



新材料科学前沿研究丛书

Pulse Electric Current Sintering
of Ceramic Materials

陶瓷材料脉冲电流烧结技术

张东明 傅正义 著



武汉理工大学出版社
Wuhan University of Technology Press

新材料科学前沿研究丛书

陶瓷材料脉冲电流烧结技术

张东明 傅正义 著



武汉理工大学出版社

• 武汉 •

内 容 提 要

脉冲电流烧结技术是近二十年来发展起来的材料制备新技术之一,它是利用低电压、大的脉冲电流通过导电模具时产生的多重物理效应对材料进行烧结,具有非平衡烧结的特点。迄今为止,各国学者开展了大量研究,包括大量材料体系的脉冲电流烧结与制备,很多材料因此获得了优异性能。本书通过系统的理论阐述和实验证据,证明脉冲电流烧结存在电磁场及所诱发的高频电磁波的作用,并对电磁波的作用机制进行了分析。

本书所提供的研究结果及实验数据可供材料制备领域研究人员参考,也可供高等学校及科研院所材料科学与工程专业的研究生及学者在从事相关科研工作时借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

陶瓷材料脉冲电流烧结技术/张东明,傅正义著. —武汉:武汉理工大学出版社, 2012. 3

ISBN 978-7-5629-3696-1

I. 陶… II. ①张… ②傅… III. ①脉冲电流-烧结 IV. ①TM152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 030217 号

项目负责人:王兆国

责任校对:周中亮

出版发行:武汉理工大学出版社有限责任公司

网 址:<http://www.techbook.com.cn>

印 刷:湖北新华印务有限公司

印 张:7 插 页:1

版 次:2012 年 6 月第 1 版

印 数:1—2000

责任编辑:陈军东

装帧设计:翰之林

邮 编:430070

经 销:各地新华书店

开 本:787×960 1/16

字 数:137 千字

印 次:2012 年 6 月第 1 次印刷

定 价:29.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:027-87523148 87664138 87523238 87165708(传真)

· 版权所有 盗版必究 ·

前 言

脉冲电流烧结技术是近二十年来发展起来的材料制备新技术之一,它是利用低电压、大电流强度的脉冲电流通过导电模具时产生的多重物理效应对材料进行烧结,具有非平衡烧结的特点。迄今为止,各国学者对此开展了大量研究,包括大量材料体系的脉冲电流烧结与制备,很多材料因此获得了优异的性能。但该领域仍然有很多问题值得去研究,如:(1)对脉冲电流烧结机理的研究一直没有重大突破,常把脉冲电流烧结视为普通交流电的通电烧结或热压烧结;(2)对材料体系选择的的目的性不明确,一些材料体系的脉冲电流烧结效果与预期相差甚远,很多实验现象得不到合理解释,不利于脉冲电流烧结技术优势的发挥。

本书内容是在第一作者 2002 年博士论文的基础上,结合随后几年的研究工作成果整理出来的,重点探讨了脉冲电流烧结机理问题。本书通过电磁场空间分布与强度的计算结果,结合系统性的实验证据研究,认为脉冲电流烧结过程中存在电磁场的作用。在非导电材料的烧结过程中,随着烧结条件的改变,存在低频电磁场、石墨压头放电诱发的高频电磁波及电流焦耳热的综合作用;在导电材料的烧结过程中,依材料导电性及烧结进程的不同,可能存在低频电磁场、高频电磁波、颗粒间放电、模具焦耳热、颗粒连通后的电流热效应等复杂作用,但一般这些效应难以同时存在,并随着烧结进程的进行随时变化。正是上述复杂物理效应的存在,导致脉冲电流烧结具有非平衡烧结的特点。而脉冲电流烧结的非平衡性可以通过烧结参数的调控进行适当控制。

作者真诚希望本书的研究结果对从事材料制备领域的研究人员具有参考价值。在具体的实践过程中,可以针对不同的材料特性与预期目标,合理有效地利用脉冲电流烧结技术。

由于作者学识有限,也欢迎不同领域的广大读者根据自己的研究结果,以本书存在的问题与作者进行交流与讨论,共同完善脉冲电流烧结技术机理。

张东明 傅正义
2011 年 9 月

目 录

1 脉冲电流烧结技术研究现状	(1)
1.1 脉冲电流烧结装置与发展概述	(1)
1.2 脉冲电流烧结技术在材料制备中的应用	(3)
1.3 脉冲电流烧结机理的若干观点	(5)
1.4 本书的研究目的与思路	(8)
2 脉冲电流烧结的低频电磁场与高频电磁振荡分析	(11)
2.1 低频电磁场计算与讨论	(11)
2.2 高频电磁波的产生及其作用	(19)
3 脉冲电流烧结非导电陶瓷材料	(21)
3.1 脉冲电场的作用	(21)
3.2 脉冲磁场的作用	(37)
3.3 脉冲电场与脉冲磁场的综合作用	(41)
3.4 二次电磁波的作用	(49)
3.5 本章小结	(60)
4 脉冲电流烧结导电性陶瓷材料	(61)
4.1 高导电率 TiB_2 陶瓷的脉冲电流烧结	(62)
4.2 半导体 YSZ 陶瓷的脉冲电流烧结	(75)
4.3 SiC/Al 复合材料的脉冲电流烧结	(81)
4.4 本章小结	(94)
参考文献	(95)

1.1 脉冲电流烧结装置与发展概述

脉冲电流烧结(Pulsed Current Sintering, PCS)就是在模具或样品中直接施加大的脉冲电流,通过热效应或其他场效应以实现材料的烧结。脉冲电流烧结也称放电等离子烧结(Spark Plasma Sintering, SPS)或等离子活化烧结(Plasma Activated Sintering, PAS),其历史可追溯到 20 世纪 30 年代,当时“脉冲电流烧结技术”引入美国。后来日本研究了类似的但更为先进的技术——电火花烧结,并于 60 年代末获得专利^[1]。但由于缺少有关的应用技术,也没有解决与工业生产、设备造价及烧结效率有关的技术问题,所以一直没有得到广泛应用。1988 年,日本井上研究所研制出第一台脉冲电流烧结装置。该装置具有 5 吨的最大烧结压力,在材料研究领域获得应用。最近推出的脉冲电流烧结装置是这种技术的第三代产品,它能够产生 10~100 t 的最大烧结压力,可用于工业生产。由于解决了相关的技术问题,能够实现快速、低温、高效烧结,脉冲电流烧结制备技术已引起国际上材料科学与工程界的极大兴趣^[2-4]。目前世界上共有脉冲电流烧结装置数百台,如日本东北大学、大阪大学,美国加州大学,瑞典斯德哥尔摩大学,新加坡南洋理工大学等相继拥有脉冲电流烧结系统,并在材料制备与加工领域发挥重要作用。脉冲电流烧结引入我国只有十多年的时间,2000 年 6 月武汉理工大学购置国内首台脉冲电流烧结装置(SPS-1050),随后清华大学、北京理工大学和上海硅酸盐研究所也相继购置了脉冲电流烧结装置。

武汉理工大学购置的 SPS-1050 装置外观如图 1-1 所示,主要由两部分构成:脉冲电源发生器(右)和机械部分(左),其中脉冲电源发生器是将普通交流电转换为具有低电压、大电流的脉冲电流,如 SPS-1050 提供的脉冲电流,其最大输出电压不超过 15V,而最大输出电流可达近 5000A,并且通过波形整形,主要保留了正脉冲,负脉冲大部分消失,典型脉冲电流记录呈现出一定的规律性,将在第 2 章和第 3 章相关部分论述。机械部分包括:油压系统、真空系统,水冷系统,电力传输系统、真空烧结腔和控制系统。真空烧结腔示意图如图 1-2 所示。

SPS-1050 设备的主要参数为:

最大脉冲电流——5000A;

最大轴向压力——100kN;



图 1-1 脉冲电流烧结 (SPS-1050) 装置外观图

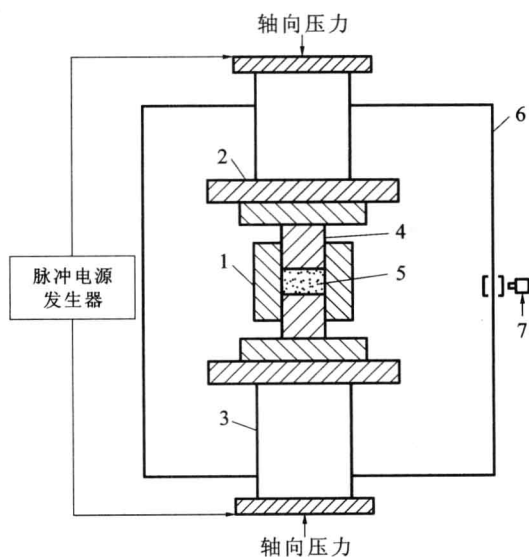


图 1-2 脉冲电流烧结装置简图

1—石墨模具; 2—石墨盘; 3—电极; 4—冲头; 5—粉末样; 6—真空室; 7—红外测温仪

最高烧结温度——2000℃；

真空度——6Pa。

1.2 脉冲电流烧结技术在材料制备中的应用

烧结是合成陶瓷、金属陶瓷、硬质材料等的必要途径。通过烧结,颗粒之间发生互扩散、固溶,甚至反应合成。主要烧结手段有真空烧结、气氛烧结、气压烧结、热压烧结(HP)、热等静压(HIP)、微波烧结、放电等离子烧结等。

热压烧结(HP)和热等静压(HIP)均属近平衡状态下的烧结。这种烧结从能量形式上说主要通过外加热场实现。颗粒在长时间的热场激发下,以颗粒表面能为驱动力自发地进行密实化过程,在该过程中同时伴随物质传输、晶界迁移等^[5]。热压烧结一般可以获得比较均匀的组织结构,但对活化反应合成、变温烧结等却比较困难。特别是长时间的烧结常使晶粒粗大,较难获得纳米材料或细晶粒材料。

微波烧结是一种快速烧结过程,它是利用微波电磁场与粉料相互作用,将电磁波能量转化为热能进行烧结。其电磁场对烧结粉料有活化作用,常能合成一些常规方法无法制备的材料。但由于微波电磁场场能分布的不均匀性,所合成的材料如控制不当,常出现结构不均匀。

放电等离子烧结是利用大的脉冲电流通过导电模具或样品对材料进行烧结,具有烧结时间短、烧结体密度高等特点。关于烧结机理目前还存在许多争议,但最新的一些实验结果显示了这种技术巨大的发展潜力。

1.2.1 纳米材料的烧结

由纳米粉体烧结成纳米块体材料是材料工作者长期以来追求的目标。由于纳米粉体极大的比表面积和很高的表面活性,多达数小时的常规热压烧结会导致晶粒长大,很难获得真正意义上的纳米块体材料。从晶粒生长动力学角度考虑,要求烧结过程在烧结活化能不变的前提下,尽量缩短烧结时间。脉冲电流烧结具有快速烧结的特点,有可能为烧结纳米材料提供一种有效途径。目前利用脉冲电流烧结已合成出 $\text{ZrO}_2\text{-}10\text{mol}\%\text{Al}_2\text{O}_3$ 块体,其基体粒径小于 100nm^[8];也合成出平均粒径小于 65nm 的 TiN ^[6],脉冲电流烧结 AlN 获得 0.43 μm 的晶粒组织^[9-10],脉冲电流烧结 Y-TZP 材料获得 0.1~0.2 μm 的晶粒^[13-15],脉冲电流烧结纳米 $\text{SiC-Al}_2\text{O}_3$ 复相陶瓷^[11-12] 和 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$ 复相陶瓷^[16] 也取得良好效果,而脉冲电流烧结 ZnO 基纳米复合材料的导电性显著提高^[7]。

1.2.2 梯度材料的烧结

梯度材料由于组分的梯度变化要求烧结温度梯度变化,传统烧结工艺中的均匀热场中难以获得这种条件。脉冲电流烧结过程可以利用梯形模具(如图 1-3 所示),产生电流密度的梯度变化,实现梯度材料的变温烧结。已有多个材料体系取得了良好的烧结效果,包括:不锈钢/ ZrO_2 系梯度材料^[17]; $\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 系梯度材料^[18]; TiAl/PSZ 系梯度材料^[19]; $\text{Cu}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Cu}$ 对称型梯度材料^[20]等。

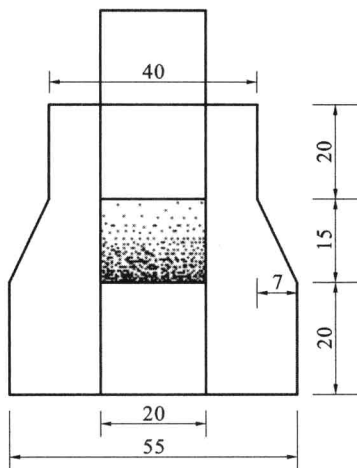


图 1-3 制备梯度材料用石墨模构造图

1.2.3 反应烧结

平衡条件下的均匀热场对某些材料体系无法实现反应烧结。例如 $\text{Ti}_2\text{AlC}/\text{Ti}_3\text{AlC}$ 是一种柔性陶瓷,采用热压烧结合成时需用 Ti 、 Al_4C_3 、 C 为原始粉料,反应合成温度在 $1400\sim 1600^\circ\text{C}$ ^[21]。如用 Ti 、 Al 、 C 为原料,因为 Al 的熔点为 650°C ,高温烧结时 Ti 将通过液相 Al 扩散至 C 表面,最终产物为 TiC 和 Al ,无法得到三元化合物。但用 SHS 方法却可以用 Ti 、 Al 、 C 为原料合成三元化合物 $\text{Ti}_2\text{AlC}/\text{Ti}_3\text{AlC}$ ^[22-23],这是因为 SHS 的合成反应仅发生在燃烧波前沿,局部高温不足以使其余部位的 Al 熔化, Ti 难以发生长距离扩散,因此 $\text{Ti}_2\text{AlC}/\text{Ti}_3\text{AlC}$ 可以在燃烧波前沿合成。最新研究表明脉冲电流烧结也能以 Ti 、 Al 、 C 为原料合成 $\text{Ti}_2\text{AlC}/\text{Ti}_3\text{AlC}$,显示出脉冲电流烧结与 SHS 在能量传播方式上的某些相似性和制备陶瓷新材料的能力。

另外,也利用脉冲电流反应合成了 $\text{TiB}_2\text{-Ti(CN)}$ ^[24]、 Mo-Si ^[25-26]、 Ti-W-Cr-B ^[27] 等。

1.2.4 其他应用

利用脉冲电流烧结技术也可以烧结其他类型的材料,包括:氧化物超导体 (YBCO)^[28]、 SiGe ^[29] 和 Mn-Si ^[30] 系热电材料, $(\text{Tb}_{0.5}\text{Dy}_{0.5})\text{Fe}_{1.8}/\text{Fe-6.5}\%\text{Si}$ 复相磁性材料^[31], Nb-Fe-Co-V-B ^[32] 磁性材料和 $\text{Fe}_{90}\text{Zr}_7\text{B}_3$ 非晶软磁合金^[33], Pb-TiO_3 ^[44] 和 BaTiO_3 ^[43] 铁电材料, Ni_2MnGa ^[41-42] 形状记忆合金, TiAl ^[34]、 $\text{Ti}_3\text{Al-Nb}$ ^[35]、 TiNi ^[36-37]、 TiAl_3 ^[38]、 Nb-Al ^[40]、 Cu-Co ^[39] 和 Co-Ti ^[72] 系金属间化合物, $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SiC}$ ^[45]、 $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{TiC}$ ^[46]、 TiAl-TiB_2 ^[49]、 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-B}_4\text{C}$ ^[47]、 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ^[48]、 $\text{WC-10wt}\%\text{(Fe}_{62.5}\text{Al}_{32.5}\text{B}_5)}$ ^[51] $\text{Fe}_3\text{Al-TiC-TiB}_2$ ^[50] 和 SiC-B-C ^[63] 复合材料。这些材料体系在不同程度上取得良好的效果。

另外,利用脉冲电流烧结技术也开展了不锈钢的焊接^[56]、结构异形件的制备^[57]及高聚物的固化^[64]等。

综上所述,传统烧结方法对制备高性能陶瓷新材料有很多局限性,脉冲电流烧结对烧结和合成新材料显示出巨大的潜力。但由于脉冲电流烧结问世时间不长,其烧结优势还远未发挥,有许多问题需要研究探讨。如:某些体系至今没有得到纳米材料,甚至脉冲电流烧结晶粒比热压烧结还要大^[58-60];对均质材料来说,经常观察到组织结构不均匀;模具材质、形状、尺寸对烧结的最终材料性能有很大影响等。因此需要对烧结机理进行深入研究,以达到合理有效控制烧结工艺、获得性能优良的新材料的目的。

1.3 脉冲电流烧结机理的若干观点

虽然利用脉冲电流烧结技术已制备出多种材料体系的块体材料,但这种技术的原理目前并不十分清楚,甚至存在争议,主要有以下一些观点。

1.3.1 颗粒间放电,激发等离子体

脉冲电流烧结设备制造商 Sumitomo 公司的 M. Tokita 最早提出放电等离子烧结的观点^[61],他认为:粉末颗粒微区存在电场诱导的正负极,在脉冲电流作用下颗粒间产生放电,激发等离子体(如图 1-4 所示),这种等离子体对颗粒表面的净化作用促进了烧结。他也在烧结 Ni 粉中观察到烧结过程中形成的“放电颈部”及粉末颗粒间的网状“桥连”^[62]。颗粒间放电也会产生局部高温^[65]。文献^[61]认为放

电等离子对材料烧结有以下作用与优势(如图 1-5 所示)。但这种观点却难以对非导电粉体的快速烧结进行解释,因为非导电粉体中根本就不会有电流通过。

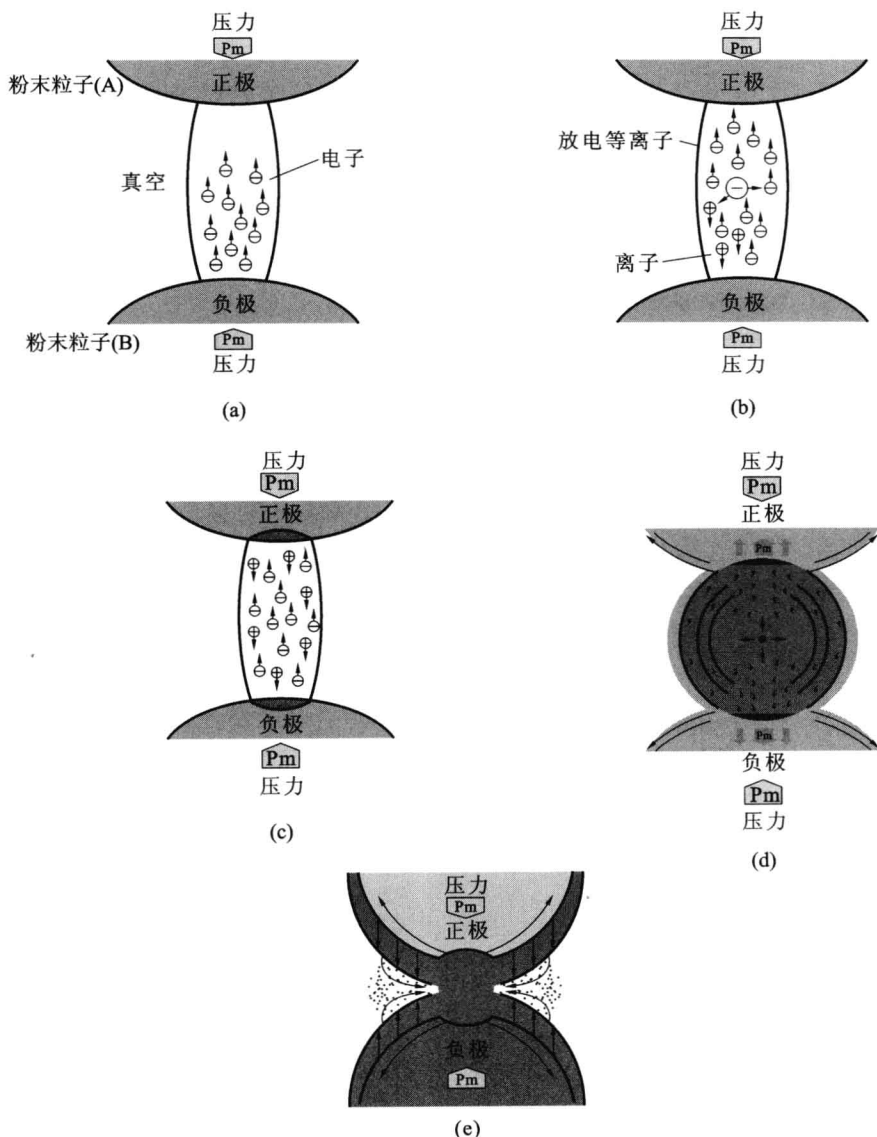


图 1-4 放电等离子形成颈缩的机理示意图

(a)颗粒极化,形成颗粒间附加电场;(b)在电场作用下颗粒间放电形成等离子;
(c)等离子轰击颗粒表面;(d)颗粒表面被净化和活化;(e)颗粒间扩散,形成颈缩

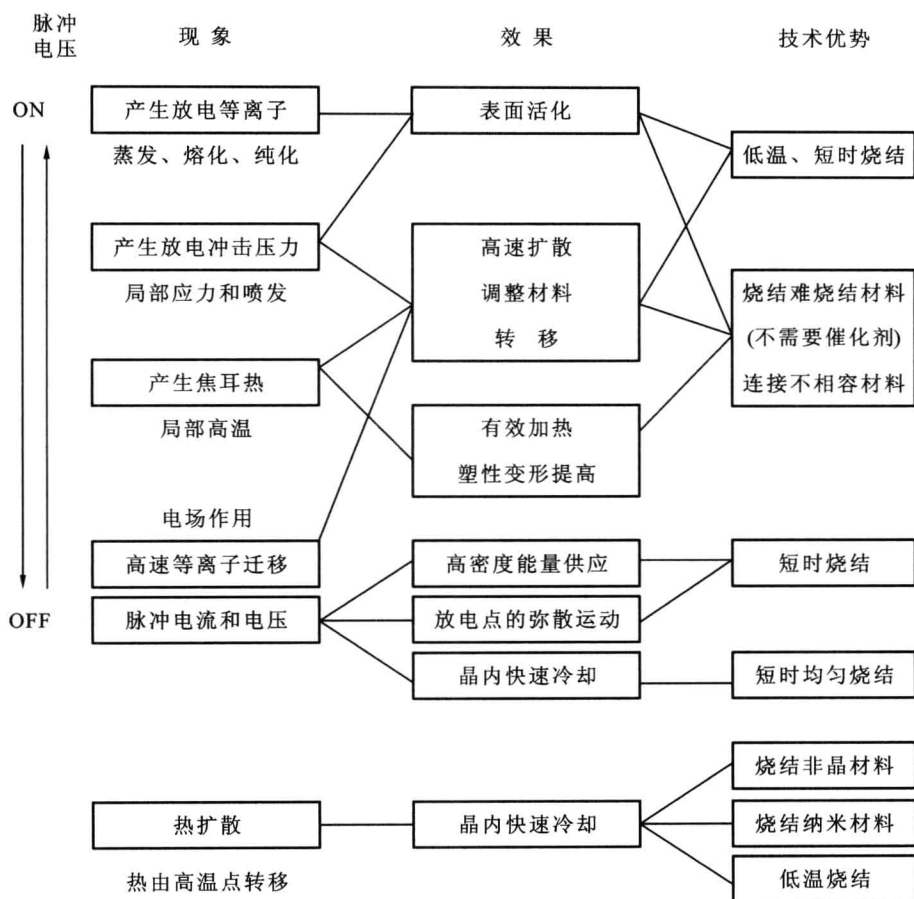


图 1-5 脉冲开关的作用

1.3.2 与热压烧结类似

S. W. Wang 和 L. D. Cheng^[66-68] 等人分别对导电性 Cu 粉和非导电性 Al_2O_3 粉进行了脉冲电流烧结研究,他们认为导电性材料和非导电性材料存在不同的烧结机理,导电性粉体中存在焦耳热效应和脉冲放电效应,非导电粉体的烧结主要源于模具的热传导。其证据为 Al_2O_3 烧结体的边缘硬度高于芯部硬度,显微硬度沿 Z 轴梯度变化,最端面的硬度高于中心硬度。但清华大学潘伟教授等发现:脉冲电流烧结非导电 SiC 晶须可以获得三维网络结构的微孔 SiC,且 SiC 晶须间有点连接的现象,类似于晶须间放电,这又很难用模具焦耳热来解释。

1.3.3 电磁波的作用

古屋泰文等人对金属体系及 Al_2O_3 的烧结过程进行了原位监测^[69-70],即利用粉料下面的传感器探测烧结过程中电磁波的变化,发现在基本波形中都叠加了二次诱导的噪声信号,说明烧结过程中无论导电、非导电材料都存在诱导电磁波。但他对诱导电磁波产生的机理没有给出明确的解释,因为 Al_2O_3 粉末间不可能存在放电效应。

1.4 本书的研究目的与思路

脉冲电流烧结技术是利用脉冲电流流过导电模具或样品进行烧结,是一种低电压、大电流的烧结行为。模具中粉体的导电与否对电流分布有重要影响。对非导电性粉体来说,脉冲电流只能从粉体周围的导电模具中流过;对导电性粉体,烧结初期由于粉末电阻很大,大部分电流不能从粉末中流过^[71],烧结中后期脉冲电流可以直接从粉体间流过。因此导电、非导电材料的烧结机理应该有所区别。

本书重点研究非导电材料的快速烧结机理,即对于非导电材料来说是否脉冲电流烧结与热压烧结完全等同,是否还存在其他的作用机制?在前期的实验探索过程中我们发现以下现象:非导电性 Al_2O_3 烧结过程所施加的功率比导电性 TiB_2 的功率小,似乎暗示烧结 Al_2O_3 有非电阻热效应,而这种非电阻热效应又与装模方式有关,只有电流在模具中发生偏转时,烧结热效率才显著提高(如图 1-6 和图 1-7 所示)。

上述实验结果虽然不够完善,但我们以下启发:是否这种非电阻热效应与微波烧结有某种相似性或联系,即是否脉冲电流烧结非导电材料过程中存在电磁场或电磁波的作用?事实上日本同行也已注意到此问题,日本设立了国家级重大课题研究脉冲电流烧结与微波烧结之间的关系,但目前还没有将二者联系在一起的实质性报道,仅《粉体および粉末冶金》杂志将有关脉冲电流烧结的论文和微波烧结的论文归入同一个研究专栏。

基于上述想法,本书拟开展以下研究:(1)脉冲电流烧结非导电材料过程中是否存在电磁场的作用,如果存在,电场对材料有什么作用?磁场对材料有什么作用?由此是否还衍生出其他的作用问题?(2)脉冲电流烧结导电性材料的机理是什么?除了颗粒间放电外,还有其他影响因素吗?

这些问题在以后的 2~4 章中进行了系统研究。第 2 章首先利用麦克斯韦

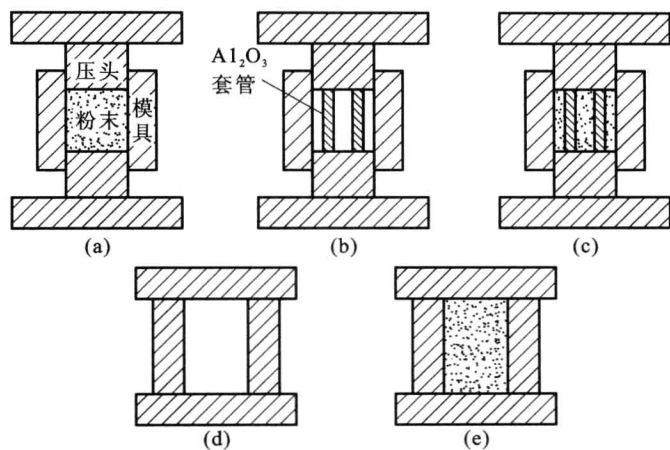


图 1-6 五种不同的装模方式

(a) 正常装模(Al_2O_3 粉); (b) 模腔中放置 Al_2O_3 套管, 空烧; (c) Al_2O_3 套管周围填充 Al_2O_3 ;
(d) 空烧, 无压头; (e) 模腔中填充 Al_2O_3 粉, 无压头

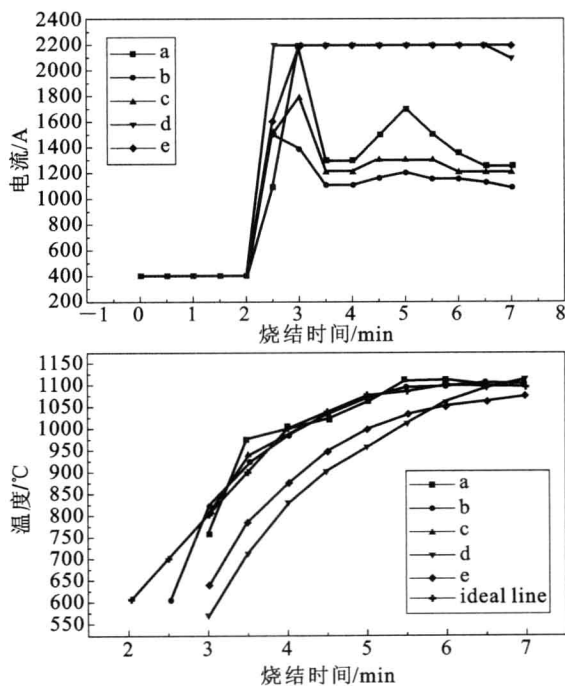


图 1-7 五种装模方式下的烧结电流和升温速率

电磁场理论对脉冲电流的电磁场分布强度进行了计算,分析脉冲电流产生放电的可能性与空间区域。第3章通过研究非导电材料的一些烧结现象证明电磁场的存在,其中第1节研究烧结 Al_2O_3 的不均匀性,通过利用 XRD 及 XPS 对样品进行的分析,证实脉冲电场的存在;第2节研究了 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2\text{-Ni}$ 复合体系中磁性颗粒的迁移现象及金属材料吸收磁场能的现象,证实脉冲磁场的存在;第3节通过研究 BN 包覆导电性块体(Cu 或 TiB_2)的烧结现象,证实脉冲电场与脉冲磁场不同的作用区域;第4节通过对温度敏感材料体系 $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZnO}$ 烧结后的裂纹分析证实烧结体中存在规律性温度变化,分析了这种变化与高频电磁波之间的关系,从而证明高频电磁振荡(二次电磁波)的存在。第4章利用不同导电性原始粉料,研究了导电性材料的烧结机理问题,包括材料电阻率对脉冲电流分布的影响、颗粒间放电的活化问题及趋肤效应对烧结的影响。

2

脉冲电流烧结的低频电磁场与高频电磁振荡分析

2.1 低频电磁场计算与讨论

脉冲电流烧结技术是利用大的脉冲电流施加在导电模具上,所施加的脉冲电流达到数千安培,但电压只有几伏。脉冲电流烧结技术具有烧结速度快、烧结体密实度高的特点。Tokita 首先提出放电等离子烧结的观点,但对于非导电材料,脉冲电流不能从粉末中流过,颗粒间如何放电没有理论依据。也有研究者认为烧结是通过导电模具的电流焦耳热进行的,但越来越多的证据表明,很多试验不能仅用焦耳热来解释。

由于脉冲电流烧结是一种变电流烧结过程,电流周围产生磁场,变化的电流产生变化的磁场,而变化的磁场又产生感应电场,因此脉冲电流烧结腔体中不排除存在一定强度电磁场的可能。但至今为止,没有研究者对电磁场分布进行过计算。本书首先从经典 Maxwell 电磁场方程入手,利用边界条件及有限元计算方法,对电磁场分布进行了计算,并根据计算结果,对脉冲电流烧结过程进行解析。

2.1.1 电磁场计算前提条件

(1) 石墨模具的模套为轴对称的圆柱体(图 2-1),电流流动路径为图 2-1 中箭头所示。即电流在压头前端发生偏转,而不是沿轴向直接流过腔体,由于轴对称,三维空间电磁场问题可以转化为轴对称二维电磁场问题(即图 2-1 中的轴向 z 和径向 x),因此求解变量为圆周方向的磁场强度 H_{θ} 。

(2) 假设腔体中没有填充烧结粉料,腔体为真空,周围由石墨模套和石墨压头组成。

(3) 在石墨模套外边缘和压头外边缘取边界条件:

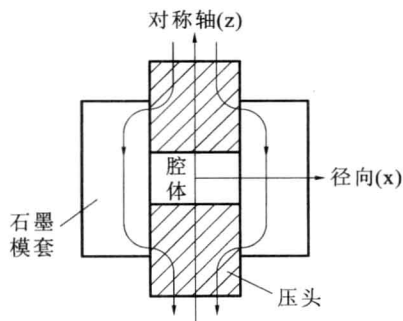


图 2-1 烧结电流在模具中的路径示意图

$$H_a = \frac{i}{2\pi r}$$

式中: r ——空间任意点距对称轴的垂直距离;

H_a ——空间任意点的磁场强度(矢量)。

i ——压头电极通过的总电流,在压头电极截面内(图 2-1 中阴影部分),有

$$H_a = \frac{ir}{2\pi R^2}, R \text{ 是压头电极截面半径。}$$

(4) 石墨模套及压头中施加脉冲电流,电流波形如图 2-2 所示:

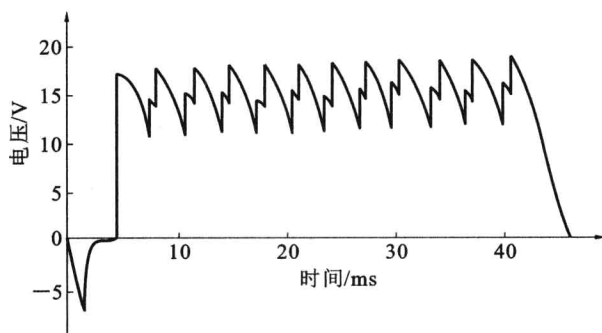


图 2-2 脉冲电流波形图(输出电流 3500A 以上时)

2.1.2 二维轴对称瞬态电磁场计算

(1) 求解变量 H (只有圆周方向的分量 H_a)

麦克斯韦电磁场基本方程:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

该方程既考虑了传导电流对电磁场的贡献,也考虑了位移电流对电磁场的贡献。

(2) 时间差分离散化

取时间步长为 Δt ,采用差分格式离散化方程(1)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}^n + \epsilon (\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}) / \Delta t \quad (3)$$

得:

$$\mathbf{E}^n = \frac{\Delta t}{\epsilon + \gamma \Delta t} \nabla \times \mathbf{H} + \frac{\epsilon}{\epsilon + \gamma \Delta t} \mathbf{E}^{n-1} \quad (4)$$