

数学

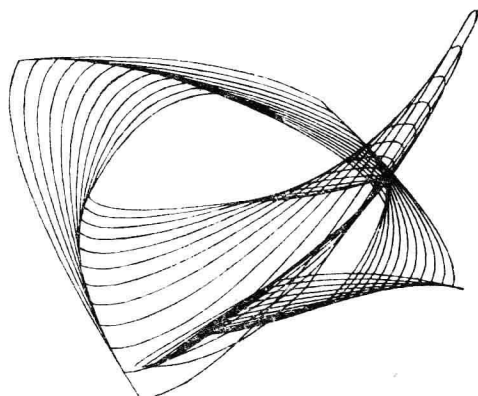
小平邦彦 編

Ⅲ

昭和49年4月10日文部省検定済
高等学校数学科用

数学 Ⅲ

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

別記著作者

東京大学名誉教授 学習院大学教授	小平邦彦
東京大学教授	岩堀長慶
一橋大学教授	松坂和夫
東京教育大学教授	前原昭二
東京大学教授	藤田 宏
成蹊大学教授	志村利雄
宮城教育大学教授	鶴丸孝司
杏林大学教授	伊藤豊吉
都立田無工業高校教諭	番場参策
都立田園調布高校教諭	山崎和郎
都立戸山高校教諭	三瀬茂利
都立西高校教諭	渋谷幸敏
都立小石川工業高校教諭	八木恒雄
お茶の水女子大学付属高校教諭	石田光子

東京書籍株式会社編集部

表紙 勝井三雄

カット
日科技研 電子計算機センター

数学III

数 III 492

昭和52年1月20日印刷

昭和52年2月10日発行

昭和49年4月10日文部省検定済

著者 小平邦彦

ほか13名(別記)

発行者 東京書籍株式会社

代表者 鈴木和夫

東京都台東区台東1丁目5番18号

印刷者 東京書籍印刷株式会社

代表者 奥賀田辰雄

東京都北区堀船1丁目23番31号

発行所 東京書籍株式会社

東京都台東区台東1丁目5番18号

電話 東京(03)835局6111(代表)

郵便番号 110

定価 文部大臣が認可し官製で告示した定価
(上記の定価は、各教科書取次供給所に表示します。)

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは、電子計算機(コンピューター)による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば、II章のカットは円周上の1点が、固定された円の上をころがってできる軌跡の上を、長方形が移動したものです。また、付録のカットは

$$x = e^{-\theta}(\sin \theta + \cos \theta), \quad y = e^{-\theta}(\sin 0.5\theta + \cos 0.5\theta)$$

の式で θ を変化させたととき得られる曲線です。

は　じ　め　に

本書は高等学校数学ⅡBの学習を終えた諸君のために、それに続く数学の教科書として編集したものである。

数学Ⅰのはじめに述べたように、数学は本質的に自由であって、数学者はおよそ考えることが可能なものをすべて自由に考える。この意味で数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。一方、数学はいろいろな分野に広く応用されて、実に不思議なほど役に立つのである。

本書は4つの章からなる。第Ⅰ章では、まず無限数列について収束、発散の意味、極限についての法則を学び、次に、無限級数とその和について学ぶ。

第Ⅱ章は微分法とその応用を扱う。微分法については、すでに数学ⅡBで学んだが、そこで扱った関数は簡単な多項式で表されるものに限られていた。三角関数、対数関数、指数関数などの微分法はここではじめて学ぶのである。また、関数の商、合成関数、逆関数の微分法についてもここで学ぶ。微分法の応用としては、平均値の定理、関数の増加・減少と極大・極小、曲線の凹凸などを扱う。

第Ⅲ章で扱うのは、積分法とその応用である。積分法についてもその初歩はすでに数学ⅡBで学んだが、本章ではそれに引き続いて、さらにいろいろな関数の積分を学ぶ。また、積分の一般的方法として、置換積分法や部分積分法について学ぶ。積分法の応用としては、面積、体積、曲線の長さなどの計算、さらに、簡単な微分方程式の解法について述べる。微分方程式は物理学をはじめとして広く自然科学に応用される。

最後の第Ⅳ章では、確率と統計について学ぶ。確率の初歩についてはすでに数学Ⅰで学んだが、本章ではさらに進んで、二項分布、正規分布、分散と標準偏差などについて学ぶ。標準偏差の概念は理論上も応用上も重要である。この章の第2節では、統計的推測について述べる。

数学ⅡBのはじめに述べたように、数学を学ぶには、本を読んで覚えるだけでは不十分であって、自分でよく考え、計算をしたり問題を解いたりしてみることがたいせつである。

凡例

〔例〕 本文の理解を助けるために具体例を示したものです。

例題 内容を理解するための代表的な問題を、例題としてあげました。わく囲みの「解」や「証明」は、模範解を示したものです。

〔注意〕，＊）注意や欄外の脚注で、理解を助ける説明を補いました。

問 学習した内容をすぐ身につけるための設問と、導入のための設問を本文中で問にしました。

問題 各節末に、その節で学んだことがらを練習するための問題を設けました。

練習問題 各章末に、その章全体の復習と応用の問題を掲げました。Aは基本的なものを主とし、Bはやや程度の高い問題となっています。

付録 巻末の補充問題は、さらに学習内容の進んだ箇所です。

目次

I 章 数列の極限

1 節 数列の収束と発散	2	2 節 無限級数	16
1 収束, 発散の意味	2	1 無限級数	16
2 極限の求め方	6	2 無限等比級数	18
3 数列 $\{r^n\}$ の極限	12	3 無限級数の和の求め方	22
問題	15	問題	26
		練習問題 A, B	27, 28

II 章 微分法とその応用

1 節 関数の極限	30	3 高次導関数	63
1 関数の極限	30	問題	65
2 関数の連続性	36	4 節 微分法の応用	66
問題	43	1 接線	66
2 節 微分法	44	2 平均値の定理	69
1 導関数	44	3 関数の増加・減少	73
2 商の微分法	46	4 関数の最大・最小および 極大・極小	77
3 逆関数の微分法	49	5 曲線の凹凸	84
4 合成関数の微分法	51	6 速度・加速度, 曲線の媒介変数表示	88
問題	54	7 近似式	95
3 節 いろいろな関数の導関数	55	問題	100
1 三角関数の導関数	55	練習問題 A, B	101, 102
2 対数関数・指数関数の導関数	57		

Ⅲ章 積分法とその応用

1 節 不定積分	104	3 定積分の部分積分法	126
1 基本公式	104	問題	127
2 置換積分法	107	3 節 積分法の応用	128
3 部分積分法	111	1 面積	128
4 いろいろな関数の不定積分	113	2 体積	133
問題	118	3 曲線の長さ	136
2 節 定積分	119	4 定積分の近似値	140
1 定積分	119	5 微分方程式	145
2 定積分の置換積分法	121	問題	154
		練習問題 A, B	155, 156

Ⅳ章 確率・統計

1 節 確率	158	問題	189
1 確率変数と確率分布	158	2 節 統計的推測	190
2 二項分布	164	1 母集団と標本	190
3 平均	168	2 標本平均の分布	194
4 分散・標準偏差	172	3 推定	199
5 連続分布	178	4 仮説の検定	202
6 正規分布	181	問題	208
7 二項分布と正規分布	186	練習問題 A, B	209, 210

付録

補充問題 212

解答 216

索引 219

数表 三角関数表 221

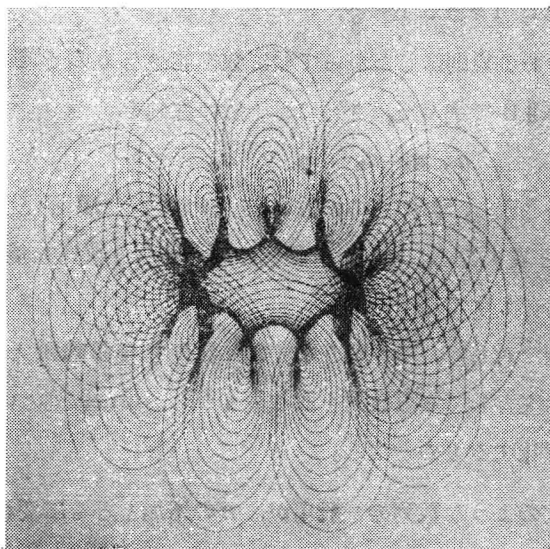
平方・平方根・逆数表 222

正規分布表 223

乱数表 224

ギリシア文字とその読み方 226

I ・ 数列の極限



1 節 数列の収束と発散

2 節 無限級数

1 節 数列の収束と発散

1 収束, 発散の意味

たとえば

$$1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \dots$$

のように, ある規則にしたがって順に数を並べたものを **数列** とよぶことは数学ⅡB で学んだ。さらに, 一般に数列を

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

のように書き表し, おのおのの数 a_n をその数列の **項** ということ, 数列を $\{a_n\}$ と表すこと, また, 有限個の項からなる数列を **有限数列** とよぶことなどもすでに学んだ。

有限数列に対して, 項が限りなく続く数列を **無限数列** という。

本章では主として無限数列を取り扱うから, 単に数列といえば, 無限数列を意味するものとする。

例 1 次のような数列の一般項が, n の増加とともに変わっていくようすを図に表してみよう。

$$(1) 1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \dots$$

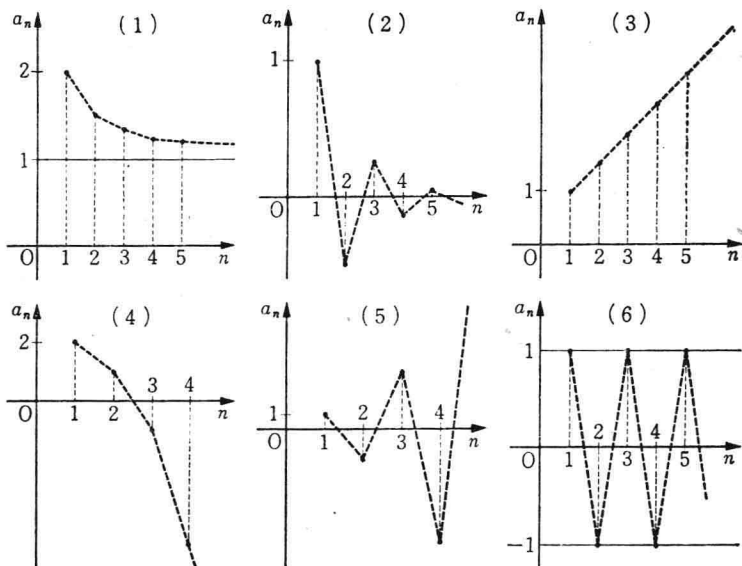
$$(2) 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

$$(3) 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots$$

$$(4) 3-1, 3-2, 3-2^2, \dots, 3-2^{n-1}, \dots$$

$$(5) 1, -2, 4, -8, \dots, (-2)^{n-1}, \dots$$

$$(6) 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$$



上の図からわかるように、 n が大きくなるにつれて一般項の値が変化するようすは、数列によってそれぞれ異なっている。たとえば、 n が限りなく大きくなるとき、数列(1)の項 $1 + \frac{1}{n}$ は1に近づき、数列(2)の項 $(-\frac{1}{2})^{n-1}$ は0に近づく。

一般に、無限数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

の項 a_n が、 n が限りなく大きくなるにつれて、一定の値 α に限りなく近づくとき、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい、 α を数列 $\{a_n\}$ の極限值という。

数列 $\{a_n\}$ の極限值が α であることを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

または

4 I 数列の極限

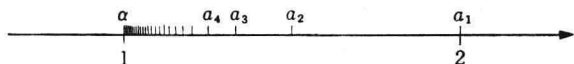
$n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \alpha$

と書き表す。^{*)} (“ $n \rightarrow \infty$ のとき”を略して単に “ $a_n \rightarrow \alpha$ ” と書くことがある。)

例 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するということは、数直線上に点 a_n をとれば n が大きくなると、点 a_n と点 α との距離 $|a_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなるということにほかならない。

上の例 2 の数列 $\left(a_n = 1 + \frac{1}{n}\right)$ については、下の図のようになる。



問 1 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ の初項から第 5 項までを表す点を数直線上にとってみよ。

上に述べたように、 $a_n \rightarrow \alpha$ は $|a_n - \alpha| \rightarrow 0$ と同じことである。特に、 $a_n \rightarrow 0$ は $|a_n| \rightarrow 0$ と同じことである。

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するというとき、項 a_n のうちに α に等しいものがあったとしてもさしつかえない。

特に、すべての a_n が α に等しい数列、すなわち

$$\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha, \dots$$

も α に収束すると考え

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と書く。このような数列を **定数数列** という。

*) ∞ は “無限大” と読む。

p.2の例1で数列(3), (4), (5), (6)はいずれも収束しない。収束しない無限数列は**発散**するという。

これらの数列のうち, (3)の項 $\frac{n+1}{2}$ は, n が限りなく大きくなるにつれて限りなく大きくなる。

一般に数列 $\{a_n\}$ において, n が限りなく大きくなるにつれて a_n が限りなく大きくなるとき, 数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散** するといひ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

または

$$n \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \rightarrow \infty$$

と書く。

これに対して, 数列(4)の項 $3-2^{n-1}$ は, $n \rightarrow \infty$ のとき負でその絶対値 $|3-2^{n-1}|$ は限りなく大きくなる。すなわち, $3-2^{n-1}$ は限りなく小さくなる。

一般に数列 $\{a_n\}$ において, n が限りなく大きくなるにつれて, a_n が負でその絶対値が限りなく大きくなるとき, 数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散** するといひ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

または

$$n \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \rightarrow -\infty$$

と書く。

$$\boxed{\text{例}} \quad 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3-2^{n-1}) = -\infty$$

負の無限大とはっきり区別するために, 正の無限大を $+\infty$ と書くこともある。たとえば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ などと書く。

また、p.2の数列(5), (6)は収束もしないし、正の無限大にも負の無限大にも発散しない。このような無限数列は振動するという。

{	収束		$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$
			$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
	発散	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
		負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
		振動	その他の場合

—— 数列の収束・発散 ——

注意 無限数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散するとき、 $\{a_n\}$ の極限が ∞ であるということもある。 $-\infty$ に発散する場合も同様である。

問2 次の数列の収束、発散をいえ。

(1) $-5, -2, 1, 4, \dots, 3n-8, \dots$

(2) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

(3) $6, 4, 6, 4, \dots, 5+(-1)^{n-1}, \dots$

(4) $2, \frac{2}{3}, \frac{10}{9}, \frac{26}{27}, \dots, 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots$

2 極限の求め方

数列

$$1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \dots \quad (1)$$

は1に収束し、数列

$$4.2, 4.02, 4.002, 4.0002, \dots \quad (2)$$

は4に収束する。

(1)の各項を3倍した数列をつくれば

$$3.3, 3.03, 3.003, 3.0003, \dots$$

となり、これは $3 \times 1 = 3$ に収束する。

また、(1), (2)の各項の和を項とする数列をつくれば

$$5.3, 5.03, 5.003, 5.0003, \dots$$

となり、これは $1+4=5$ に収束する。

差, 積, 商についても同様のことが成り立つ。

〔I〕 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

ならば

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha \quad (k \text{ は定数})$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{ただし } \beta \neq 0)$$

—— 極限の四則 ——

上にあげた法則と

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

とを用いて、次のような問題を解くことができる。

例題 1 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n-1}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2-n+1}$$