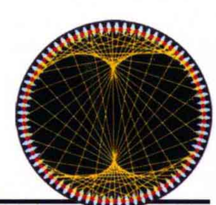
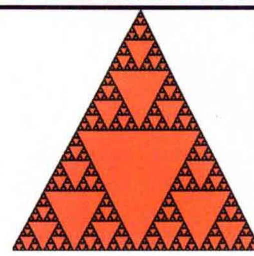
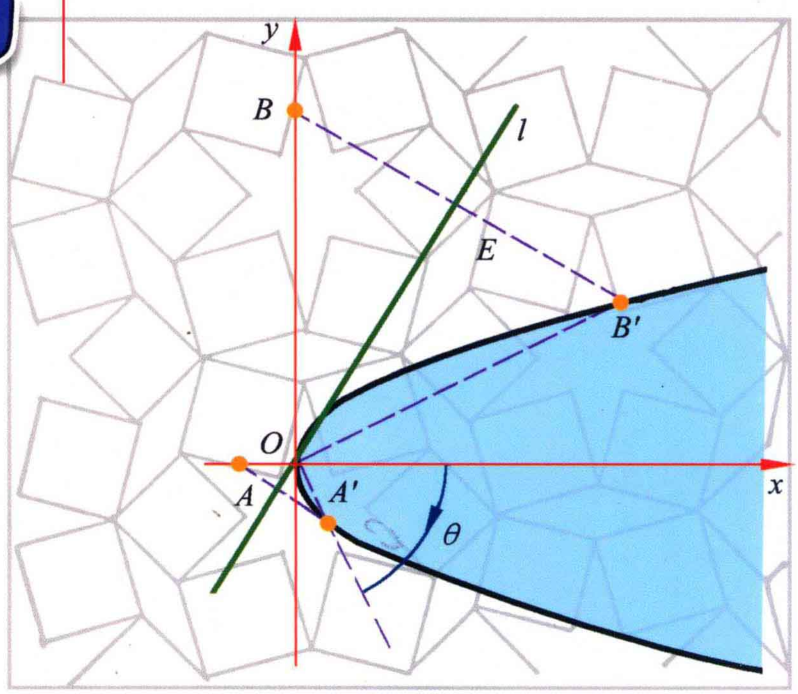
新编中学数学解题方法全书



（高考复习卷）



张永辉 主编



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

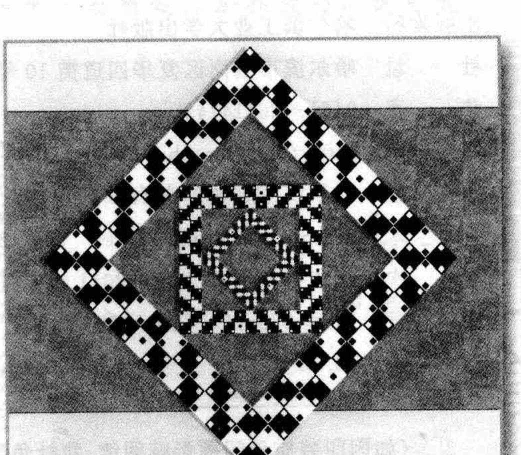
新编 中学数学

解题方法全书

（高考复习卷）

主　编　张永辉

副主编　徐宣庆　张尚仁　邓　杨　张春丽



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书为快速提高考生的解题水平和技巧而编写的应试用书.本书从历年的高考真题和国内外的书刊资料中筛选重要题型,归纳并总结各种题型的解题方法和技巧,开阔考生的视野,提高考生的解题速度.

本书适合高中师生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书.高考复习卷/张永辉主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.1(2011.6月重印)

ISBN 978-7-5603-2988-8

Ⅰ.①新… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 014729 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 880mm×1230mm 1/16 印张 28.5 字数 690 千字
版　　次 2010 年 2 月第 1 版 2011 年 6 月第 3 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2988-8
定　　价 48.00 元

前　言

高考数学复习该抓什么？众所周知该抓基础——基本理论、基本概念、基本运算；该抓解题方法和技巧．后者如何抓？许多人主张多做题，“熟读唐诗三百首，不会做诗也能吟”．诚然，多做题不失为一种方法，但不是捷径．我们认为最有效的方法是抓题型，从历年的高考真题和国内外的书刊资料中通过认真分析，筛选出重要题型，然后归纳总结出各种题型的解题方法和技巧，才能使广大考生在复习数学时起到事半功倍、举一反三、触类旁通的效果．

本书就是出于快速提高考生的解题水平和技巧编写的应试图书．本书有如下特点：

（1）遴选题型精当，具有典型性、代表性，有一定的难度、广度，与高考大纲（或复习说明）吻合；

（2）针对题型精选的例题所作的详尽分析、解答对考生很有启发性，尤其是“评注”部分，寥寥数语的点睛之笔，起到拨云见日、开阔视野的作用；

（3）介绍讲解至今辅导书上所没有的一些解题方法和技巧，这可大大提高考生的解题速度．

编者

2009 年 9 月

目　录

第三章 三角函数 …………………………… 86

第四章 平面向量 ………………………… 142

第五章 数列 ……………………………… 159

第一章　集合

知识点精讲

一、集合有关概念

1. 某些指定对象的部分或全体就成为一个集合

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象外，还可以是其他对象．

2. 集合元素的特征

(1)确定性：集合的元素必须是确定的，任何一个对象都能明确判断出它是否为该集合的元素．

(2)互异性：集合中任何两个元素都是不相同的，即同一个元素在同一个集合中不能重复出现．

(3)无序性：集合与组成它的元素的顺序无关．

二、集合与集合的关系

1. 元素和集合之间的关系

有属于“$\in$”和不属于“$\notin$”两种．

2. 集合与集合之间的关系

(1)包含关系

子集：如果对任意 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集．记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，显然 $A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$.

(2)相等关系

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(3)真子集关系

对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

三、集合的运算

1. 交集

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫 A 与 B 的交集，记作

$$A\cap B，即 A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}$$

2. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫 A 与 B 的并集，记作

$$A\cup B，即 A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$$

3. 补集

已知全集 I，集合 A，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫集合 A 在集合 I 中的补

集,记作 $\complement_I A$.

四、集合运算中常用的结论

1. 集合中的逻辑关系

(1)交集的运算性质

$$A\cap B=B\cap A,A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B,A\cap I=A,A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing$$

(2)并集的运算性质

$$A\cup B=B\cup A,A\cup B\supseteq A,A\cup B\supseteq B,A\cup I=I,A\cup A=A,A\cup\varnothing=A$$

(3)补集的运算性质

$$\complement_I(\complement_I A)=A,\complement_I\varnothing=I,\complement_I I=\varnothing,(\complement_I A)\cap A=\varnothing,A\cup(\complement_I A)=I$$

(4)分配律与结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

(5)反演律(摩根法则)

$$\complement_I(A\cap B)=(\complement_I A)\cup(\complement_I B);\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$$

2. 由 n 个元素组成集合的个数

其子集个数有 2^n 个,非空子集个数有 2^n-1 个,真子集个数有 2^n-1 个,非空真子集个数有 2^n-2 个.

五、求解集合命题应注意事项

(1)对于集合问题,首先要确定属于哪一类集合(数集、点集或某类图形)然后再确定处理此类问题的方法.

(2)关于集合的运算,应把各参与运算的集合化简,然后进行运算.

(3)空集是一个特殊的集合,是任何集合的子集,也是任何非空集合的真子集,在解题中应特别注意.

(4)建立数形结合的解题意识.

题型归纳及思路提示

题型 1 集合的基本概念

【例 1.1】 已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,若 $1\in A$,求实数 a 的值.

【分析】 由 $1\in A$ 可得 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1$ 或 $a^2+3a+3=1$,分类求出 a 并进行检验确定 a 的值.

【详解】 因为 $1\in A$,所以 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1$ 或 $a^2+3a+3=1$.

(1)若 $a+2=1$,则 $a=-1$,当 $a=-1$ 时,$a+2=a^2+3a+3=1$,所以 $a=-1$ 不符合题意.

(2)若 $(a+1)^2=1$,则 $a=0$ 或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时,$a+2=2,(a+1)^2=1,a^2+3a+3=3$,符合题意.

当 $a=-2$ 时，$(a+1)^2=a^2+3a+3=1$，所以 $a=-2$ 不符合题意．

(3)若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$ 或 $a=-2$.

由(1)，(2)可知 $a=-1$，$a=-2$ 都不符合题意．综上所得，实数 a 的值为 0.

【评注】 求解过程中，每类得出的 a 都必须检验是否满足集合元素的互异性，这一点易被忽视．

【变式 1】 若 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则这样的 x 的不同取值有(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

【分析】 由 $A\cup B=A$，故 $B\subseteq A$，利用子集的定义和集合元素的性质求解．

【详解】 由已知得 $B\subseteq A$，所以 $x^2\in A$，又 $x^2\neq 1$.

(1)$x^2=3$，得 $x=\pm\sqrt{3}$，都符合；

(2)$x^2=x$，得 $x=0$ 或 $x=1$，而 $x\neq 1$，所以 $x=0$.

综合(1)，(2)，共有 3 个值. 故选 B.

【评注】 求解过程中一定要考虑全面，同时要注意集合元素的互异性．

题型 2　集合间的基本关系

思路提示： (1)判断两集合的关系常用两种方法：一是化简集合，从表达式中寻找两集合的关系；二是用列举法表示各集合，从元素中寻找关系；

(2)已知两集合间的关系求参数时，关键是将两集合间的关系转化为元素的关系，进而转化为参数满足的关系，解决这类问题常合理利用数轴、Venn 图帮助分析．

【例 1.2】 设 $A=\{x\,|\,x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x\,|\,ax-1=0\}$.

(1)若 $a=\frac{1}{5}$，试判定集合 A 与 B 的关系．

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 组成的集合 C.

【分析】 (1)先求集合 A，由 $a=\frac{1}{5}$ 再求集合 B，确定 A 与 B 的关系．

(2)解方程 $ax-1=0$，建立 a 的关系式求 a，从而确定集合 C.

【详解】 (1)由 $x^2-8x+15=0$，得 $x=3$ 或 $x=5$，所以 $A=\{3,5\}$.

若 $a=\frac{1}{5}$，由 $ax-1=0$，得 $\frac{1}{5}x-1=0$，即 $x=5$，所以 $B=\{5\}$，所以 $B\subsetneqq A$.

(2)因为 $A=\{3,5\}$，又 $B\subseteq A$，若 $B=\varnothing$，则方程 $ax-1=0$ 无解，有 $a=0$；

若 $B\neq\varnothing$，则 $a\neq 0$，由 $ax-1=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，所以 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$，即 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{5}$，故 $C=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$.

【评注】 含参数的一元一次方程 $ax=b$ 解的确定．

当 $a\neq 0$ 时，方程有唯一实数根 $x=\frac{b}{a}$；

当 $a=b=0$ 时，方程有无穷多解，任意实数都是它的根；

当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，方程无根.

【变式 1】 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x\mid p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

【详解】 由 $x^2-3x-10\leqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 5$，欲使 $B\subseteq A$，应有(1)当 $B\neq\varnothing$ 时，即 $p+1\leqslant 2p-1\Rightarrow p\geqslant 2$.

由 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}-2\leqslant p+1\\ 2p-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow -3\leqslant p\leqslant 3$，所以 $2\leqslant p\leqslant 3$.

(2)当 $B=\varnothing$ 时，$p+1>2p-1$，解得 $p<2$.

由(1)，(2)得 $p\leqslant 3$. 所以 p 的取值范围是 $p\leqslant 3$.

【评注】 由 $B\subseteq A$，易忽略 $B=\varnothing$（空集是任何集合的子集）而考虑不全面导致失误.

题型 3 集合的运算

【例 1.3】 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中的元素个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

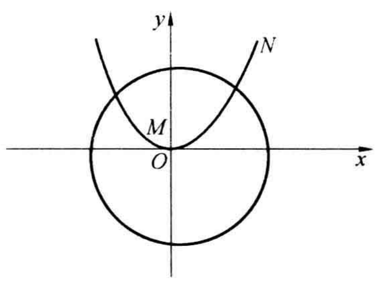


图 1-1

【分析】 考查集合的元素个数问题.

【详解】 如图 1-1，集合 M 表示以原点为圆心，以 1 为半径的圆. 集合 N 表示顶点为原点，开口向上的抛物线. 故 $M\cap N$ 可表示为两个交点. 故选 B.

【评注】 凡是遇到集合问题，首先要确定属于哪一类集合，是表示点集还是表示数集. 如集合 $M=\{y\mid x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=\varnothing$.

【例 1.4】 设集合 $A=\{x\mid 2x+1<3\}$，$B=\{x\mid -3<x<2\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A. $\{x\mid -3<x<1\}$　　B. $\{x\mid 1<x<2\}$

C. $\{x\mid x>-3\}$　　D. $\{x\mid x<1\}$

【分析】 凡是遇到集合为数集时，集合的运算多用数轴解决.

【详解】 集合 A,B 在数轴上表示为(图 1-2)

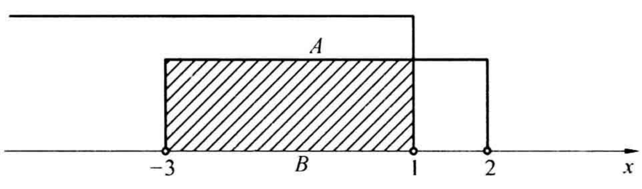


图 1-2

$A\cap B=\{x\mid -3<x<1\}$. 故选 A.

【评注】 利用数形结合的方法解集合运算题.

【变式 1】 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，那么集合 $A\cap(\complement_U B)$ 等于(　　)

A. $\{x\mid -2\leqslant x<4\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<-1\}$　　D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

【详解】 $\complement_U B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$. 故选 D.

【变式 2】 已知集合 $M=\{x\mid \frac{x+3}{x-1}<0\}$，$N=\{x\mid x\leqslant -3\}$，则集合 $\{x\mid x\geqslant 1\}=$（　　）

A. $M\cap N$　　B. $M\cup N$　　C. $\complement_{\mathbf{R}}(M\cap N)$　　D. $\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$

【详解】 方法 1：$M=\{x\mid -3<x<1\}$，$N=\{x\mid x\leqslant -3\}$，则 $\{x\mid x\geqslant 1\}=\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$. 故选 D.

方法 2：$M=\{x\mid -3<x<1\}$，$\complement_{\mathbf{R}}M=\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3\}$，$N=\{x\mid x\leqslant -3\}$，$\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid x>-3\}$，$(\complement_{\mathbf{R}}N)\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\{x\mid x\geqslant 1\}$，根据反演律得 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$. 故选 D.

【例 1.5】 设 U 为全集，M，P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$ 等于（　　）

A. P　　B. $M\cap P$　　C. $M\cup P$　　D. M

【分析】 本题利用题目中所给定义，$M-P=M\cap\complement_U P$ 解题.

【详解】 根据题意作文氏图解题，如图 1-3 所示.

$$M-(M-P)=M\cap\complement_U(M\cap\complement_U P)$$

故选 B.

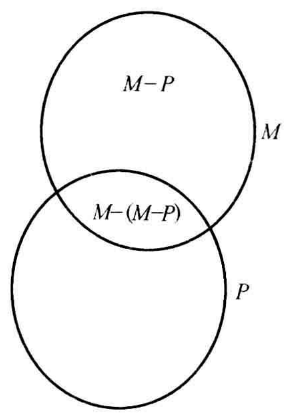


图 1-3

【评注】 利用交、并、补的概念，凡是遇到抽象的集合运算题都可利用文氏图求解.

【例 1.6】 已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$，由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a+b\in A\}$，$T=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a-b\in A\}$. 其中 (a,b) 是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

(1)检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P，并对其中性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T.

(2)对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

(3)判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

【详解】 (1)集合 $\{0,1,2,3\}$ 不具有性质 P，集合 $\{-1,2,3\}$ 具有性质 P. 其相应的集合 S 和 T 是 $S=\{(-1,3),(3,-1)\}$，$T=\{(2,-1),(2,3)\}$.

(2)首先，由 A 中元素构成的有序数对 (a_i,a_j) 共有 k^2 个.

因为 $0\notin A$，所以 $(a_i,a_i)\notin T(i=1,2,\cdots,k)$；又因为当 $a\in A$ 时，$-a\notin A$ 时，所以当 $(a_i,a_j)\in T$ 时，$(a_j,a_i)\notin T(i,j=1,2,\cdots,k)$. 从而，集合 T 中元素的个数最多为 $\frac{1}{2}(k^2-k)=\frac{k(k-1)}{2}$，即 $n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

(3)$m=n$，证明如下.

①对于$(a,b)\in S$,根据定义,$a\in A$,$b\in A$,且$a+b\in A$,从而$(a+b,b)\in T$.
如果(a,b)与(c,d)是S的不同元素,那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立,从而$a+b=c+d$与$b=d$中也至少有一个不成立.故$(a+b,b)$与$(c+d,d)$也是T的不同元素.可见,S中元素的个数不多于T中元素的个数,即$m\leqslant n$.
②对于$(a,b)\in T$,根据定义,$a\in A$,$b\in A$,且$a-b\in A$,从而$(a-b,b)\in S$.如果(a,b)与(c,d)是T的不同元素,那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立,从而$a-b=c-d$与$b=d$中也至少有一个不成立,故$(a-b,b)$与$(c-d,d)$也是S的不同元素.可见,T中元素的个数不多于S中元素的个数,即$n\leqslant m$,由①,②可知,$m=n$.

第二章　函　数

第1节　映射与函数

知识点精讲

一、基本概念

1. 映射

设 A,B 是两个非空集合,如果按照某种对应法则 f,对 A 中的任何一个元素 x,在 B 中有且仅有一个元素 y 与 x 对应,则称 f 是集合 A 到集合 B 的映射.

2. 象与原象

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,那么与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫 a 的象,记作 $b=f(a)$,a 叫 b 的原象.A 的象记为 $f(A)$.

3. 一一映射

设 A,B 是两个集合,f 是 A 到 B 的映射,在这个映射下,对于集合 A 中的不同元素,在集合 B 中都有不同的象,且集合 B 中的任意一个元素都有唯一的原象,那么这个映射叫 $f:A\to B$ 的一一映射.

4. 函数

设 A,B 是两个非空数集,如果按照某个确定的对应法则 $f:A\to B$,那么从 A 到 B 的映射就叫函数.记作 $y=f(x)$,其中 $x\in A,y\in B$,原象集合 A 叫函数的定义域,象集合 B 叫函数的值域.

5. 构成函数的两要素

(1)两要素是指:定义域、对应法则;

(2)两要素中只要有一个不同,就是不同的函数;

(3)两要素都相同的两个函数是同一个函数.

题型归纳及思路提示

题型 1　映射与函数的概念

思路提示: 判断一个对应是不是映射,应紧扣映射的定义,即在对应法则 f 下,对于集合 A 的中任一元素在 B 中都有唯一的象.判断一个对应是否能构成函数,应判断

(1)集合 A 与 B 是否为非空数集;

(2)$f:A\to B$ 能否为一个映射.

【例 2.1】 在对应法则“f”下，给出下列从集合 A 到集合 B 的对应．

(1) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{R}, f: x \to y=\dfrac{1}{x}$.

(2) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{Z}, f: x \to y=(-1)^x$.

(3) $A=\{x \mid x$ 是平面内的三角形$\}$，$B=\{y \mid y$ 是平面内的圆$\}$，$f: x \to y$ 是 x 的外接圆.

(4) 设集合 $A=\{x \mid x$ 是平面内的圆$\}$，$B=\{y \mid y$ 是平面内的矩形$\}$，$f: x \to y$ 是 x 的内接矩形．

其中能构成映射的是__________．

【分析】 判断一个对应是不是映射，应紧扣映射的定义，即在对应法则 f 下，对于集合 A 中的任一元素在 B 中是否都有唯一的象．

【详解】 在(1)中，元素“0”在 B 中没有象，不满足“任意性”，因此，(1)不能构成映射．

在(2)中，当 x 为偶数时，其象为 1；当 x 为奇数时，其象为 -1，而 $1,-1\in B$，即 A 中任一元素在 B 中都有唯一的象．因此，(2)能构成映射．

在(3)中，因为任一三角形都有唯一的外接圆，所以(3)能构成映射．

在(4)中，因为平面内的任一个圆，其内接矩形有无数个，因此，(4)不能构成映射．

综上所述，能构成映射的有(2)(3).

【评注】 判断一个对应是否能构成映射，应紧扣映射定义，在映射 $f: A \to B$ 中，A, B 的地位是不对等的，它并不要求 B 中元素均有原象，或有原象也未必唯一．一般地，若 A 中元素的象的集合为 C，则 $C\subseteq B$. 同时要注意映射中的集合元素的对象是任意的，可以是数集、点集或其他任意对象．

【变式 1】 若 $f: A \to B$ 构成映射，下列说法正确的是(　　)

①A 中任一元素在 B 中必须有象且唯一；

②B 中的多个元素可以在 A 中有相同的原象；

③B 中的元素可以在 A 中无原象；

④象的集合就是集合 B.

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②③④

【详解】 由映射的定义可知，①集合 A 中任一元素在 B 中必须有象且唯一是正确的．集合 A 中的元素的任意性与集合 B 中元素的唯一性构成映射的核心，显然②不正确，“一对多”不是映射；③正确；④不正确，象的集合是集合 B 的子集，并非就为集合 B. 故选 C.

【例 2.2】 图 2-1 的四个图象中，是函数图象的是(　　)

A. (1)　　B. (1)(3)(4)　　C. (1)(2)(3)　　D. (3)(4)

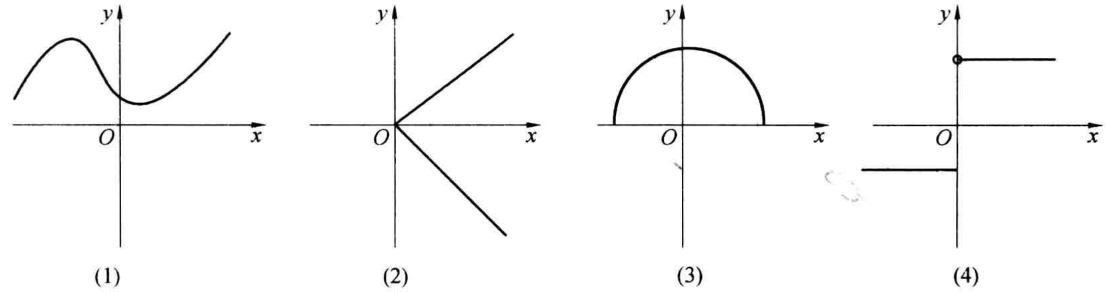


图 2-1