奇异摄动丛书 3

奇异摄动中的微分不等式理论

周明儒 杜增吉 王广瓦 著

科学出版社

内容简介

本书系统介绍研究了奇异摄动问题的微分不等式理论和由此发展起来的上下解方法. 追溯了该理论的起源和主要发展, 应用于研究常微分方程(组)奇异摄动问题, 时滞方程与偏微分方程奇异摄动问题, 介绍了上下解方法的新发展, 以及一些应用实例.

本书可供高等学校数学、物理、力学等专业本科高年级学生、研究生和教师, 从事自然科学和工程技术的研究人员及实际工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

奇异摄动中的微分不等式理论/周明儒, 杜增吉, 王广瓦著. —北京: 科学出版社, 2012

(奇异摄动丛书/张伟江主编)

ISBN 978-7-03-034983-5

Ⅰ. ①奇…　Ⅱ. ①周…　②杜…　③王…　Ⅲ. ①摄动-微分不等式-研究　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 134222 号

责任编辑: 王丽平　房　阳 / 责任校对: 林青梅
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第　一　版　开本: B5(720 × 1000)
2012 年 6 月第一次印刷　印张: 12
字数: 230 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《奇异摄动丛书》序言

科学家之所以受到世人的尊敬, 除了因为世人都享受到了科学发明的恩惠之外, 还因为人们为科学家追求真理的执着精神而感动. 而数学家又更为世人所折服, 能在如此深奥、复杂、抽象的数学天地里遨游的人着实难能可贵, 抽象的符号、公式、推理和运算已成了当今所有学科不可缺少的内核了, 人们在享受各种科学成果时, 同样也在享受内在的数学原理与演绎的恩泽. 奇异摄动理论与应用是数学和工程融合的一个奇葩, 它出人意料地涉足许多无法想象的奇观, 处理人们原来常常忽略却又无法预测的奇特. 于是其名字也另有一问, 为 “奇异摄动”(Singular Perturbation).

20 世纪 40 年代, 科学先驱钱伟长等已对奇异摄动作了许多研究, 并成功地应用于力学等方面. 20 世纪 50 年代后, 中国出现了一大批专攻奇异摄动理论和应用的学者, 如著名的学者郭永怀, 在空间技术方面作出了巨大贡献, 苏煜城教授留苏回国后开创我国奇异摄动问题的数值计算研究, 美国柯朗研究所、美籍华裔丁汝教授在 1980 年间奔波上海、西安、北京, 讲授奇异摄动理论及应用 ……1979 年, 钱伟长教授发起并组织在上海召开了 “全国第一次奇异摄动讨论会”.

可贵的是坚韧. 此后, 虽然起起伏伏, 但是开拓依旧. 2005 年 8 月在上海交通大学、华东师范大学、上海大学组织下, 我们又召开了 “全国奇异摄动学术研讨会”, 并且一发而不可止. 此后每年都召开全国性学术会议, 汇集国内各方学者研究讨论. 2010 年 6 月在中国数学会、上海市教委 E- 研究院和上海交通大学支持下, 在上海召开了世界上第一次 “奇异摄动理论及其应用国际学术大会”. 该领域国际权威人士 Robert O’Malley(华盛顿大学), John J H Miller(爱尔兰 Trinity 学院) 等都临会, 并作学术报告.

更可喜的是经过学者们的努力, 在 2007 年 10 月, 中国数学会批准成立中国数学会奇异摄动专业委员会, 学术研究与合作的旗帜终于在华夏大地飘起.

难得的是慧眼识英雄. 科学出版社王丽平同志敏锐地觉察到了奇异摄动方向的成就和作用, 将出版奇异摄动丛书一事提到了议事日程, 并立刻得到学者们的赞同. 于是, 本丛书中的各卷将陆续呈现于读者面前.

作序除了简要介绍一下来历之外, 更是想表达对近七十年来中国学者们在奇异摄动理论和应用方面所作出巨大贡献的敬意. 中国科技创新与攀登少不了基础理

论的支持, 更少不了坚持不懈精神的支撑.

但愿成功!

张伟江博士
中国数学会奇异摄动专业委员会理事长
2011 年 11 月

前　言

微分不等式理论和由此发展起来的上下解方法是研究奇异摄动问题的一种强有力的、行之有效的工具. 作为《奇异摄动丛书》第三分册的本书, 我们先追溯了微分不等式理论的起源和主要发展, 然后分别应用于研究常微分方程奇异摄动问题、常微分方程组奇异摄动问题、时滞方程与偏微分方程奇异摄动问题, 介绍了近年来上下解方法的新发展, 最后介绍了几个应用微分不等式理论解决实际问题的例子. 本书可供高等学校数学、物理、力学等专业本科高年级学生、研究生和教师, 以及从事自然科学和工程技术的研究人员及实际工作者阅读.

本书是在我们给研究生授课讲稿的基础上充实整理而成的. 书中介绍了我们所知道的国内外学者在这一领域取得的一些主要成果, 也包含了我们近 20 年来研究奇异摄动问题的部分工作, 其中一些成果是在国家自然科学基金项目 (11071205, 11101349, 11026203) 和江苏省自然科学基金项目 (BK2011042, BK2011202) 的支持和资助下完成的, 作者表示衷心的感谢.

本书由我们分工负责合作完成. 周明儒负责第 1、2、6 章; 王广瓦负责第 3 章; 杜增吉负责第 4、5 章. 最后由周明儒统稿. 参考文献各章分别列出.

囿于知识和水平的限制, 以及了解国内外同行研究成果的不足, 书中的疏漏和不足在所难免, 敬请读者指正, 不胜感激.

衷心感谢中国数学会奇异摄动专业委员会对本书编写和出版的指导、帮助. 衷心感谢科学出版社和王丽平编辑对本书编写、出版的大力支持.

作　者

2011 年 12 月 1 日

于徐州师范大学

(2012 年 3 月更名为江苏师范大学)

目　　录

《奇异摄动丛书》序言
前言
第 1 章　微分不等式理论溯源 ……………………………… 1
1.1　初值问题的比较定理和微分不等式 ……………………………… 1
1.1.1　第一比较定理 ……………………………… 1
1.1.2　微分不等式和第二比较定理 ……………………………… 2
1.1.3　一阶方程初值问题解的界定定理 ……………………………… 4
1.1.4　一阶方程组初值问题的比较定理 ……………………………… 6
1.2　Nagumo 关于边值问题的一篇著名论文 ……………………………… 10
1.2.1　Nagumo 的论文 ……………………………… 10
1.2.2　关于 Nagumo 论文的一些注记 ……………………………… 14
1.2.3　南云定理 ……………………………… 18
1.3　二阶方程 Robin 问题解的存在定理和先验估计 ……………………………… 19
1.4　完全非线性边值问题的综合变形法 ……………………………… 25
参考文献 ……………………………… 30
第 2 章　常微分方程奇异摄动问题 ……………………………… 32
2.1　二阶纯量奇异摄动 Dirichlet 问题 ……………………………… 32
2.1.1　二阶半线性奇异摄动 Dirichlet 问题 ……………………………… 32
2.1.2　二阶非线性奇异摄动 Dirichlet 问题 ……………………………… 38
2.2　二阶纯量奇异摄动 Robin 问题 ……………………………… 46
2.2.1　二阶半线性奇异摄动 Robin 问题 ……………………………… 46
2.2.2　二阶非线性奇异摄动 Robin 问题 ……………………………… 48
2.3　高阶奇异摄动问题 ……………………………… 59
2.3.1　Nagumo 条件和上下解定义 ……………………………… 59
2.3.2　一类三阶非线性多点边值问题解的存在性 ……………………………… 60
2.3.3　一类三阶非线性奇异摄动多点边值问题解的存在性 ……………………………… 66
参考文献 ……………………………… 70
第 3 章　常微分方程组奇异摄动问题 ……………………………… 72
3.1　向量边值问题 ……………………………… 72
3.1.1　Nagumo 条件 ……………………………… 72

3.1.2 向量 Dirichlet 问题 ······ 72
3.1.3 向量 Robin 问题 ······ 74
3.2 向量奇异摄动 Dirichlet 问题 ······ 75
3.2.1 半线性 Dirichlet 问题 ······ 75
3.2.2 拟线性 Dirichlet 问题 ······ 77
3.3 向量奇异摄动 Robin 问题 ······ 80
3.4 二分法与可约性 ······ 82
3.5 线性边值问题的对角化 ······ 83
3.5.1 研究过程概述 ······ 84
3.5.2 变换 (3.5.5) 的可行性 ······ 85
3.5.3 分离系统 (3.5.6), (3.5.7) 的解 ······ 92
3.5.4 奇异摄动问题 (3.5.1), (3.5.2) 的解 ······ 93
3.6 注记 ······ 93
参考文献 ······ 94
第 4 章 时滞方程与偏微分方程奇异摄动问题 ······ 96
4.1 时滞微分方程奇异摄动问题 ······ 96
4.1.1 边值问题解的存在性 ······ 97
4.1.2 奇异摄动边值问题 ······ 102
4.2 非线性椭圆型微分方程奇异摄动问题 ······ 106
4.2.1 外部解的渐近展开 ······ 107
4.2.2 边界层校正项 ······ 108
4.2.3 解的一致有效性 ······ 109
4.3 抛物型微分方程奇异摄动问题 ······ 111
4.3.1 高阶渐近近似表示 ······ 111
4.3.2 误差估计 ······ 114
参考文献 ······ 116
第 5 章 上下解方法的新发展 ······ 119
5.1 多对上下解方法 ······ 119
5.2 非序上下解方法 ······ 126
5.2.1 无序上下解 ······ 128
5.2.2 逆序上下解 ······ 131
5.3 单调迭代技巧和上下解方法 ······ 139
5.4 时标上的上下解方法 ······ 145
5.4.1 分离型边值问题 (5.4.1), (5.4.2) ······ 149

5.4.2 周期边值问题 (5.4.5), (5.4.6) ······ 156
参考文献 ······ 165
第 6 章　应用 ······ 168
参考文献 ······ 178
《奇异摄动丛书》书目 ······ 180

第 1 章　微分不等式理论溯源

在常微分方程理论研究中, 一种重要的技巧是 “积分” 一个微分不等式或 “微分” 一个积分不等式, 这种技巧早在佩亚诺 (G.Peano,1858—1932) 和佩龙 (O.Perron, 1880—1975) 的工作中就已出现.1937 年, 日本数学家南云 (M.Nagumo) 引入了著名的 Nagumo 条件, 此后一代代数学家不断发展、完善了微分不等式理论和上下解方法, 使之成为研究奇异摄动问题的一种重要方法. 这一方法的特点是, 不仅可以证明奇异摄动问题解的存在, 而且可以同时通过构造适当的不等式, 得到摄动解的精确估计. 利用微分不等式理论, 可以简捷有效地重新得到利用其他一些渐近方法所得的结果, 并揭示渐近过程的实质.

微分不等式理论和比较定理有着密切的关系, 本章先介绍恰普雷金 (Чаплыгин) 的第一比较定理、第二比较定理, 以及由此得到的研究常微分方程初值问题的上下解方法; 然后介绍南云 (Nagumo) 定理, 以及与此相关的研究常微分方程边值问题的上下解方法.

1.1　初值问题的比较定理和微分不等式

所谓比较定理, 粗略地讲, 就是两个一阶显方程由同一点出发的解的大小, 取决于方程右端函数的大小, 右行解的大小与右端函数的大小符号相同, 左行解则相反. 具有严格不等号的为第一比较定理, 不等号是不严格的为第二比较定理.

1.1.1　第一比较定理

定理 1.1.1 (恰普雷金第一比较定理)　设纯量函数 $f(t,x)$ 和 $F(t,x)$ 在平面区域 G 上连续, 且

$$f(t,x) < F(t,x), \quad (t,x) \in G.$$

若 $x=\varphi(t)$ 与 $x=\Phi(t)$ 分别是方程

$$x' = f(t,x) \quad 与 \quad x' = F(t,x)$$

过同一点 $(\tau,\xi) \in G$ 的解, 则在它们共同存在的区间上, 必有

$$当\ t>\tau\ 时, \quad \varphi(t) < \Phi(t); \tag{1.1.1}$$

$$当\ t<\tau\ 时, \quad \varphi(t) > \Phi(t). \tag{1.1.2}$$

证明 令 $g(t)=\Phi(t)-\varphi(t)$, 则有 $g(\tau)=0, g'(\tau)>0$. 故当 $t>\tau$ 且充分靠近 τ 时有 $g(t)>0$.

若 (1.1.1) 不成立, 令 α 是大于 τ 且使 $\varphi(t)\geqslant\Phi(t)$ 的 t 值的下确界, 则有

$$g(\alpha)=0, g(t)>0, \quad \tau<t<\alpha,$$

从而 $g'(\alpha)<0$. 但另一方面,

$$g'(\alpha)=F(\alpha,\Phi(\alpha))-f(\alpha,\varphi(\alpha))>0,$$

此乃矛盾, 故 (1.1.1) 成立. 同理可证 (1.1.2) 成立.

注 1.1.1 若 $f(t,x)$ 在 $\overline{R}: |t-\tau|\leqslant a, |x-\xi|\leqslant b$ 上连续, 利用第一比较定理等可以证明: 方程 $x'=f(t,x)+\varepsilon(x'=f(t,x)-\varepsilon)$ 过点 (τ,ξ) 的饱和解 φ_ε(称为 $+\varepsilon(-\varepsilon)$ 饱和解), 当 $\varepsilon\to0^+$ 时, 在 $|t-\tau|\leqslant h$ 上一致收敛于方程 $x'=f(t,x)$ 过点 (τ,ξ) 的右行最大 (小) 解和左行最小 (大) 解. 进而可知: 若 $f(t,x)$ 在平面区域 G 上连续, 则过任一点 $(\tau,\xi)\in G$, 方程 $x'=f(t,x)$ 都存在唯一的饱和最大 (小) 解 (参看文献 [1] p.38~41).

1.1.2 微分不等式和第二比较定理

借助第一比较定理, 可以得到关于微分不等式的一个定理:

定理 1.1.2 设 $F(t,x)$ 在平面区域 G 上连续, $x=\Phi(t)$ 是初值问题

$$x'=F(t,x), \quad x(\tau)=\xi \tag{1.1.3}$$

的右行最大解, $\tau\leqslant t<b$; 函数 $\varphi\in C[\tau,b)$, $\varphi(\tau)\leqslant\xi$, $(t,\varphi(t))\in G$, 右导数 $\mathrm{D}_+\varphi(t)$ 存在, 且

$$\mathrm{D}_+\varphi(t)\leqslant F(t,\varphi(t)), \tag{1.1.4}$$

则有

$$\varphi(t)\leqslant\Phi(t), \quad \tau\leqslant t<b. \tag{1.1.5}$$

又若 $x=\Phi(t)$ 是初值问题 (1.1.3) 的左行最小解, $a<t\leqslant\tau$; 函数 $\varphi\in C(a,\tau]$, $\varphi(\tau)\geqslant\xi$, $(t,\varphi(t))\in G$, 左导数 $\mathrm{D}_-\varphi(t)$ 存在, 且

$$\mathrm{D}_-\varphi(t)\leqslant F(t,\varphi(t)), \tag{1.1.6}$$

则有

$$\varphi(t)\geqslant\Phi(t), \quad a<t\leqslant\tau. \tag{1.1.7}$$

证明 只证定理的前一半, 后一半的证明类似. 分两步:

第一步, 先证式 (1.1.5) 必在某个区间 $\tau\leqslant t\leqslant\tau'<b$ 上成立. 为此, 考虑初值问题

$$(E)_\varepsilon \quad x'=F(t,x)+\varepsilon, \quad x(\tau)=\xi.$$

当 $\delta > 0$ 充分小, $0 < \varepsilon < \delta$ 时, 问题 $(E)_\varepsilon$ 的每一个饱和解 $\Phi_\varepsilon(t)$ 都在某个与 ε 无关的区间 $\tau \leqslant t \leqslant \tau' < b$ 上有定义, 且当 $\varepsilon \to 0^+$ 时一致收敛于初值问题 (1.1.3) 的最大解 $\Phi(t)$(文献 [1] p.38 引理 2). 对于 $0 < \varepsilon < \delta$, 当 $\tau \leqslant t \leqslant \tau'$ 时, 必有

$$\varphi(t) \leqslant \Phi_\varepsilon(t) \tag{1.1.8}$$

成立. 事实上, 如若不然, 则存在 $t_1 \in (\tau, \tau')$, 使 $\varphi(t_1) > \Phi_\varepsilon(t_1)$. 由 $\Phi_\varepsilon(t)$ 连续, 必有 $t_2 \in [\tau, t_1)$, 使

$$\varphi(t_2) = \Phi_\varepsilon(t_2), \varphi(t) > \Phi_\varepsilon(t), \quad t \in (t_2, t_1]. \tag{1.1.9}$$

从而有

$$\mathrm{D}_+\varphi(t_2) \leqslant F(t_2, \varphi(t_2)) = F(t_2, \Phi_\varepsilon(t_2)) < \mathrm{D}_+\Phi_\varepsilon(t_2),$$

故当 $t > t_2$ 且充分靠近 t_2 时, $\varphi(t) < \Phi_\varepsilon(t)$, 这与 (1.1.9) 中的后一不等式矛盾. 所以当 $\tau \leqslant t \leqslant \tau'$ 时 (1.1.8) 成立. 在 (1.1.8) 中令 $\varepsilon \to 0^+$, 即知式 (1.1.5) 必在某个区间 $\tau \leqslant t \leqslant \tau' < b$ 上成立.

第二步, 设所有上述区间的右端点的上确界为 b', 则 $\tau < b' \leqslant b$, $\varphi(b') \leqslant \Phi(b')$. 只需证明 $b' = b$ 即可. 如若 $b' < b$, 以 $(b', \varphi(b'))$ 代替 (τ, ξ), 重复上述论证过程, 就可得到一个 $b'' \in (b', b]$, 使得 (1.1.5) 在 $[b', b'']$ 上从而在 $[\tau, b'']$ 上成立, 这与 b' 的定义矛盾, 故 $b' = b$, 即 (1.1.5) 当 $\tau \leqslant t < b$ 时成立.

注 1.1.2　如果将微分不等式 (1.1.4) 和 (1.1.6) 中的不等号改向, 同时将 $\varphi(\tau) \leqslant \xi$ 和 $\varphi(\tau) \geqslant \xi$ 中的不等号改向, 则只需将 (1.1.5) 和 (1.1.7) 中的不等号改向, 并且将最大解改为最小解, 将最小解改为最大解, 则定理仍然成立.

由定理 1.1.2 可以直接得到下述第二比较定理.

定理 1.1.3 (恰普雷金第二比较定理)　设 $f(t,x)$ 和 $F(t,x)$ 在平面区域 G 上连续, 且

$$f(t,x) \leqslant F(t,x), \quad (t,x) \in G.$$

若 $x = \varphi(t)$ 与 $x = \Phi(t)$ 分别是方程

$$x' = f(t,x) \quad 与 \quad x' = F(t,x)$$

过同一点 $(\tau, \xi) \in G$ 的解, 均在区间 $a < t < b$ 上有定义; 且 $x = \Phi(t)$ 在 $[\tau, b)$ 上是方程 $x' = F(t,x)$ 过点 (τ, ξ) 的最大解, 在 $(a, \tau]$ 上是最小解, 则有

$$\varphi(t) \begin{cases} \leqslant \Phi(t), & \tau \leqslant t < b, \\ \geqslant \Phi(t), & a < t \leqslant \tau. \end{cases}$$

证明　由定理条件, 在 (a,b) 上有

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \leqslant F(t, \varphi(t)),$$

即 $\mathrm{D}_\pm\varphi(t) \leqslant F(t, \varphi(t))$, 故由定理 1.1.2 知结论成立.

1.1.3 一阶方程初值问题解的界定定理

利用定理 1.1.2, 容易证明下述定理.

定理 1.1.4 设 $\alpha,\beta\in C^1[a,b]$, $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$; $f(t,x)$ 在区域 G: $a\leqslant t\leqslant b$, $\alpha(t)\leqslant x\leqslant\beta(t)$ 上连续, 且保证初值问题

$$x'=f(t,x),\quad x(a)=A \tag{1.1.10}$$

的解唯一. 若当 $t\in[a,b]$ 时, 有

$$\alpha'(t)\leqslant f(t,\alpha(t)),$$

$$\beta'(t)\geqslant f(t,\beta(t)),$$

则对任一满足 $\alpha(a)\leqslant A\leqslant\beta(a)$ 的常数 A, 问题 (1.1.10) 的解 $x=x(t)$ 必满足

$$\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t),\quad t\in[a,b].$$

证明 定理条件保证了初值问题 (1.1.10) 的解在 $[a,b]$ 上存在, 由定理 1.1.2 知, $\alpha(t)\leqslant\varPhi(t)$, $\varPhi(t)$ 是 (1.1.10) 在 $[a,b]$ 上的最大解; $\tilde{\varPhi}(t)\leqslant\beta(t)$, $\tilde{\varPhi}(t)$ 是 (1.1.10) 在 $[a,b]$ 上的最小解. 因初值问题 (1.1.10) 的解唯一, $\varPhi(t)\equiv\tilde{\varPhi}(t)$, 故有 $\alpha(t)\leqslant\varPhi(t)\leqslant\beta(t)$.

上面所述的函数 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 分别称为初值问题 (1.1.10) 的**下解**和**上解**, 它们构成一对**界定函数**(bounding functions).

例 1.1.1 研究奇异摄动一阶微分方程的初值问题

$$\varepsilon x'=f(t,x,\varepsilon),\quad x(0,\varepsilon)=x_0, \tag{1.1.11}$$

其中 $t\in[0,T]$, $x\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$ 是小参数, $x_0>0$ 为常数. 假设

$[\mathrm{H}_1]$ $f(t,0,0)\equiv 0, t\in(0,T]$; 且存在正常数 l, 使得

$$0\leqslant f(t,0,\varepsilon)<l\varepsilon; \tag{1.1.12}$$

$[\mathrm{H}_2]$ $f(t,x)$ 在 $[0,T]\times R$ 上对 t 连续, 对 x 具有 n $(n\geqslant 1)$ 阶连续的导数, 且存在正常数 $k>0$, 使得

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t,0,\varepsilon)\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x,\varepsilon)\leqslant -k<0. \tag{1.1.13}$$

条件 $[\mathrm{H}_2]$ 保证了初值问题 (1.1.11) 解的存在唯一性.

由 $[\mathrm{H}_1]$ 知, 退化方程 $f(t,u,0)=0$ 有零解 $u(t)\equiv 0$, $0<t\leqslant T$.

令 $\alpha(t,\varepsilon)\equiv 0\,(0\leqslant t\leqslant T)$, 则 $\alpha(0,\varepsilon)<x_0$, 且

$$\varepsilon\alpha'-f(t,\alpha,\varepsilon)=-f(t,0,\varepsilon)\leqslant 0.$$

如能选取函数 $\beta(t,\varepsilon)>0$, 使

$$\varepsilon\beta'-f(t,\beta,\varepsilon)\geqslant 0,\quad \beta(0,\varepsilon)\geqslant x_0, \tag{1.1.14}$$

则 $\alpha(t,\varepsilon)$ 和 $\beta(t,\varepsilon)$ 就构成一对界定函数.

当 $n=1$ 时, 利用条件 (1.1.12) 和 (1.1.13) 知

$$\begin{aligned}\varepsilon\beta'-f(t,\beta,\varepsilon)=&\varepsilon\beta'-f(t,\,0,\,\varepsilon)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,\,\theta_1\beta,\varepsilon)\beta\\ \geqslant&\varepsilon\beta'-l\varepsilon+k\beta,\quad 0<\theta_1<1.\end{aligned}$$

显然, 当 $\beta(t,\varepsilon)=c\exp\left(-\dfrac{kt}{\varepsilon}\right)$ 时有 $\varepsilon\beta'+k\beta=0$, 其中 c 为任意常数. 为满足 (1.1.14), 只需令

$$\beta(t,\varepsilon)=x_0\exp\left(-\frac{kt}{\varepsilon}\right)+\frac{l\varepsilon}{k}. \tag{1.1.15}$$

当 $n>1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon\beta'-f(t,\beta,\varepsilon)=&\varepsilon\beta'-f(t,0,\varepsilon)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,0,\varepsilon)\beta-\cdots\\ &-\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}(t,0,\varepsilon)\beta^{\,n-1}-\frac{1}{n\,!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,\theta_2\beta,\varepsilon)\beta^n\\ \geqslant&\varepsilon\beta'-l\varepsilon+\frac{k}{n\,!}\beta^{\,n},\quad 0<\theta_2<1.\end{aligned}$$

易知, 当

$$\beta(t,\varepsilon)=\left[\frac{k(n-1)t}{\varepsilon n\,!}+c\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

其中 c 为任意常数时, $\varepsilon\beta'+\dfrac{k}{n\,!}\beta^n=0$. 为满足 (1.1.14), 设

$$\beta(t,\varepsilon)=\left[\frac{k(n-1)t}{\varepsilon n\,!}+x_0^{1-n}\right]^{\frac{1}{1-n}}+r,$$

其中 $r>0$ 为待定常数. 注意到上式右端的第一项恒正, $\beta^n>r^n$, 故可取

$$\beta(t,\varepsilon)=\left[\frac{k(n-1)t}{\varepsilon n\,!}+x_0^{1-n}\right]^{\frac{1}{1-n}}+\left(\frac{l\varepsilon n!}{k}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1.1.16}$$

综上所述, $\alpha(t,\varepsilon)=0$ 和由 (1.1.15)、(1.1.16) 给出的 $\beta(t,\varepsilon)$ 构成初值问题 (1.1.11) 的界定函数. 同时, 我们也得到了下述定理:

定理 1.1.5　在 $[\mathrm{H}_1]$ 和 $[\mathrm{H}_2]$ 的假设下, 初值问题 (1.1.11) 在区间 $[0,\ T]$ 上存在一个解 $x=x(t,\varepsilon)$, 且满足不等式

$$0 \leqslant x(t,\varepsilon) \leqslant v(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{1}{n}}),$$

当 $n=1$ 时,

$$v(t,\varepsilon)=x_0\exp\left(-\frac{kt}{\varepsilon}\right);$$

当 $n>1$ 时,

$$v(t,\varepsilon)=\left[\frac{k(n-1)t}{\varepsilon n\,!}+x_0^{1-n}\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

1.1.4　一阶方程组初值问题的比较定理

1. **借助 Kamke 函数将一阶方程组同一个纯量方程作比较**

一个 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的函数 $S(\boldsymbol{x})$ 称为 Kamke 函数, 如果具有下列性质:

(1) 正定. $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $S(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 且 $S(\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

(2) 正齐次. 对任一正实数 λ, $S(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda S(\boldsymbol{x})$;

(3) 次可加. $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, $S(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leqslant S(\boldsymbol{x})+S(\boldsymbol{y})$.

例如, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$ 等都是 Kamke 函数.

Kamke 函数 $S(\boldsymbol{x})$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|S(\boldsymbol{x})-S(\boldsymbol{y})|\leqslant L\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,$$

其中 L 是仅依赖于 $S(\boldsymbol{x})$ 的一个常数, 例如取 $L=\max\limits_{|\boldsymbol{x}|=1}S(\boldsymbol{x})$.

可以证明 (参看文献 [1]p.47)

引理 1.1.1　设 $S(\boldsymbol{x})$ 为 Kamke 函数, $\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维实向量函数, 若 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 t 处左、右导数存在, 则 $S(\boldsymbol{x}(t))$ 在 t 处左、右导数也存在, 且满足

$$-S(-\mathrm{D}_{\pm}\boldsymbol{x}(t))\leqslant \mathrm{D}_{\pm}S(\boldsymbol{x}(t))\leqslant S(\mathrm{D}_{\pm}\boldsymbol{x}(t)).$$

考虑一阶方程组的初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}(\tau)=\boldsymbol{\xi} \tag{1.1.17}$$

和纯量方程的初值问题

$$y'=F(t,y),\quad y(\tau)=\eta, \tag{1.1.18}$$

其中 $t,y\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 于是 n 维实向量函数. 利用 Kamke 函数可以得到与第一、第二比较定理类似的定理.

定理 1.1.6　设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \in C(G)$, 区域 $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$; $F(t,y) \in C(D)$, 区域 $D \subset \mathbf{R}^2$; $S(\boldsymbol{x})$ 为一 Kamke 函数, 当 $(t,\boldsymbol{x}) \in G$ 时, $(t, S(\boldsymbol{x})) \in D$, 且

$$S(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})) < F(t, S(\boldsymbol{x})). \tag{1.1.19}$$

若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 是初值问题 (1.1.17) 的解, $y = y(t)$ 是初值问题 (1.1.18) 的解, 则在 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $y(t)$ 共同存在的区间上, 当 $S(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \eta$ 时, 有

$$S(\boldsymbol{x}(t)) < y(t), \quad t > \tau; \tag{1.1.20}$$

而当 $S(\boldsymbol{\xi}) \geqslant \eta$ 时, 有

$$S(\boldsymbol{x}(t)) > y(t), \quad t < \tau. \tag{1.1.21}$$

证明　只证 (1.1.20), 类似地可证 (1.1.21).

当 $S(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \eta$ 时, 可证当 $t > \tau$ 且充分靠近 τ 时, 有 $S(\boldsymbol{x}(t)) < y(t)$ 成立. 事实上, 若 $S(\boldsymbol{\xi}) < \eta$, 即 $S(\boldsymbol{x}(\tau)) < y(\tau)$, 结论显真; 若 $S(\boldsymbol{\xi}) = \eta$, 令

$$g(t) = y(t) - S(\boldsymbol{x}(t)),$$

则由引理 1.1.1, 可得

$$\mathrm{D}_+ g(\tau) = y'(\tau) - \mathrm{D}_+ S(\boldsymbol{x}(\tau)) \geqslant F(\tau, S(\boldsymbol{\xi})) - S(\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))) > 0,$$

因 $g(\tau) = 0$, 故当 $t > \tau$ 且充分靠近 τ 时, $g(t) > 0$, 即 $S(\boldsymbol{x}(t)) < y(t)$. 以下的证明与定理 1.1.1 类似.

此外, 可与定理 1.1.3 类似地证明下述定理.

定理 1.1.7　设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 和 $F(t,y)$ 满足定理 1.1.6 的条件, 当 $(t,\boldsymbol{x}) \in G$ 时,

$$S(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})) \leqslant F(t, S(\boldsymbol{x})). \tag{1.1.22}$$

若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 是初值问题 (1.1.17) 的解, $y = y(t)$ 是初值问题

$$y' = F(t,y), \quad y(\tau) = S(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.1.23}$$

的解, 两个解均在 (a,b) 内有定义, $\tau \in (a,b)$; 并且 $y = y(t)$ 是右行最大解, 左行最小解, 则有

$$S(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant y(t), \quad \tau \leqslant t < b;$$

$$S(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant y(t), \quad a < t \leqslant \tau.$$

2. 关于一阶方程组解的比较定理 (参看文献 [2] 第 III 章)

设纯量函数 $x(t) \in C^1[a,b]$, 则当 $t \in [a,b)$ 时, 其绝对值函数的右导数 $\mathrm{D}_+|x(t)|$ 存在, 且有

$$|\mathrm{D}_+|x(t)|| = |x'(t)|. \tag{1.1.24}$$

此因 $x(t) \neq 0$ 时, 有 $\mathrm{D}_+|x(t)| = x'(t)\mathrm{sgn}x(t)$; $x(t) = 0$ 时, 有 $\mathrm{D}_+|x(t)| = |x'(t)|$.

对于 n 维向量函数 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, 记 $|\boldsymbol{x}(t)| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i(t)|$.

引理 1.1.2　设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in C^1[a,b]$, 则 $|\boldsymbol{x}(t)|$ 有右导数 $\mathrm{D}_+|\boldsymbol{x}(t)|$, 且当 $t \in [a,b)$ 时, 有

$$|\mathrm{D}_+|\boldsymbol{x}(t)|| \leqslant |\boldsymbol{x}'(t)|. \tag{1.1.25}$$

证明　对 $\boldsymbol{x}(t)$ 的每个分量 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$, $\mathrm{D}_+|x_k(t)|$ 存在, 当 $h \to 0^+$ 时, 有

$$|x_k(t+h)| = |x_k(t)| + h\mathrm{D}_+|x_k(t)| + o(1). \tag{1.1.26}$$

对充分小的 $h > 0$, 将上式对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 取最大值, 则有

$$|\boldsymbol{x}(t+h)| = |\boldsymbol{x}(t)| + h\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{D}_+|x_k(t)| + o(1),$$

由此可见, $\mathrm{D}_+|\boldsymbol{x}(t)|$ 存在, 且

$$\mathrm{D}_+|\boldsymbol{x}(t)| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{D}_+|x_k(t)|.$$

利用式 (1.1.24), 即得

$$|\mathrm{D}_+|\boldsymbol{x}(t)|| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mathrm{D}_+|x_k(t)|| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k'(t)| = |\boldsymbol{x}'(t)|.$$

定理 1.1.8　设在平面区域 D 上 $F(t,y) \geqslant 0$, $y = \Phi(t)$ 是纯量初值问题

$$y' = F(t,y), \quad y(\tau) = \xi(\geqslant 0) \tag{1.1.27}$$

的最大解; $y = \varphi(t)$ 是初值问题

$$y' = -F(t,y), \quad y(\tau) = \eta(\leqslant \xi) \tag{1.1.28}$$

的最小解.

设向量 $\boldsymbol{x}(t) \in C^1[\tau,b)$, $\eta \leqslant |\boldsymbol{x}(\tau)| \leqslant \xi$, $(t, |\boldsymbol{x}(t)|) \in D$, 且

$$|\boldsymbol{x}'(t)| \leqslant F(t, |\boldsymbol{x}(t)|), \quad t \in [\tau, b), \tag{1.1.29}$$