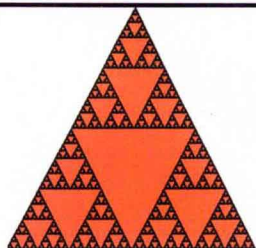


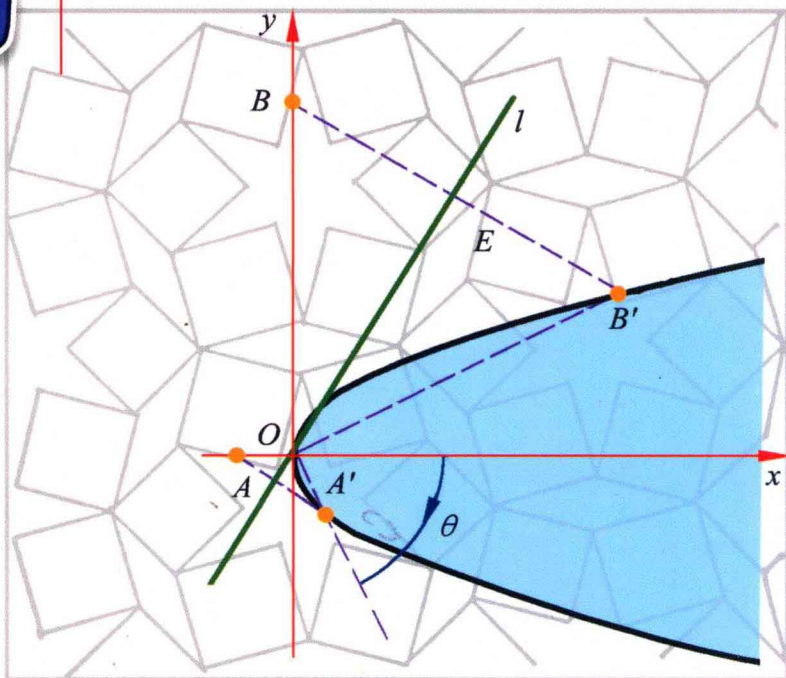
(高考复习卷)



新编中学数学

解题方法全书

张永辉 主编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

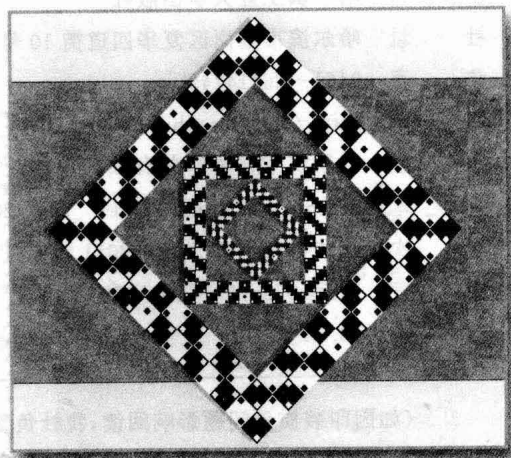
新编 中学数学

解题方法全书

(高考复习卷)

主 编 张永辉
副主编 徐宣庆 张尚仁 邓 杨 张春丽

 哈尔滨工业大学出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



内 容 简 介

本书为快速提高考生的解题水平和技巧而编写的应试用书. 本书从历年的高考真题和国内外的书刊资料中筛选重要题型, 归纳并总结各种题型的解题方法和技巧, 开阔考生的视野, 提高考生的解题速度.

本书适合高中师生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书. 高考复习卷 / 张永辉
主编. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2010. 1(2011. 6月重印)
ISBN 978-7-5603-2988-8

I. ①新… II. ①张… III. ①数学课—高中—解题—
升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 014729 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 880mm×1230mm 1/16 印张 28.5 字数 690 千字
版 次 2010 年 2 月第 1 版 2011 年 6 月第 3 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2988-8
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

前 言

高考数学复习该抓什么？众所周知该抓基础——基本理论、基本概念、基本运算；该抓解题方法和技巧。后者如何抓？许多人主张多做题，“熟读唐诗三百首，不会做诗也能吟”。诚然，多做题不失为一种方法，但不是捷径。我们认为最有效的方法是抓题型，从历年的高考真题和国内外的书刊资料中通过认真分析，筛选出重要题型，然后归纳总结出各种题型的解题方法和技巧，才能使广大考生在复习数学时起到事半功倍、举一反三、触类旁通的效果。

本书就是出于快速提高考生的解题水平和技巧编写的应试图书。本书有如下特点：

(1) 遴选题型精当，具有典型性、代表性，有一定的难度、广度，与高考大纲（或复习说明）吻合；

(2) 针对题型精选的例题所作的详尽分析、解答对考生很有启发性，尤其是“评注”部分，寥寥数语的点睛之笔，起到拨云见日、开阔视野的作用；

(3) 介绍讲解至今辅导书上所没有的一些解题方法和技巧，这可大大提高考生的解题速度。

编者

2009年9月

目 录

第一章 集合	1	题型归纳及思路提示	39
知识点精讲	1	题型 13 反函数的存在性	39
题型归纳及思路提示	2	题型 14 求反函数	39
题型 1 集合的基本概念	2	题型 15 互为反函数的两函数的性质	40
题型 2 集合间的基本关系	3	题型 16 函数与反函数图象的关系	41
题型 3 集合的运算	4	第 6 节 指数与指数函数	43
第二章 函数	7	知识点精讲	43
第 1 节 映射与函数	7	题型归纳及思路提示	43
知识点精讲	7	题型 17 指数运算及指数方程、指数不等式	43
题型归纳及思路提示	7	题型 18 指数函数的图象及性质	46
题型 1 映射与函数的概念	7	题型 19 指数函数中恒成立的问题	48
题型 2 判断函数的等价性	9	第 7 节 对数与对数函数	50
题型 3 函数解析式的求法	10	知识点精讲	50
第 2 节 函数的定义域与值域 (最值)	13	题型归纳及思路提示	50
知识点精讲	13	题型 20 对数运算及对数方程、对数不等式	50
题型归纳及思路提示	14	题型 21 对数函数的图象及性质	53
题型 4 函数定义域的求解	14	题型 22 对数函数中恒成立的问题	55
题型 5 函数值域的求解	17	第 8 节 幂函数	57
第 3 节 函数的性质	21	知识点精讲	57
知识点精讲	21	题型归纳及思路提示	58
题型归纳及思路提示	22	题型 23 求幂函数的定义域	58
题型 6 函数奇偶性的判别	22	题型 24 幂值的大小比较	58
题型 7 函数单调性的判断	25	题型 25 幂函数性质的综合应用	59
题型 8 函数周期性的判断	29	第 9 节 函数的图象	60
题型 9 函数性质的综合应用	30	知识点精讲	60
第 4 节 二次函数	32	题型归纳及思路提示	61
知识点精讲	32	题型 26 判断函数的图象	61
题型归纳及思路提示	34	题型 27 函数图象的应用	63
题型 10 二次函数、一元二次方程、二次不等式的关系	34	第 10 节 函数与方程	66
题型 11 二次方程 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 的实根分布及条件	36	知识点精讲	66
题型 12 二次函数“动轴定区间”“定轴动区间”问题	37	题型归纳及思路提示	67
第 5 节 反函数	38	题型 28 求函数的零点	67
知识点精讲	38	题型 29 利用函数的零点确定参数的取值范围	67
		题型 30 方程根的个数与函数零点的存在性	

问题	69	题型 12 五点法作图——求解析式——图象 的伸缩与平移	127
题型 31 用二分法求方程的近似解	71	题型 13 周期性与对称性	131
第 11 节 函数模型及其应用	72	第 5 节 解三角形	133
知识点精讲	72	知识点精讲	133
题型归纳及思路提示	73	题型归纳及思路提示	134
题型 32 函数在解决实际问题中的应用	73	题型 14 解三角形	134
题型 33 实际问题中的图形信息题与表格 信息题	78	题型 15 判断三角形形状	139
第 12 节 函数的综合	79	第四章 平面向量	142
知识点精讲	79	第 1 节 平面向量的基本概念及线性 运算	142
题型归纳及思路提示	79	知识点精讲	142
题型 34 函数与数列的综合	79	题型归纳及思路提示	143
题型 35 函数中恒成立问题	80	题型 1 向量的基本概念	143
题型 36 函数中的信息题	82	题型 2 向量的线性运算	144
第三章 三角函数	86	题型 3 向量基本定理的应用	146
第 1 节 任意角的概念与弧度制	86	题型 4 共线向量定理的应用	147
知识点精讲	86	题型 5 向量与三角形的四心	148
题型归纳及思路提示	86	题型 6 利用向量法解平面几何问题	150
题型 1 角的集合的表示与识别及相关 概念的理解	86	第 2 节 向量的坐标运算和数量积	151
题型 2 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角	88	知识点精讲	151
题型 3 弧长与扇形面积公式的计算	89	题型归纳及思路提示	153
第 2 节 任意角的三角函数	91	题型 7 向量的坐标运算	153
知识点精讲	91	题型 8 向量共线的坐标表示	154
题型归纳及思路提示	92	题型 9 平面向量的数量积	155
题型 4 三角函数定义题	92	题型 10 平面向量与三角函数的综合	156
题型 5 三角函数线题	93	第五章 数列	159
题型 6 象限符号与坐标轴角的三角函 数值	95	第 1 节 等差数列与等比数列	159
第 3 节 公式	97	知识点精讲	159
知识点精讲	97	题型归纳及思路提示	161
题型归纳及思路提示	99	题型 1 判断和证明数列是等差 (等比) 数列	161
题型 7 化简求值	99	题型 2 等差(等比)数列的通项及 基本量的求解	163
题型 8 化同角同函	111	题型 3 等差(等比)数列的求和	164
第 4 节 三角函数的图象与性质	114	题型 4 等差(等比)数列的性质	167
知识点精讲	114	第 2 节 数列的通项公式与求和	169
题型归纳及思路提示	116	知识点精讲	169
题型 9 已知三角函数值求角	116	题型归纳及思路提示	170
题型 10 求角的范围	119	题型 5 数列的通项公式的求解	170
题型 11 值域、最值与对称	123	题型 6 数列的求和	179
		第 3 节 数列的综合	185

知识点精讲	185
题型归纳及思路提示	186
题型 7 数列与函数的综合问题	186
题型 8 数列与不等式的综合问题	189
题型 9 数列与平面向量的综合问题	193
题型 10 数列与解析几何的综合问题	194
第六章 不等式	196
第 1 节 不等式的概念和性质	196
知识点精讲	196
题型归纳及思路提示	197
题型 1 比较数(式)的大小	197
题型 2 不等式性质的应用	200
题型 3 求取值范围	201
第 2 节 均值不等式和不等式的证明	202
知识点精讲	202
题型归纳及思路提示	203
题型 4 利用基本不等式求函数最值	203
题型 5 利用基本不等式证明不等式	205
题型 6 不等式的证明	207
附加 柯西不等式及其应用	217
第 3 节 不等式的解法	221
知识点精讲	221
题型归纳及思路提示	222
题型 7 有理不等式的解法	222
题型 8 绝对值不等式的解法	225
题型 9 超越不等式的解法	225
第 4 节 二元一次不等式(组)与简单 的线性规划问题	226
知识点精讲	226
题型归纳及思路提示	227
题型 10 二元一次不等式表示平面区域	227
题型 11 简单的线性规划	229
题型 12 线性规划中的范围问题	231
题型 13 简单线性规划问题的实际应用	232
第 5 节 不等式的综合	233
知识点精讲	233
题型归纳及思路提示	233
题型 14 不等式恒成立问题中求参数的 取值范围问题	233
题型 15 不等式与函数的综合	237
第七章 立体几何	244
第 1 节 空间几何体	244

知识点精讲	244
题型归纳及思路提示	246
题型 1 空间几何体的三视图及计算表 面积和体积	246
第 2 节 点、线、面之间的位置关系	249
知识点精讲	249
题型归纳及思路提示	251
题型 2 平面的基本性质与推论	251
题型 3 空间中的平行关系	253
题型 4 空间中的垂直关系	256
第 3 节 空间角及其空间距离的计算	260
知识点精讲	260
题型归纳及思路提示	261
题型 5 空间角及其空间距离的计算	261
第 4 节 空间向量及其应用	271
知识点精讲	271
题型归纳及思路提示	272
题型 6 空间向量及其应用	272
第八章 直线与圆的方程	284
第 1 节 直线方程	284
知识点精讲	284
题型归纳及思路提示	285
题型 1 直线的方程	285
题型 2 两直线位置关系	287
第 2 节 圆的方程	289
知识点精讲	289
题型归纳及思路提示	289
题型 3 待定系数法求圆的方程	289
第 3 节 直线与圆的位置关系	291
知识点精讲	291
题型归纳及思路提示	292
题型 4 直线与圆的位置关系	292
题型 5 圆与圆的位置关系	296
第九章 圆锥曲线方程	298
第 1 节 椭圆	298
知识点精讲	298
题型归纳及思路提示	299
题型 1 椭圆的标准方程	299
题型 2 椭圆的几何性质	301
第 2 节 双曲线	302
知识点精讲	302
题型归纳及思路提示	304

题型 3 双曲线的标准方程	304	问题	360
题型 4 双曲线的几何性质	306	题型 2 已知伪代码, 计算程序结果	361
第 3 节 抛物线	308	题型 3 根据条件, 填充不完整的流程图 ...	363
知识点精讲	308	363
题型归纳及思路提示	309	题型 4 算法和其他问题的综合	364
题型 5 抛物线的标准方程	309	题型 5 含算法思想的其他问题	365
题型 6 抛物线的几何性质	310	第十二章 排列组合与二项式定理	367
第 4 节 轨迹问题	311	第 1 节 基本原理与简单排列	
知识点精讲	311	组合问题	367
题型归纳及思路提示	311	知识点精讲	367
题型 7 求动点轨迹方程	311	题型归纳及思路提示	368
第 5 节 直线与圆锥曲线的位置关系	322	题型 1 推导、化简和计算	368
知识点精讲	322	题型 2 基本原理和简单排列组合	
题型归纳及思路提示	323	问题的结合	370
题型 8 直线与圆锥曲线位置关系的		第 2 节 排列题型(不重复排列)	375
判定	323	题型分类	375
题型 9 相交弦长问题	326	题型归纳及思路提示	375
第 6 节 圆锥曲线的综合	329	题型 3 特元特位问题: 某些元素一定在	
知识点精讲	329	或一定不在某些位置	375
题型归纳及思路提示	330	题型 4 捆绑问题: 在排列中若干元素	
题型 10 平面向量在解析几何的应用 ...	330	排在一起	377
题型 11 定值、最值、定点、定直线		题型 5 插空问题: 在排列中某几个元素	
问题	335	互不相邻	378
第十章 常用逻辑用语	351	题型 6 定序问题: 排列中某些元素	
第 1 节 命题及其关系、充分条件		相对顺序不变	379
与必要条件	351	题型 7 其他排列: 环排列、双排列	380
知识点精讲	351	第 3 节 组合题型	381
题型归纳及思路提示	352	知识点精讲	381
题型 1 四种命题及关系	352	题型归纳及思路提示	381
题型 2 充分条件、必要条件、充要		题型 8 分选问题和选排问题	381
条件的判断	353	题型 9 分组问题: 几个不同元素分	
第 2 节 简单的逻辑联结词、全称量词与		成若干组	382
存在量词	354	题型 10 分配问题即把几个元素分到若干	
知识点精讲	354	单位	383
题型归纳及思路提示	355	题型 11 隔板问题: 不定方程 $x_1 + x_2 + \dots +$	
题型 3 判断命题的真假	355	$x_m = n$ ($x_1, \dots, x_m \in \mathbf{N}^+$)	384
题型 4 含有一个量词的命题的否定	356	第 4 节 二项式定理	385
题型 5 结合命题真假求参数的范围	357	知识点精讲	385
第十一章 算法初步	358	题型归纳及思路提示	386
知识点精讲	358	题型 12 T_{r+1} 的系数与 x 幂指数的确定	386
题型归纳及思路提示	360	386
题型 1 已知流程图, 计算程序结果的			

题型 13 系数和	387	知识点精讲	414
题型 14 二项式展开式的二项式系数与 系数的最值	388	题型归纳及思路提示	415
第十三章 概率与统计	390	题型 4 利用原函数与导函数的关系 判断图象	415
第 1 节 概率	390	题型 5 利用导数判断函数的单调性	416
知识点精讲	390	题型 6 函数的极值与最值的求解	417
题型归纳及思路提示	391	题型 7 利用导数解决不等式恒成立 问题	419
题型 1 等可能事件概率的计算——除法	391	题型 8 利用导数证明不等式	422
题型 2 互斥事件的概率——加法和减法	394	题型 9 利用导数探讨函数图象的交点	424
题型 3 相互独立事件同时发生的 概率——乘法	395	题型 10 导数与数列的综合	426
第 2 节 概率分布	396	第 3 节 定积分与微积分基本定理	427
知识点精讲	396	知识点精讲	427
题型归纳及思路提示	398	题型归纳及思路提示	428
题型 4 作离散型随机变量的分布列, 求 $E(X), D(X)$	398	题型 11 用定积分求曲边梯形的面积	428
题型 5 正态分布	402	题型 12 求定积分	430
第 3 节 统计	403	第十五章 推理与证明	432
知识点精讲	403	第 1 节 合情推理与演绎推理	432
题型归纳及思路提示	405	知识点精讲	432
题型 6 随机抽样类型的选择及抽法	405	题型归纳及思路提示	432
题型 7 用样本估计总体	406	题型 1 归纳推理	432
题型 8 两个随机变量的线性相关	407	题型 2 类比推理	434
题型 9 独立性检验	408	题型 3 演绎推理	435
第十四章 导数与定积分	409	第 2 节 直接证明、间接证明与数学归 纳法	435
第 1 节 导数的概念与运算	409	知识点精讲	435
知识点精讲	409	题型归纳及思路提示	436
题型归纳及思路提示	410	题型 4 不等式或等式的证明	436
题型 1 导数的定义	410	第十六章 数系的扩充与复数的引入	440
题型 2 求函数的导数	411	知识点精讲	440
题型 3 求曲线的切线方程	412	题型归纳及思路提示	441
第 2 节 导数的应用	414	题型 1 复数的运算	441
		题型 2 复数几何意义的应用	442

第一章 集合

知识点精讲

一、集合有关概念

1. 某些指定对象的部分或全体就成为一个集合

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象外,还可以是其他对象.

2. 集合元素的特征

(1)确定性:集合的元素必须是确定的,任何一个对象都能明确判断出它是否为该集合的元素.

(2)互异性:集合中任何两个元素都是不相同的,即同一个元素在同一个集合中不能重复出现.

(3)无序性:集合与组成它的元素的顺序无关.

二、集合与集合的关系

1. 元素和集合之间的关系

有属于“ \in ”和不属于“ \notin ”两种.

2. 集合与集合之间的关系

(1)包含关系

子集:如果对任意 $a \in A \Rightarrow a \in B$, 则集合 A 是集合 B 的子集. 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 显然 $A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$.

(2)相等关系

对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

(3)真子集关系

对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 则集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

三、集合的运算

1. 交集

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合, 叫 A 与 B 的交集, 记作

$$A \cap B, \text{ 即 } A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

2. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 叫 A 与 B 的并集, 记作

$$A \cup B, \text{ 即 } A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

3. 补集

已知全集 I , 集合 A , 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫集合 A 在集合 I 中的补



集,记作 $\complement_I A$.

四、集合运算中常用的结论

1. 集合中的逻辑关系

(1) 交集的运算性质

$$A \cap B = B \cap A, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \cap I = A, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$

(2) 并集的运算性质

$$A \cup B = B \cup A, A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B, A \cup I = I, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$$

(3) 补集的运算性质

$$\complement_I(\complement_I A) = A, \complement_I \emptyset = I, \complement_I I = \emptyset, (\complement_I A) \cap A = \emptyset, A \cup (\complement_I A) = I$$

(4) 分配律与结合律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(5) 反演律(摩根法则)

$$\complement_I(A \cap B) = (\complement_I A) \cup (\complement_I B); \complement_I(A \cup B) = (\complement_I A) \cap (\complement_I B)$$

2. 由 n 个元素组成集合的个数

其子集个数有 2^n 个,非空子集个数有 $2^n - 1$ 个,真子集个数有 $2^n - 1$ 个,非空真子集个数有 $2^n - 2$ 个.

五、求解集合命题应注意事项

(1) 对于集合问题,首先要确定属于哪一类集合(数集、点集或某类图形)然后再确定处理此类问题的方法.

(2) 关于集合的运算,应把各参与运算的集合化简,然后进行运算.

(3) 空集是一个特殊的集合,是任何集合的子集,也是任何非空集合的真子集,在解题中应特别注意.

(4) 建立数形结合的解题意识.

题型归纳及思路提示

题型 1 集合的基本概念

【例 1.1】 已知 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 若 $1 \in A$, 求实数 a 的值.

【分析】 由 $1 \in A$ 可得 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1$ 或 $a^2+3a+3=1$, 分类求出 a 并进行检验确定 a 的值.

【详解】 因为 $1 \in A$, 所以 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1$ 或 $a^2+3a+3=1$.

(1) 若 $a+2=1$, 则 $a=-1$, 当 $a=-1$ 时, $a+2=a^2+3a+3=1$, 所以 $a=-1$ 不符合题意.

(2) 若 $(a+1)^2=1$, 则 $a=0$ 或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时, $a+2=2, (a+1)^2=1, a^2+3a+3=3$, 符合题意.



当 $a = -2$ 时, $(a+1)^2 = a^2 + 3a + 3 = 1$, 所以 $a = -2$ 不符合题意.

(3) 若 $a^2 + 3a + 3 = 1$, 则 $a = -1$ 或 $a = -2$.

由(1), (2)可知 $a = -1, a = -2$ 都不符合题意. 综上所述, 实数 a 的值为 0.

【评注】 求解过程中, 每类得出的 a 都必须检验是否满足集合元素的互异性, 这一点易被忽视.

【变式 1】 若 $A = \{1, 3, x\}, B = \{x^2, 1\}$, 且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 则这样的 x 的不同取值有 ()

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【分析】 由 $A \cup B = A$, 故 $B \subseteq A$, 利用子集的定义和集合元素的性质求解.

【详解】 由已知得 $B \subseteq A$, 所以 $x^2 \in A$, 又 $x^2 \neq 1$.

(1) $x^2 = 3$, 得 $x = \pm\sqrt{3}$, 都符合;

(2) $x^2 = x$, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 而 $x \neq 1$, 所以 $x = 0$.

综合(1), (2), 共有 3 个值. 故选 B.

【评注】 求解过程中一定要考虑全面, 同时要注意集合元素的互异性.

题型 2 集合间的基本关系

思路提示: (1) 判断两集合的关系常用两种方法: 一是化简集合, 从表达式中寻找两集合的关系; 二是用列举法表示各集合, 从元素中寻找关系;

(2) 已知两集合间的关系求参数时, 关键是将两集合间的关系转化为元素的关系, 进而转化为参数满足的关系, 解决这类问题常合理利用数轴、Venn 图帮助分析.

【例 1.2】 设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}, B = \{x | ax - 1 = 0\}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{5}$, 试判定集合 A 与 B 的关系.

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 组成的集合 C .

【分析】 (1) 先求集合 A , 由 $a = \frac{1}{5}$ 再求集合 B , 确定 A 与 B 的关系.

(2) 解方程 $ax - 1 = 0$, 建立 a 的关系式求 a , 从而确定集合 C .

【详解】 (1) 由 $x^2 - 8x + 15 = 0$, 得 $x = 3$ 或 $x = 5$, 所以 $A = \{3, 5\}$.

若 $a = \frac{1}{5}$, 由 $ax - 1 = 0$, 得 $\frac{1}{5}x - 1 = 0$, 即 $x = 5$, 所以 $B = \{5\}$, 所以 $B \subsetneq A$.

(2) 因为 $A = \{3, 5\}$, 又 $B \subseteq A$, 若 $B = \emptyset$, 则方程 $ax - 1 = 0$ 无解, 有 $a = 0$;

若 $B \neq \emptyset$, 则 $a \neq 0$, 由 $ax - 1 = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$, 所以 $\frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5$, 即 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a =$

$\frac{1}{5}$, 故 $C = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$.

【评注】 含参数的一元一次方程 $ax = b$ 解的确定.

当 $a \neq 0$ 时, 方程有唯一实数根 $x = \frac{b}{a}$;

当 $a = b = 0$ 时, 方程有无穷多解, 任意实数都是它的根;



当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程无根.

【变式 1】 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | p + 1 \leq x \leq 2p - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

【详解】 由 $x^2 - 3x - 10 \leq 0$, 得 $-2 \leq x \leq 5$, 欲使 $B \subseteq A$, 应有 (1) 当 $B \neq \emptyset$ 时, 即 $p + 1 \leq 2p - 1 \Rightarrow p \geq 2$.

由 $B \subseteq A$, 得 $\begin{cases} -2 \leq p + 1 \\ 2p - 1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq p \leq 3$, 所以 $2 \leq p \leq 3$.

(2) 当 $B = \emptyset$ 时, $p + 1 > 2p - 1$, 解得 $p < 2$.

由 (1), (2) 得 $p \leq 3$. 所以 p 的取值范围是 $p \leq 3$.

【评注】 由 $B \subseteq A$, 易忽略 $B = \emptyset$ (空集是任何集合的子集) 而考虑不全面导致失误.

题型 3 集合的运算

【例 1.3】 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中的元素个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】 考查集合的元素个数问题.

【详解】 如图 1-1, 集合 M 表示以原点为圆心, 以 1 为半径的圆. 集合 N 表示顶点为原点, 开口向上的抛物线. 故 $M \cap N$ 可表示为两个交点. 故选 B.

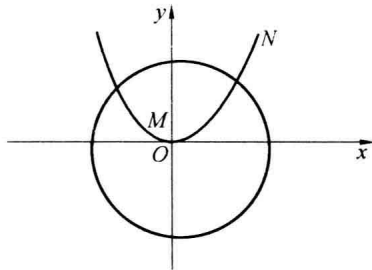


图 1-1

【评注】 凡是遇到集合问题, 首先要确定属于哪一类集合, 是表示点集还是表示数集. 如集合 $M = \{y | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N = \emptyset$.

【例 1.4】 设集合 $A = \{x | 2x + 1 < 3\}$, $B = \{x | -3 < x < 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

A. $\{x | -3 < x < 1\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$
C. $\{x | x > -3\}$ D. $\{x | x < 1\}$

【分析】 凡是遇到集合为数集时, 集合的运算多用数轴解决.

【详解】 集合 A, B 在数轴上表示为(图 1-2)

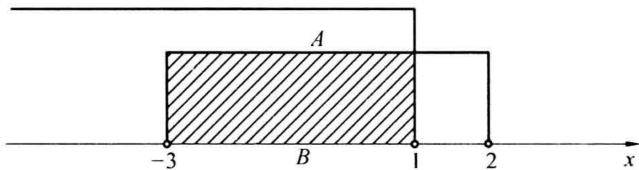


图 1-2

$A \cap B = \{x | -3 < x < 1\}$. 故选 A.

【评注】 利用数形结合的方法解集合运算题.

【变式 1】 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 那么集合 $A \cap (\complement_U B)$ 等于 ()



A. $\{x|-2 \leq x < 4\}$ B. $\{x|x \leq 3 \text{ 或 } x \geq 4\}$

C. $\{x|-2 \leq x < -1\}$ D. $\{x|-1 \leq x \leq 3\}$

【详解】 $\complement_U B = \{x|-1 \leq x \leq 4\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{x|-1 \leq x \leq 3\}$. 故选 D.

【变式 2】 已知集合 $M = \{x|\frac{x+3}{x-1} < 0\}$, $N = \{x|x \leq -3\}$, 则集合 $\{x|x \geq 1\} = (\quad)$

A. $M \cap N$ B. $M \cup N$ C. $\complement_{\mathbf{R}}(M \cap N)$ D. $\complement_{\mathbf{R}}(M \cup N)$

【详解】 方法 1: $M = \{x|-3 < x < 1\}$, $N = \{x|x \leq -3\}$, 则 $\{x|x \geq 1\} = \complement_{\mathbf{R}}(M \cup N)$. 故选 D.

方法 2: $M = \{x|-3 < x < 1\}$, $\complement_{\mathbf{R}} M = \{x|x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3\}$, $N = \{x|x \leq -3\}$, $\complement_{\mathbf{R}} N = \{x|x > -3\}$, $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \{x|x \geq 1\}$, 根据反演律得 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \complement_{\mathbf{R}}(M \cup N)$. 故选 D.

【例 1.5】 设 U 为全集, M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集为 $M - P = \{x|x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 则 $M - (M - P)$ 等于 (\quad)

A. P B. $M \cap P$ C. $M \cup P$ D. M

【分析】 本题利用题目中所给定义, $M - P = M \cap \complement_U P$ 解题.

【详解】 根据题意作文氏图解题, 如图 1-3 所示.

$$M - (M - P) = M \cap \complement_U (M \cap \complement_U P)$$

故选 B.

【评注】 利用交、并、补的概念, 凡是遇到抽象的集合运算题都可利用文氏图求解.

【例 1.6】 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} (k \geq 2)$, 其中 $a_i \in \mathbf{Z} (i = 1, 2, \dots, k)$, 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a + b \in A\}$, $T = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a - b \in A\}$. 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n . 若对于任意的 $a \in A$, 总有 $-a \in A$, 则称集合 A 具有性质 P .

(1) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T .

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$.

(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

【详解】 (1) 集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 不具有性质 P , 集合 $\{-1, 2, 3\}$ 具有性质 P . 其相应的集合 S 和 T 是 $S = \{(-1, 3), (3, -1)\}$, $T = \{(2, -1), (2, 3)\}$.

(2) 首先, 由 A 中元素构成的有序数对 (a_i, a_j) 共有 k^2 个.

因为 $0 \notin A$, 所以 $(a_i, a_i) \notin T (i = 1, 2, \dots, k)$; 又因为当 $a \in A$ 时, $-a \notin A$ 时, 所以当 $(a_i, a_j) \in T$ 时, $(a_j, a_i) \notin T (i, j = 1, 2, \dots, k)$. 从而, 集合 T 中元素的个数最多为 $\frac{1}{2}(k^2 - k) = \frac{k(k-1)}{2}$, 即 $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$.

(3) $m = n$, 证明如下.

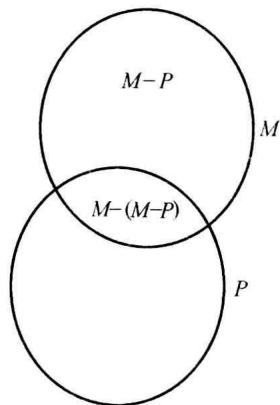


图 1-3



①对于 $(a, b) \in S$, 根据定义, $a \in A, b \in A$, 且 $a+b \in A$, 从而 $(a+b, b) \in T$.

如果 (a, b) 与 (c, d) 是 S 的不同元素, 那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立, 从而 $a+b=c+d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立. 故 $(a+b, b)$ 与 $(c+d, d)$ 也是 T 的不同元素. 可见, S 中元素的个数不多于 T 中元素的个数, 即 $m \leq n$.

②对于 $(a, b) \in T$, 根据定义, $a \in A, b \in A$, 且 $a-b \in A$, 从而 $(a-b, b) \in S$. 如果 (a, b) 与 (c, d) 是 T 的不同元素, 那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立, 从而 $a-b=c-d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立, 故 $(a-b, b)$ 与 $(c-d, d)$ 也是 S 的不同元素. 可见, T 中元素的个数不多于 S 中元素的个数, 即 $n \leq m$, 由①, ②可知, $m=n$.

第二章 函数

第 1 节 映射与函数

知识点精讲

一、基本概念

1. 映射

设 A, B 是两个非空集合, 如果按照某种对应法则 f , 对 A 中的任何一个元素 x , 在 B 中有且仅有一个元素 y 与 x 对应, 则称 f 是集合 A 到集合 B 的映射.

2. 象与原象

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射, 那么与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫 a 的象, 记作 $b=f(a)$, a 叫 b 的原象. A 的象记为 $f(A)$.

3. 一一映射

设 A, B 是两个集合, f 是 A 到 B 的映射, 在这个映射下, 对于集合 A 中的不同元素, 在集合 B 中都有不同的象, 且集合 B 中的任意一个元素都有唯一的原象, 那么这个映射叫 $f: A \rightarrow B$ 的一一映射.

4. 函数

设 A, B 是两个非空数集, 如果按照某个确定的对应法则 $f: A \rightarrow B$, 那么从 A 到 B 的映射就叫函数. 记作 $y=f(x)$, 其中 $x \in A, y \in B$, 原象集合 A 叫函数的定义域, 象集合 B 叫函数的值域.

5. 构成函数的两要素

- (1) 两要素是指: 定义域、对应法则;
- (2) 两要素中只要有一个不同, 就是不同的函数;
- (3) 两要素都相同的两个函数是同一个函数.

题型归纳及思路提示

题型 1 映射与函数的概念

思路提示: 判断一个对应是不是映射, 应紧扣映射的定义, 即在对应法则 f 下, 对于集合 A 中的任一元素在 B 中都有唯一的象. 判断一个对应是否能构成函数, 应判断

- (1) 集合 A 与 B 是否为非空数集;
- (2) $f: A \rightarrow B$ 能否为一个映射.



【例 2.1】 在对应法则“ f ”下,给出下列从集合 A 到集合 B 的对应.

(1) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x}$.

(2) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{Z}, f: x \rightarrow y = (-1)^x$.

(3) $A = \{x | x \text{ 是平面内的三角形}\}, B = \{y | y \text{ 是平面内的圆}\}, f: x \rightarrow y$ 是 x 的外接圆.

(4) 设集合 $A = \{x | x \text{ 是平面内的圆}\}, B = \{y | y \text{ 是平面内的矩形}\}, f: x \rightarrow y$ 是 x 的内接矩形.

其中能构成映射的是_____.

【分析】 判断一个对应是不是映射,应紧扣映射的定义,即在对应法则 f 下,对于集合 A 中的任一元素在 B 中是否都有唯一的象.

【详解】 在(1)中,元素“0”在 B 中没有象,不满足“任意性”,因此,(1)不能构成映射.

在(2)中,当 x 为偶数时,其象为 1;当 x 为奇数时,其象为 -1 ,而 $1, -1 \in B$,即 A 中任一元素在 B 中都有唯一的象.因此,(2)能构成映射.

在(3)中,因为任一三角形都有唯一的外接圆,所以(3)能构成映射.

在(4)中,因为平面内的任一个圆,其内接矩形有无数个,因此,(4)不能构成映射.综上所述,能构成映射的有(2)(3).

【评注】 判断一个对应是否能构成映射,应紧扣映射定义,在映射 $f: A \rightarrow B$ 中, A, B 的地位是不对等的,它并不要求 B 中元素均有原象,或有原象也未必唯一.一般地,若 A 中元素的象的集合为 C ,则 $C \subseteq B$. 同时要注意映射中的集合元素的对象是任意的,可以是数集、点集或其他任意对象.

【变式 1】 若 $f: A \rightarrow B$ 构成映射,下列说法正确的是()

- ① A 中任一元素在 B 中必须有象且唯一;
 - ② B 中的多个元素可以在 A 中有相同的原象;
 - ③ B 中的元素可以在 A 中无原象;
 - ④ 象的集合就是集合 B .
- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②③④

【详解】 由映射的定义可知,①集合 A 中任一元素在 B 中必须有象且唯一是正确的.集合 A 中的元素的任意性与集合 B 中元素的唯一性构成映射的核心,显然②不正确,“一对多”不是映射;③正确;④不正确,象的集合是集合 B 的子集,并非就为集合 B . 故选 C.

【例 2.2】 图 2-1 的四个图象中,是函数图象的是()

- A. (1) B. (1)(3)(4) C. (1)(2)(3) D. (3)(4)

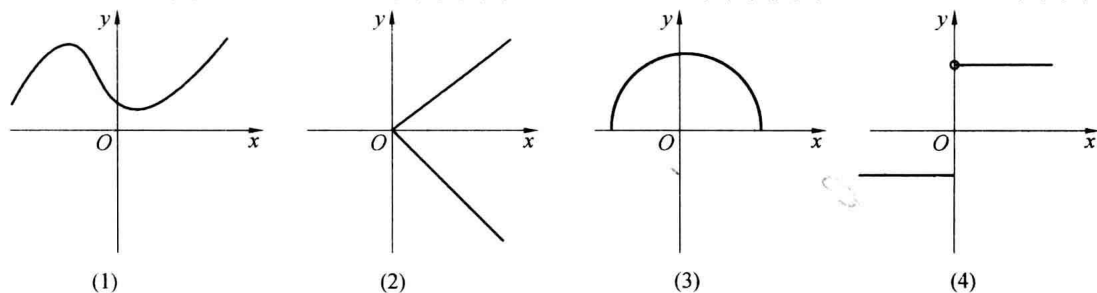


图 2-1