普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学（上册）

主 编 / 徐 晶

GAODENG
SHUXUE SHANGCE

西南交通大學出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

（上册）

主　编　徐　晶
副主编　姚　君　张　健　吴　琦

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 徐晶主编. 一成都：西南交通大学出版社，2011.7
普通高等学校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-5643-1257-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 137370 号

普通高等学校"十二五"规划教材
高等数学
（上册）
主编　徐　晶

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	成都中铁二局永经堂印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	15.625
字　　数	387 千字
版　　次	2011 年 7 月第 1 版
印　　次	2011 年 7 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1257-2
定　　价	39.50 元

前 言

高等数学是理工科高等院校的一门重要的基础课，也是工科院校硕士研究生入学考试的必考科目。它以经典微积分为主要内容。通过高等数学的学习，既可以初步掌握数学的基本功能，能够对已知规律进行数学描述，打下建立数学模型的基础，并能获得通过数学建模解决实际问题的能力。随着科学技术的迅速发展 ，高等学校各个专业对高等数学的要求不断提高，数学正在日益渗透到各个专业领域，已成为人们学习和研究各门专业知识的重要工具。掌握好高等数学的基础知识、基本理论及基本技能和分析方法，对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用。

本书的编写是以优化教学内容、加强基础、突出应用、提高学生素质、便于教学为原则，力求做到理论清晰、重点突出、知识要点明确、推理简明扼要、循序渐进、深入浅出，着重讲清基本概念、基本思想、基本方法，使学生在有限的时间内学习数学的精华，形成基本数学思想。会用数学方法解决数学以及相关学科的问题，使学生在学习数学思维方法以及运用数学知识解决实际问题的能力诸方面得到良好的训练与培养，促进学生不断提升知识、能力和素质，提高解决实际问题的能力。

本书的主要特色有：

（1）注重概念的引入，以学生容易理解的实例引入概念，即强调发散和归纳思维，从实际问题出发，导出一般结论。并力求从几何、数值、代数的方法来解释概念。

（2）注重数学思想的渗透以及数学方法的介绍， 体现学习数学的思想，即学习怎样将实际问题归结为数学问题，注重培养学生分析问题、解决问题的能力。

（3）注重数学的应用和数学建模，通过建立简单的模型提高学生解决实际问题的能力。

（4）每节安排的例题与后面的练习题和所学内容互相呼应。每章后配有一套总习题，供学生强化全章知识、综合使用所学知识并检测学习情况。通过有针对性的学习，学生能巩固所学知识。

本书的第一章、第五章由黑龙江科技学院徐晶编写，第三章、第六章由黑龙江科技学院姚君编写，第二章、第四章由哈尔滨理工大学荣成校区张健编写，第七章由东北农业大学成栋学院吴琦编写；本书由徐晶担任主编，姚君、张健、吴琦担任副主编。在本书编写过程中，杨磊组织了编者间协调和校对工作，一些同仁在编写中做了大量协助工作，在此谨向他们致以由衷的谢意。

本书的每一章节的内容都经过全体编写人员的充分讨论，浓缩了各位教师的经验和智慧。不过世界上没有完美的事物，教材中难免有疏漏之处，敬请同行、专家和读者指出，全体编写人员在此表示诚挚的感谢！

编　者

2011 年 5 月

目 录

第一章　一元函数的极限与连续

高等数学研究的对象是函数，而研究函数的基本方法是极限方法．极限方法是利用有限描述无限、由近似过渡到精确的一种工具和过程．本章首先简要总结函数的概念及其性质，然后介绍函数的极限和连续性等概念，以及它们的一些性质．

第一节　函　数

一、函数的概念

1．区间与邻域

区间是指介于某两点之间线段上的点的全体，是高等数学中最常用的一类实数集．区间包括有限区间和无限区间．

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，实数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

类似的，可以定义以 a,b 为端点的闭区间 $[a,b]$ 和半开区间 $[a,b),(a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},\ [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},\ (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

以上这几类区间统称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度．从数轴上看，这些有限区间均是长度为有限的线段（见图 1.1）．

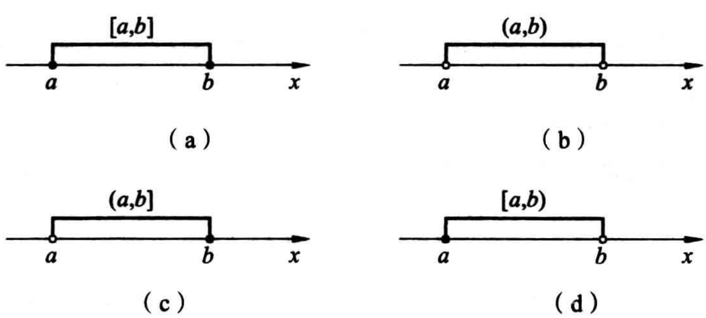

图 1.1

此外还有无限区间，为此需引进记号“$+\infty$”与“$-\infty$”，依次读作“正无穷大”与“负无穷大”．因此对 $a\in\mathbf{R}$，有

$$[a,+\infty)=\{x|x \geqslant a\}，\ (a,+\infty)=\{x|x>a\}$$

$$(-\infty,a]=\{x|x \leqslant a\}，\ (-\infty,a)=\{x|x<a\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x \in \mathbf{R}\}$$

有限区间和无限区间统称为区间. 以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是否是有限区间还是无限区间的场合，就简单的称它们为“区间”，且常用 I 表示.

邻域是一种常见的集合. 设 $a \in \mathbf{R}$，$\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称作点 a 的 δ **邻域**，记做 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径（见图 1.2）.

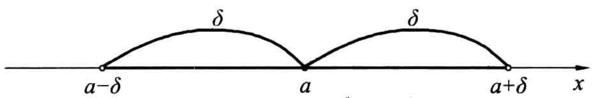

图 1.2

点 a 的去心 δ 邻域是指去掉邻域的中心后所得到的集合，记做 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

并将开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，将开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域(见图 1.3).

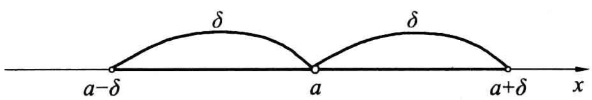

图 1.3

两个闭区间 $[a,b],[c,d]$ 的直积记做 $[a,b]\times[c,d]$，即

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$$

它表示平面上的矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别是闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

2. 函数的定义

现实生活中的许多事物每时每刻都在发生着变化，然而这些变化中的很多现象都可以用数学来进行有效的描述. 其中有些变化着的现象中存在着两个变化的量，简称为变量. 它们不是彼此孤立的，而是相互联系的. 请看下面的例子.

例 1 在自由落体运动过程中，物体下落的位移 s 与时间 t 之间有关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T]$$

其中 T 是落地时间. 当时间 t 在区间 $[0,T]$ 内任取一个数值时，利用上式就确定了一个 s 与之对应，上式也表明了变量 s 与 t 之间的关系.

例 2 某市出租汽车的收费标准为：乘车不超过 3 千米，收费 9 元；若超过 3 千米，超过的里程每千米加收 1.9 元.

乘客的乘车费用 P 与乘车里程 x 之间的数量关系是：

$$P=\begin{cases}9, & 0<x\leqslant 3\\ 9+1.9(x-3), & x>3\end{cases}$$

乘车里程 x 在其取值范围内任取一个数值，按照上式就有唯一一个确定的乘车费用 P 与之对应.

综上所述，当其中一个变量在某数集内取值时，按照一定的规则，另一个变量有唯一确定的值与之对应，变量之间的这种对应关系称为函数关系.

定义 1.1　设 x, y 是两个变量，D 是给定的非空数集，若对于每一个数 $x\in D$ 按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记做

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的**值域**，记做 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

上述定义简言之，函数就是从自变量的输入产生出输出值的一种法则或过程.

关于函数的定义，需做以下几点说明：

（1）表示函数的记号可以是任意选取的，除了常用的 f 外，还可以使用其他的英文字母或希腊字母，如 g, F, φ 等. 有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 同一个问题中，不同的函数应该用不同的记号来表示.

（2）确定函数的要素有两个：函数的定义域和对应法则. 函数的值域可以由定义域和法则所决定，因此它一般称为派生要素. 只要函数的定义域相同，对应法则相同，它们就是相同的函数，而与变量用什么字母或符号表示无关.

例 3　判断下列函数是否是相同的函数.

（1）$y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；　　（2）$y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$；

（3）$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　　（4）$y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解　因为（1）与（2）中两函数的定义域和对应法则两要素都相同，所以它们是相同的函数；而（3）与（4）两函数的定义域不同，所以它们是不同的函数.

（3）函数的定义域通常按以下两种情形确定：一种是对有实际背景的函数，根据背景中变量的实际意义确定. 如例 1 的自由落体运动中，定义域为下落时间 $[0,T]$. 另一种是对抽象地用算式表达的函数，函数的定义域常取使该算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的“自然定义域”或“存在域”. 如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 在这种情况下，函数的定义域可省略不写，而只用对应法则来表示函数，此时可简单地说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$.

（4）函数 $y=f(x)$ 给出了定义域 D 和值域之间的单值对应. 在函数的定义中，对每一个 $x\in D$，只能有唯一的一个函数值 y 与它对应，这样定义的函数称为**单值函数**. 若同一个 x 值可以对应多于一个的 y 值，则称这种函数为**多值函数**. 例如变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=1$ 给出. 当 x 取 $(-1,1)$ 内任何一值时，对应的 y 就有两个值与之对应，即 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，

所以这个方程确定了一个多值函数. 对于多值函数, 如果附加一些条件, 使得在附加条件下, 按照这个法则, 对每个 $x \in D$, 总有唯一确定的实数值 y 与之对应, 这样就确定了一个函数. 我们称这样得到的函数为多值函数的单值分支. 例如, 在由方程 $x^2+y^2=1$ 给出的对应法则中附加 $y \geqslant 0$ 的条件, 就可得到一个单值分支 $y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$. 在本书范围内, 我们只讨论单值函数.

例 4 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$;　　(2) $y=\ln(x^2+2x)+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

解 (1) 由题意可得

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ 4-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

则所求函数的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

(2) 由题意可得

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{2}\right| \leqslant 1 \\ x^2+2x>0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x>0 \text{ 或 } x<-2 \end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $(0,3]$

3. 函数的表示法

在中学课程里已经学过函数的三种表示法, 即解析法 (或称公式法)、列表法和图形法. 用一个或几个公式表示函数的方法即为解析法. 用函数图形表示函数的方法称为图形法. 这时坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x), x \in D$ 的图形. 将解析法和图形法相结合来研究函数, 可以将抽象函数具体化. 应该指出的是: 产生微积分的源泉除了物理背景外, 还有几何直观因素, 几何直观对于理解微积分的概念、方法和结论是很有用的.

例 5 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$, 它的图形如图 1.4 所示.

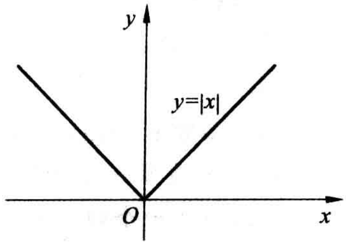

图 1.4

例 6 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.5 所示.

对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=|x|\operatorname{sgn}x$$

不难看出，例 2，例 5，例 6 具有这样的特征：对于自变量的不同取值，函数不能用一个式子表示，在定义域的不同部分需用不同的公式表达，这类函数通常称为**分段函数**. 在自然科学、工程技术和经济管理领域涉及的函数多属于分段函数这种形式.

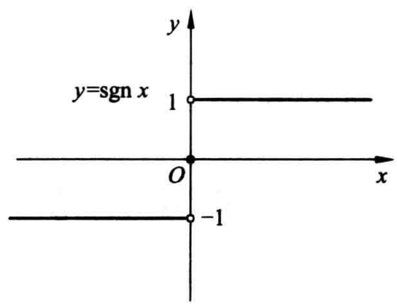

图 1.5

例 7　设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记做 $[x]$. 例如，$\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2.64]=-3$，$[-4]=-4$. 把 x 看作变量，则函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如阶梯形，故称为阶梯曲线（见图 1.6）. 在 x 为整数时，图形发生跳跃，跃度为 1.

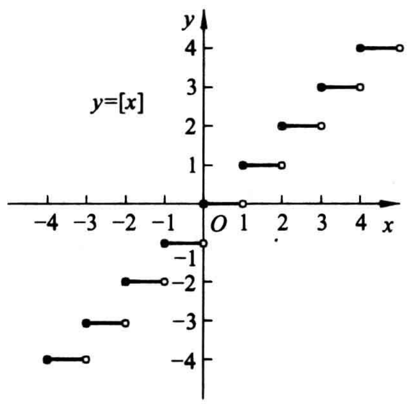

图 1.6

有些函数难以用解析法、列表法或图形法来表示，只能用语言来描述. 例如，

例 8　狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$，而且无法画出它的图形.

4. 函数的四则运算

设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域依次为 D_1,D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则可以定义这两个函数的下列运算：

和（差）$f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x), x\in D$；

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0,\ x\in D\}$.

若 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，则两个函数不能进行四则运算. 例如，设

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad x\in D_1=\{x||x|\leqslant 1\}$$

$$g(x)=\sqrt{x^2-4}, x\in D_2=\{x||x|\geqslant 2\}$$

由于 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，所以表达式 $f(x)+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-4}$ 是没有意义的.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一常数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**，而 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

根据定义，如果 K_1 为 $f(x)$ 在 X 上的上界，那么任何大于 K_1 的数也是 $f(x)$ 在 X 上的上界. 同理如果 K_2 为 $f(x)$ 在 X 上的下界，那么任何小于 K_2 的数也是 $f(x)$ 在 X 上的下界.

若函数 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 若函数 $f(x)$ 在其定义域上有界，则其函数图形介于两条直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

函数的有界性也可以用下述方式定义：

若存在正数 M，使得对任一 $x\in X$，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，M 即为 $f(x)$ 在 X 上的一个界. 很容易证明这两个定义是等价的.

例 9 判定下列函数在指定区间上的有界性.

（1） $y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$；（2） $y=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1), x\in[1,+\infty)$.

解 因为对任意的实数 x，都有

$$|\sin x|\leqslant 1$$

成立，因此函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 它的界 M 可以取 1，当然也可取任何大于 1 的正数.

（2）当 $x\in(0,1)$ 时，有

$$\frac{1}{x}\geqslant 1$$

成立，因此函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内有下界. 但是当 x 越靠近 0，函数值越大，因此找不到这样的正数 K_1，使得

$$\frac{1}{x}\leqslant K_1$$

成立，故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内没有上界．因此当 $x\in(0,1)$ 时 $y=\dfrac{1}{x}$ 无界.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$$

成立，因此函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例 9 表明，讨论函数是否有界必须先指明自变量所在的区间.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$．如果对于区间 I 上任何两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的（见图 1.7）（**单调减少**的（见图 1.8））.单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

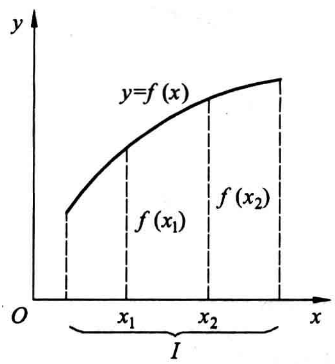

图 1.7

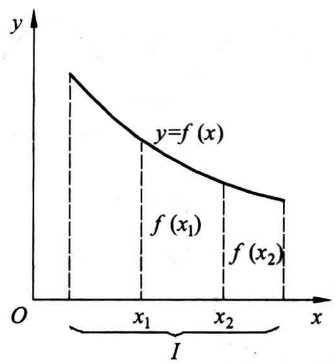

图 1.8

例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的（见图 1.9）．函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=x^2$ 不是单调的（见图 1.10）．因此讨论函数的单调性也必须先指明自变量所在的区间.

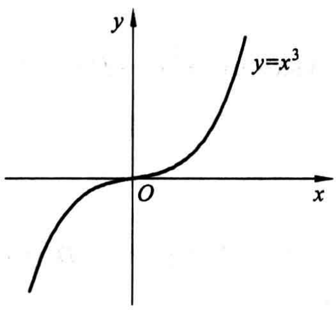

图 1.9

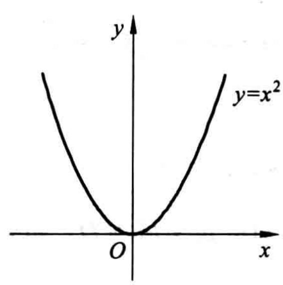

图 1.10

如何判断一个函数是否单调呢？这可以利用函数图形从直观上加以考察，也可以利用定义进行证明，但是这样做往往不容易. 那么能否给出判断函数是否单调的一种相当简便而又有效的方法呢？本书第三章就要解决这个问题.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称（见图 1.11），奇函数的图形关于原点对称（见图 1.12）

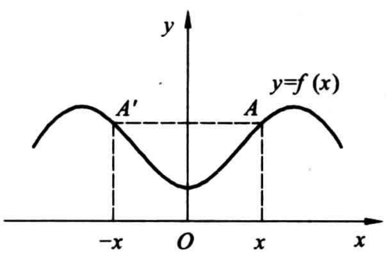

图 1.11

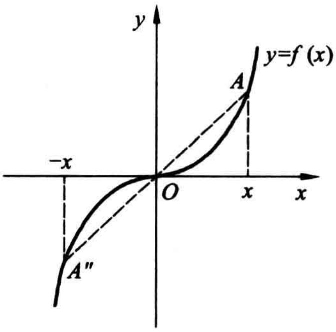

图 1.12

例 10 判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=2^x+2^{-x}$；（2） $f(x)=x+\cos x$；

（3） $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$；（4） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 这四个函数的定义域均关于原点对称，又

（1） $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x)$，所以该函数为偶函数；

（2） $f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x$，所以该函数为非奇非偶函数；

（3） $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{(-x)^2}=-\dfrac{\sin x}{x^2}=-f(x)$，所以该函数为奇函数；

（4） $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$，所以该函数为奇函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $x+l\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

值得注意的是，并不是每个周期函数都有最小正周期. 例如，常数函数 $y=C$，其中 C 是一确定的常数，是周期函数，但是它不存在最小正周期. 又例如，狄利克雷函数是周期函数，因为任何正有理数都是它的周期，但是它也不存在最小正周期.

由函数周期性的概念可知，周期为 l 的周期函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴每隔一个周期 l 重复一次，因此对于周期函数只需讨论其在一个周期上的性态，描绘其图形时只需做出一个周期上的图形，然后沿 x 轴向两端延伸即可（见图 1.13）.

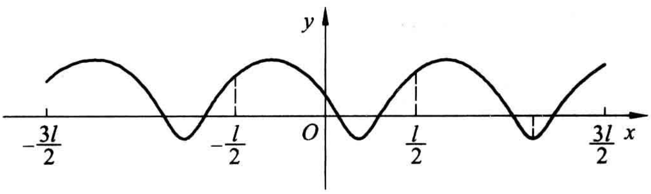

图 1.13

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

在某一问题中，有时两个变量之间的联系不是直接的，而是通过另一个变量间接取得联系. 例如，函数 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$. 因为 y 是 u 的函数，u 是 x 的函数，所以 y 最终是 x 的函数 $y=\sqrt{1+x^2}$. 这种将一个函数代入另一个函数的运算称为函数的“复合”运算.

一般的，设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=g(x)$ 的定义域为 D_g，记

$$D_{f\circ g}=\{x|g(x)\in D_f\}$$

若 $D_{f\circ g}\neq\varnothing$，则对每一个 $x\in D_{f\circ g}$，可通过函数 $g(x)$ 对应 D_f 内唯一一个值 u，而 u 又通过 $f(u)$ 对应唯一一个值 y. 这样就确定了一个定义在 $D_{f\circ g}$ 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记作

$$y=f[g(x)],\quad x\in D_{f\circ g}$$

称为函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 的**复合函数**. f 称为外函数，g 称为内函数，变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按“先 g 后 f”的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$$

不是任意两个函数都可以复合，只有函数 g 的值域与函数 f 的定义域的交集非空，即 $D_f\cap g(D_g)\neq\varnothing$ 才能进行复合. 例如，以 $y=f(u)=\arcsin u$，$u\in D_f=[-1,1]$ 为外函数，以 $u=g(x)=2+x^2$，$x\in D_g=\mathbf{R}$ 为内函数就不能进行复合. 这是因为外函数的定义域 $D_f=[-1,1]$ 与内函数的值域 $g(D_g)=[2,+\infty)$ 不相交.

复合函数也可以由多个函数相继复合而成. 例如，由三个函数 $y=\sin u, u=\sqrt{v}$ 与 $v=1-x^2$ 相继复合而得到的复合函数为 $y=\sin\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$.

例 11 求由下列所给函数构成的复合函数，并求复合函数的定义域.

（1） $y=\cos u, u=\ln x$；　　　　（2） $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=2x+3$.

解 （1）外函数 $y=\cos u$ 的定义域 D_f 为全体实数，内函数 $u=\ln x$ 的值域 $g(D_g)$ 也为全体实数，故两个函数可以复合. 两个函数构成的复合函数为 $y=\cos\ln x$，定义域为内函数的定义域 $(0,+\infty)$.

（2）函数 $u=\ln v$ 的定义域与函数 $v=2x+3$ 的值域的交集非空，因此，可以生成复合函数 $u=\ln(2x+3)$. 同样，函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域与复合函数 $u=\ln(2x+3)$ 的值域的交集也非空，因此三个函数生成的复合函数为 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$，其定义域为 $[-1,+\infty)$.

例 12 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 及 $f[f(x)]$.

解 分别用 $2,\dfrac{1}{x}, f(x)$ 替代 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 中的自变量 x，得

$$f(2)=\frac{1}{1-2}=-1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1} \quad (x\neq 0, x\neq 1)$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x} \quad (x\neq 0, x\neq 1)$$

2. 反函数

在函数的定义中，一个变量是自变量，一个变量是因变量. 但在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量并不是绝对的. 如例 1 的自由落体运动中，物体下落的位移 s 与时间 t 之间有关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T]$$

已知时间即可由上式得到位移. 但若已知位移求下落的时间，则应从上式中将 t 解出：

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

此时位移 s 为自变量，时间 t 为因变量.

这表明函数的自变量与因变量的地位在一定条件下可以相互转换. 这样得到的新函数称为原有函数的反函数.

设函数 $y=f(x)$，其值域为 R_f. 如果对于 R_f 中的每一个 y 值，都可以由 $y=f(x)$ 确定唯一的一个 x 值，则得到一个定义在 R_f 上的以 y 为自变量、x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 其定义域为 $y=f(x)$ 的值域 R_f，值域是 $y=f(x)$ 的定义域.

按照反函数的定义，反函数 f^{-1} 的对应法则完全由函数 f 的对应法则确定（见图 1.14）.