偶性、周期性和有界性等性质．

1.1.2　基本初等函数

将已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，现将其总结如下：

(1) 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)，如图 1-1 所示．

(2) 指数函数 $y=a^x$(a为常数，$a>0$，$a\neq1$)，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$，如图 1-2 所示．

(3) 对数函数 $y=\log_a x$(a为常数，$a>0$，$a\neq1$)， $x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$，如图 1-3 所示．

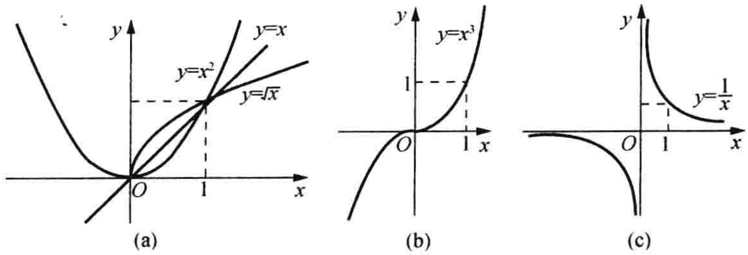

图 1-1

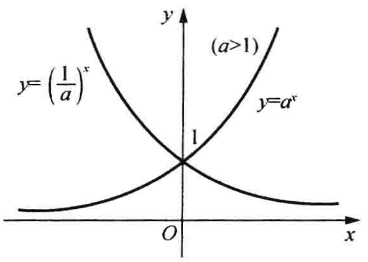

图 1-2

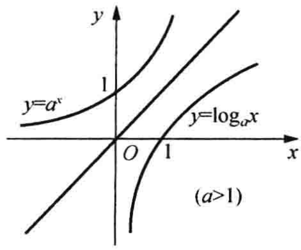

图 1-3

(4) 三角函数，如图 1-4 所示.

正弦函数 $y=\sin x$， $x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$；

余弦函数 $y=\cos x$， $x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$；

正切函数 $y=\tan x$， $x\in(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2})$， $k\in Z$， $y\in(-\infty,+\infty)$；

余切函数 $y=\cot x$， $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$， $k\in Z$， $y\in(-\infty,+\infty)$.

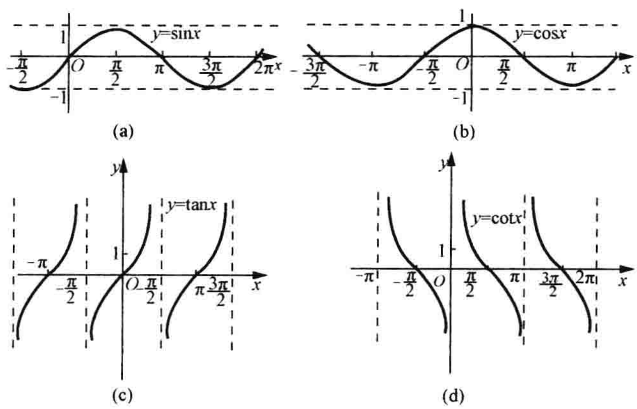

图 1-4

(5) 反三角函数，如图 1-5 所示.

反正弦函数 $y=\arcsin x$， $x\in[-1,1]$， $y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$；

反余弦函数 $y=\arccos x$， $x\in[-1,1]$， $y\in[0,\pi]$；

反正切函数 $y=\arctan x$， $x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$；

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$， $x \in (-\infty, +\infty)$， $y \in (0, \pi)$.

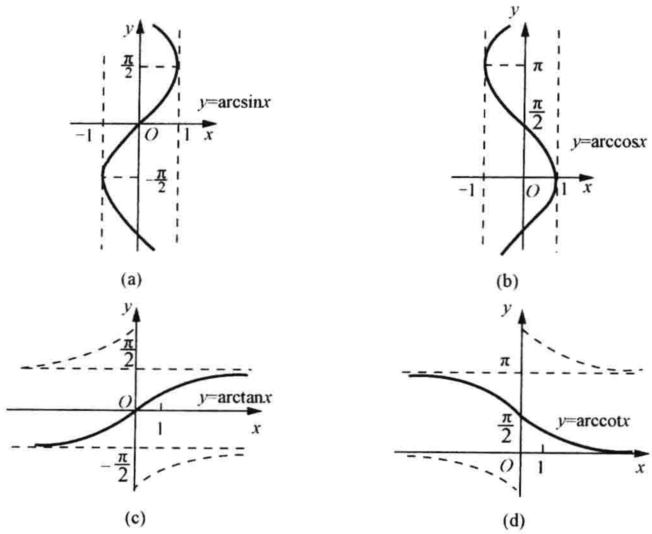

图 1-5

习题 1.1

A(基础题)

1．已知 $f(x) = x^2 - 3x + 2$，求函数值 $f(0)$， $f(1)$， $f(-x)$， $f(x+1)$， $f(\frac{1}{x})$.

2．设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 - x & 1 < x < 2 \end{cases}$，求 $f(0)$， $f(1)$， $f(\frac{5}{4})$.

3．求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{2x+1}$；　(2) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$；　(3) $y = \lg(x-1)$.

4．求下列函数的反函数.

(1) $y = 2x - 1$；　(2) $y = \dfrac{1}{x+1}$；　(3) $y = 1 - x^3$.

5．求下列反三角函数的值.

(1) $\arcsin 1$；　(2) $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　(3) $\arctan 1$.

B(提高题)

1．下列 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一个函数？为什么？

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$，$g(x) = 1$；　(2) $f(x) = \lg x^2$，$g(x) = 2\lg x$；

(3) $f(x) = |x|$，$g(x) = \sqrt{x^2}$；　(4) $f(x) = x$，$g(x) = (\sqrt{x})^2$.

2．求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$；　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\lg x$；

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\ln(\ln x)$.

3．(1) 已知 $f(x+1)=x(x+1)$，求 $f(x)$.

(2) 已知 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求 $f(x)$.

4．设 $y=f(x)$ 的定义域是[0,1]，求：

(1) $f(x^2)$ 的定义域；　　(2) $f(x+\dfrac{1}{4})+f(x-\dfrac{1}{4})$ 的定义域.

C(应用题、探究题)

1．(超重收费)乘客乘火车，可免费随身携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 部分，收费 5.00 元/kg，超过 30kg 部分再加收 50%．试写出物品重量与收费的函数关系式.

2．某厂生产某商品，每天的固定成本为 2 000 元，多生产一件产品需要增加 15 元，如果每件商品的出厂价为 20 元，为了不亏本，该厂每天至少要生产多少件该商品.

3．一般地，施用的肥料越多，谷物的产量就越高．但如果肥料施用得太多，谷物也会受到毒害，而使产量急剧下降．画出一个可能的图像以表示作为肥料施用量函数的谷物产量的变化规律.

4．如图 1-6 所示中哪几个图像与下述三件事分别吻合得最好？为剩下的那个图像写出一件事.

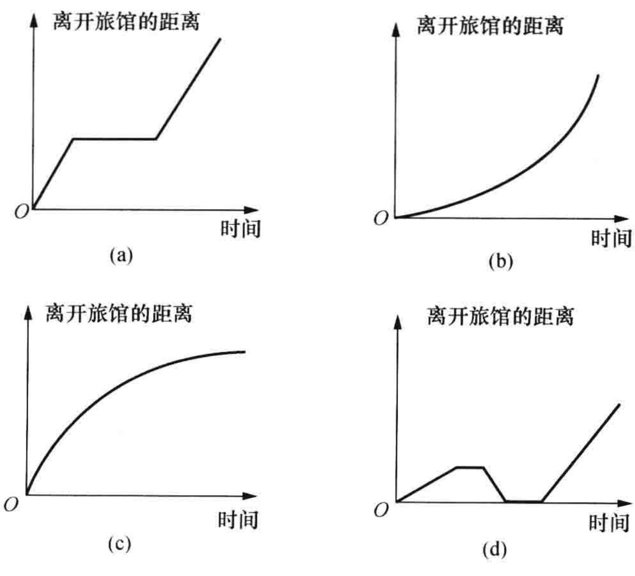

图 1-6

(1) 我离开旅馆不久，发现自己把公文夹忘在房间里，于是立刻返回旅馆取了公文夹再上路.

(2) 我驾车一路以常速行驶，只是在途中遇到一次交通堵塞，耽搁了一些时间.

(3) 我出发以后，心情轻松，边驾车，边欣赏四周景色，后来为了赶路便开始加速.

1.2　来自原来函数的新函数

由基本初等函数可以构造得到许多新函数.

1.2.1　平移与伸缩

通过平移图像可以产生新函数. 例如，$y=x^2+4$ 是把 $y=x^2$ 的图像向上移动 4，而 $y=(x-2)^2$ 是把 $y=x^2$ 的图像向右移动 2，如图 1-7 所示.

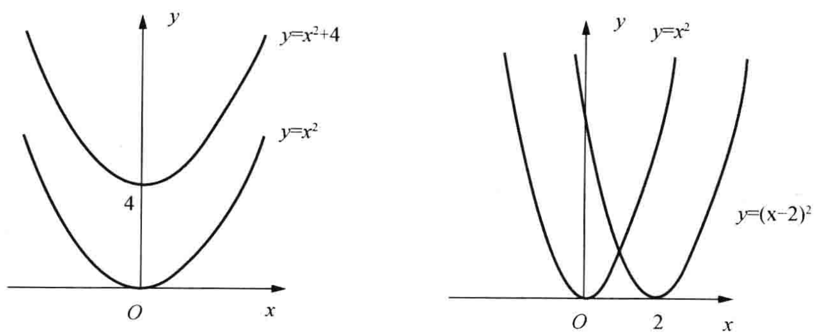

图 1-7

容易想象，$y=-f(x)$ 是将 $y=f(x)$ 关于 x 轴反射(翻折)；$y=3f(x)$ 是把每个 y 值都扩大到 3 倍.

1.2.2　函数加减

【例 1-1】 对 $x>0$，画出函数 $2x^2+\dfrac{1}{x}$ 的图像.

解: 可先画出 $y=2x^2$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像，再对应同一个 x 将 $2x^2$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 相迭加. 如图 1-8 所示.

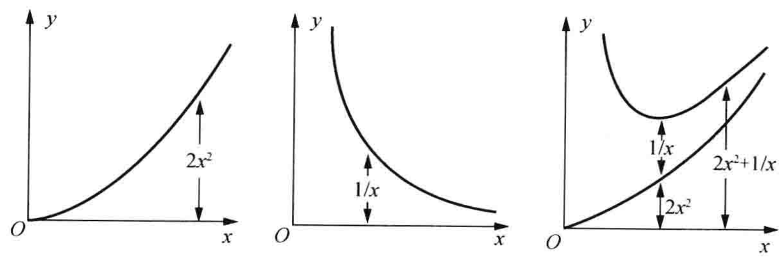

图 1-8

生小兔问题：兔子出生以后 2 个月就能生小兔，如果每月生一次且恰好生一对小兔，且出生的小兔都成活，试问一年后共有多少对兔子，2 年后有多少对兔子？

为使问题简化，先直接推算．在第 1 个月只有一对兔子；第 2 个月也只有一对兔子；在第 3 个月这对兔子生了一对兔子，共有 2 对兔子了；在第 4 个月，老兔子有生了一对兔子，共有 3 对兔子了；在第 5 个月，老兔子生了一对小兔子，且在第 3 个月出生的小兔也生了一对小兔，共有 5 对小兔子了；在第 6 个月，老兔子在第 3 月、第 4 月出生的小兔子各生一对小兔子，故共有 8 对小兔子．如此类推，不难得到月份和小兔子对数的关系，见表 1-1.

表 1-1　月份和小兔子对数的关系

月份数	1	2	3	4	5	6	7
小兔数/对	1	1	2	3	5	8	13
月份数	8	9	10	11	12	13	…
小兔数/对	21	34	55	89	144	233	…

从上表可知，一年后(第 13 个月)时共有 233 对兔子．但是计算 2 年后的数据时，这种方法似乎有些繁和笨，且容易出错．有没有更好的办法呢？现在回过头来仔细观察一下每月小兔数的变化情况，发现从第 3 月开始，每月小兔对数就是前两月的小兔对数之和．若记 R_n 为第 n 月的小兔对数，发现的规律为

$$R_1=1,\ R_2=1,\ R_n=R_{n-2}+R_{n-1},\ n=3,\ 4,\ \cdots \tag{1-1}$$

利用式(1-1)就很容易用计算机算出 2 年后兔子的对数为 75 025.

1.2.3　复合函数

函数与函数的加减乘除可以得到新函数．此外，将一个 $u=u(t)$ 替换另一个函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 则得到新函数 $y=f[u(t)]$，称 y 是一个**复合函数**，或是一个“函数的函数”，记作

$$y=f(g(x))\qquad (g\text{ 是内层函数，}f\text{ 是外层函数})$$

例如，$y=\sqrt{\cos x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的复合函数.

【例 1-2】如果石油从一艘油轮中泄出，那么泄出石油表面积 S 将随时间 t 的增加而不断扩大，探讨油表面积随时间的大致变化规律？

解：此题条件不够充分，因而有一定的开放性，可通过提出假设来解决此问题．为了明确与简化问题，假设油面始终呈圆形，再假设圆的半径为 r，随时间 t 的变化规律为：$r=g(t)=1+t$，则由 $S=\pi r^2$ 得复合函数

$$S=\pi r^2=\pi(1+t)^2$$

【例 1-3】将下列各函数表示成 x 的复合函数.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=1+\sin x$；(2) $y=\ln u$，$u=1+v^2$，$v=\mathrm{e}^x$.

解：(1) $y=\sqrt{u}=\sqrt{1+\sin x}$，即 $y=\sqrt{1+\sin x}$；

(2) $y=\ln u=\ln(1+v^2)=\ln(1+(e^x)^2)$，即 $y=\ln(1+e^{2x})$.

【例 1-4】指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos\sqrt{1-x^2}$；(2) $y=e^{\tan^2 x}$.

解：(1) $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$.

(2) $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\tan x$.

注意：

(1) 复合不是加减乘除，复合是一种新运算；

(2) 复合函数的分解，通常从最外层向内逐层分解，所得的每个函数大都是基本初等函数.

习题 1.2

A(基础题)

1．写出由下列函数构成的复合函数.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$；　(2) $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=2x$；

(3) $y=\ln u$，$u=3+x^2$；　(4) $y=e^u$，$u=x^2$.

2．指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{5x-1}$；　(2) $y=\sin^3 x$；

(3) $y=\tan\sqrt{2x-1}$；　(4) $y=e^{\cos x}$.

B(提高题)

1．指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt[3]{\lg\cos 2x}$；　(2) $y=\sqrt{\arctan(x^2+1)}$.

2．将函数 $f(x)=2-|x-2|$ 表示成分段函数.

3．$f(x)=\begin{cases} x+2 & 0<x \\ 1 & x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$，求 $f\{f[f(-1)]\}$.

4．若 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$，求：

(1) $f(g(100))$；　(2) $g(f(3))$；

(3) $f(g(x))$；　(4) $g(f(x))$.

C(应用题、探究题)

1．如果你在 6 年后需要在你的银行账户里存有 20 000 元，现在应存进多少钱？(假定年利率为 5%的连续复利)

2．假设 f 和 g 由如图 1-9 所示给出，计算下面的(1)～(6)题.

(1) 求 $f(g(1))$；　(2) 求 $g(f(2))$；　(3) 求 $f(f(1))$；

(4) 求 $f(f(x))$；　(5) 求 $g(f(x))$；　(6) 求 $f(f(x))$.

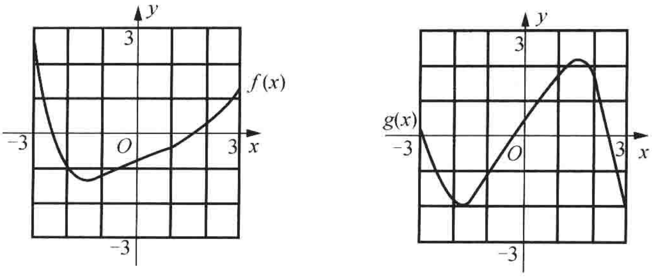

图 1-9

1.3 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=(1+x+2x^3)^3$、$y=\dfrac{x^2}{1+x}$、$y=\ln(1+\sin\sqrt{x})$ 等都是初等函数．常见的函数都是初等函数，微积分主要研究初等函数.

但绝对值函数(如 $y=|x-1|$)、分段函数不是初等函数.

1.3.1 数学模型：基本初等函数的应用

1.3.1.1 幂函数

用一个正方形的面积 S 来给出其边长 a 的函数关系，即为分数指数幂：$a=\sqrt{s}=s^{\frac{1}{2}}$.

类似地，表示在一个岛上所发现的物种的平均数与该岛的面积的关系也会是分数指数幂，即若 N 是物种数量，A 是岛的面积，有

$$N=k\sqrt[3]{A}=kA^{\frac{1}{3}}$$

其中 k 是与岛所处的地域有关的常数.

注意：实际中的正比例与反比例关系，都可以用幂函数表示.

幂函数可以表示实际中各种类型的数量关系，反映在它的图像上就有各种曲线类型，如图 1-10 和图 1-11 所示.

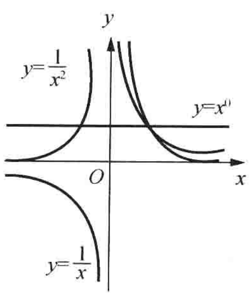

图 1-10

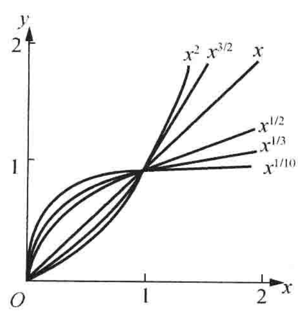

图 1-11

1.3.1.2　指数函数

指数函数则只有两种类型：指数增长 $y=a^x(a>1)$ 和指数衰减 $y=a^x(0<a<1)$．许多事物的变化规律是服从指数变化规律，因而指数函数是理解真实世界事物发展过程的基础.

例如，人口按指数增长(经研究发现，每一种指数增长型人口总数都有一个固定的倍增期，当前世界人口的倍增期约为 38 年．如果你活到 76 岁，则在你一生中，世界人口预计会增长 4 倍．“知识爆炸”也按指数增长，有科学家提出的增长模型为 $y=Ae^{kt}$．其中，如科学家每 50 年增长 10 倍，论文数量 10～15 年增长 1 倍等.

又如，放射性是按指数衰变．一般如果一种物质具有一个 h 年(或分或秒)的半衰期(该物质衰减一半所用的时间)，那么在 t 个时间单位后，该物质所剩余的量 Q 为

$$Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

其中 Q_0 为该物质原来的质量.

又比如说下例：

【课堂讨论】

(1) 你能体会到指数增长是怎样的情形吗？例如，将随便一张纸进行对折，问对折 50 次后(仅是理想实验，不考虑技术细节)折出的纸的厚度是多少？

(2) 指数函数和幂函数，谁占支配地位？事实上，每个指数增长最终将超过任何一个幂函数增长，如 x^3 比起 2^x 简直是微不足道，你相信这样的事实吗？

此外，指数函数增长快，对数函数增长慢；甚至将对数函数与幂函数比较，结论是，对大的 x，无论 $p>0$ 和 $A>0$ 的值是多少，x^p 将超过 $A\lg x$．一般有

$$2^x >> x^2 >> \log_2 x\,(\text{当 } x \text{ 较大时})$$

1.3.1.3　三角函数

三角函数的显著特征是周期性，具有周期性的事物，可考虑用适当的三角函数来刻画．如月圆月缺、交流电、经济规律、人的心脏跳动、血压、人的生理、情绪等都有周期性，都可以运用三角函数来描述.

例如，某地海平面(海潮)变化规律为

$$y=1.51+1.5\cos(\frac{2\pi}{12.4}t)=1.51+1.5\cos(0.507t)$$

又如，家庭中的交流电电压的变化规律为

$$V=V_0\cos(100\pi t)$$

1.3.1.4　函数簇

含有任意常数的多个函数叫函数簇，此常数又叫参数．例如，$f(x)=mx$ 或 $f(x)=b+mx$ 为线性函数簇，m，b 为参数，其图像如图 1-12 和图 1-13 所示.