"十一五"国家重点图书　　计算机科学与技术学科前沿丛书

计算机科学与技术学科研究生系列教材（中文版）

高级范畴论

王兵山 毛晓光 刘万伟 编著

清华大学出版社

“十一五 重点图书 计算机科学与技术学科前沿丛书

计算机 科研究生系列教材（中文版）

高级范畴论

王兵山 毛晓光 刘万伟 编著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

范畴论是一种高度抽象的数学理论，本书着重介绍范畴论的基础概念和基本性质。主要内容包括 6 章：第 1 章着重介绍范畴的基本定义及其运算，第 2 章讨论范畴中的特殊态射与特殊对象，第 3 章讨论范畴中的各类极限，第 4 章讨论函子与自然变换，第 5 章讨论范畴中的“伴随”现象，第 6 章讨论计算机科学中的范畴。建议在阅读本书内容时，将第 3～5 章作为重点进行学习；同时，建议将第 5 章的内容作为难点进行学习。

本书适合作为高等学校计算机科学或软件理论领域研究生的教材，也适合相关领域的广大科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高级范畴论/王兵山，毛晓光，刘万伟编著. --北京：清华大学出版社，2012.12
计算机科学与技术学科前沿丛书　计算机科学与技术学科研究生系列教材（中文版）
ISBN 978-7-302-30342-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①王…②毛…③刘…　Ⅲ.①范畴论-研究生-教材　Ⅳ.①O154.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 240830 号

责任编辑：张瑞庆
封面设计：傅瑞学
责任校对：焦丽丽
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：10.25　　**字　　数**：250 千字
版　　次：2012 年 12 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 12 月第1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：23.00 元

产品编号：049831-01

序

未来的社会是信息化的社会，计算机科学与技术在其中占据了最重要的地位，这对高素质创新型计算机人才的培养提出了迫切的要求。计算机科学与技术已经成为一门基础技术学科，理论性和技术性都很强。与传统的数学、物理和化学等基础学科相比，该学科的教育工作者既要培养学科理论研究和基本系统的开发人才，还要培养应用系统开发人才，甚至是应用人才。从层次上来讲，则需要培养系统的设计、实现、使用与维护等各个层次的人才。这就要求我国的计算机教育按照定位的需要，从知识、能力、素质三个方面进行人才培养。

硕士研究生的教育须突出“研究”，要加强理论基础的教育和科研能力的训练，使学生能够站在一定的高度去分析研究问题、解决问题。硕士研究生要通过课程的学习，进一步提高理论水平，为今后的研究和发展打下坚实的基础；通过相应的研究及学位论文撰写工作来接受全面的科研训练，了解科学研究的艰辛和科研工作者的奉献精神，培养良好的科研作风，锻炼攻关能力，养成协作精神。

高素质创新型计算机人才应具有较强的实践能力，教学与科研相结合是培养实践能力的有效途径。高水平人才的培养是通过被培养者的高水平学术成果来反映的，而高水平的学术成果主要来源于大量高水平的科研。高水平的科研还为教学活动提供了最先进的高新技术平台和创造性的工作环境，使学生得以接触最先进的计算机理论、技术和环境。高水平的科研也为高水平人才的素质教育提供了良好的物质基础。

为提高高等院校的教学质量，教育部最近实施了精品课程建设工程。由于教材是提高教学质量的关键，必须加快教材建设的步伐。为适应学科的快速发展和培养方案的需要，要采取多种措施鼓励从事前沿研究的学者参与教材的编写和更新，在教材中反映学科前沿的研究成果与发展趋势，以高水平的科研促进教材建设。同时应适当引进国外先进的原版教材，确保所有教学环节充分反映计算机学科与产业的前沿研究水平，并与未来的发展趋势相协调。

中国计算机学会教育专业委员会在清华大学出版社的大力支持下，进行了计算机科学与技术学科硕士研究生培养的系统研究。在此基础上组织来自多所全国重点大学的计算机专家和教授们编写和出版了本系列教材。作者们以自己多年来丰富的教学和科研经验为基础，认真研究和结合我国计算机科学与技术学科硕士研究生教育的特点，力图使本系列教材对我国计算机科学与技术学科硕士研究生的教学方法和教学内容的改革起引导作用。本系列教材的系统性和理论性强，学术水平高，反映科技新发展，具有合适的深度和广度。同时本系列教材两种语种（中文、英文）并存，三种版权（本版、外版、合作出版）形式并存，这在系列教材的出版上走出了一条新路。

相信本系列教材的出版，能够对提高我国计算机硕士研究生教材的整体水平，进而对我国大学的计算机科学与技术硕士研究生教育以及培养高素质创新型计算机人才产生积极的促进作用。

陈火旺

陈火旺现任国防科学技术大学教授、中国工程院院士。

前 言

范畴论是从数学各个领域中概括出来的一种高度抽象的数学系统。例如，集合论研究的集合与函数，群论研究的群与群同态，拓扑学研究的拓扑空间与连续函数，等等。

范畴论的迅速发展，也影响到许多数学分支，例如代数学、代数几何学、拓扑学、微分几何学、函数论等。20 世纪 80 年代以后, 又发展起纤维范畴论和拓扑范畴论的理论。

计算机科学家对范畴论的浓厚兴趣多半是由于函数式程序设计语言的程序设计很像是一个范畴。事实上，计算机科学中常见的演绎系统本身就是一个范畴，由此产生并发展起来了计算机范畴论。

本书着重介绍范畴论的基本概念和基本性质。本书主要由 6 章内容构成：

第 1 章着重介绍范畴的基本定义及其相关运算。本章从集合、类以及函数的基本定义开始讲起，逐步引入范畴的数学定义，并介绍范畴的 5 种基本运算：子范畴、商范畴、积范畴、和范畴以及对偶范畴。在本章中，还会穿插介绍由若干经典数学结构构成范畴的例子。

第 2 章讨论范畴中的特殊态射与特殊对象，主要内容包括：section、retraction、同构态射，单态射、外态射、双态射，初始对象、终止对象、零对象，以及常态射、余常态射、零态射等概念。

第 3 章讨论范畴中的各类极限。首先，将讨论 4 类特殊的极限：等子/余等子，积/余积，回拉/外推，核/余核。而后给出范畴极限/余极限的一般形式定义，并给出极限/余极限存在的一个判定定理。

第 4 章着重介绍函子及自然变换，主要内容包括：协变/反变一元函子及多元函子的定义，hom- 函子的定义，函子的分类及性质，自然变换及其 *- 积，最后引入通过等价函子介绍范畴的等价与同构的概念。

第 5 章介绍范畴中的“伴随”现象。本章首先介绍一种特殊的伴随 —— Galois 对应，而后定义泛映射/余泛映射的概念，进而给出伴随以及伴随函子的定义，最后讨论伴随的存在性以及伴随与极限之间的关系。

第 6 章讨论计算机科学中范畴的实例，主要内容包括：由函数式程序设计语言构成的范畴，由演绎系统构成的范畴以及带类型 λ - 演算构成的范畴。

本书能够得以顺利出版，离不开清华大学出版社的大力支持和帮助。在此，本书作者向清华大学出版社表示诚挚的感谢。

由于本书编写时间仓促，加之作者水平有限，书中难免出现谬误，恳请读者不吝赐教。

作 者

2012 年 8 月于国防科技大学

目 录

第 1 章 范畴及其运算

1.1 集合、类与函数

按照 G. Cantor 的想法，由一些确定的且相互区别的对象汇集而组成的一个整体，称为**集合**，组成该集合的对象称为它的**元素**，至于这些对象如何组合，有以下两条重要原则。

(1) **外延原则**：一个集合由它的元素完全决定。这就是说，若两个集合的元素相同，则它们为同一个集合。

(2) **概括原则**：对任意一个性质 P，均存在一个集合 S，它的元素恰是具有性质 P 的那些对象。

根据外延原则，这个集合 S 必是唯一的。故常用 $\{x \mid P(x)\}$ 表示，即

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

然而，罗素在 1902 年发现，若令

$$T = \{x \mid x \notin x\}$$

则 T 不是集合，这就是著名的**罗素悖论**。

为了克服朴素集合论中的悖论，必须对概括原则加以修改。通常采用的成功做法如下：

(1) 把概括原则中的“存在一个集合 S”修改为“存在一个类 S”。

类是一个比集合更为广泛的概念，所有的集合都是类，但类不一定是集合。不是集合的类称为**真类**。例如，上面的 T 就是一个真类。

(2) 用下述的原则 1 至原则 6 取代关于集合的概括原则。

为简便起见，我们采用纯集合论，即所有的对象均是集合。因此，真类既不能是集合的元素，也不能是真类的元素。下面列举关于类和集合的若干存在性原则。

1) 外延原则：一个类由它的元素完全决定。

定义 1.1.1 设 S_1 和 S_2 均是类。若 S_1 和 S_2 满足

$$\forall x.(x \in S_1 \to x \in S_2)$$

则称 S_1 为 S_2 的**子类**，记为 $S_1 \subseteq S_2$。如果 $S_1 \subseteq S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1$，则由外延原则知道，S_1 和 S_2 为同一个类，记为 $S_1 = S_2$。如果 $S_1 \subseteq S_2$ 且 $S_1 \neq S_2$，则称 S_1 为 S_2 的**真子类**，记为 $S_1 \subset S_2$。

2) 概括原则：对于任意一个性质 P，均存在一个类 S，它的元素恰是具有性质 P 的那些对象。

根据外延原则，这个类 S 必是唯一的，故常用 $\{x \mid P(x)\}$ 表示，即

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

3) 原则 1：存在一个不含任何元素的集合，称为**空集**。

根据外延原则，空集必是唯一的，故常用 $\varnothing$ 表示。

4) 原则 2：对任意二集合 X 与 Y，均存在一个集合 S，它的元素恰为 X 与 Y，称为 X 与 Y 的**无序偶集合**。

根据外延原则，这个集合必是唯一的，故常用 $\{X, Y\}$ 表示。当 $X = Y$ 时，简写为 $\{X\}$，并称 $\{X\}$ 为 X 的**单元素集合**。

定义 1.1.2 对任意二集合 X 与 Y，若令

$$\langle X, Y\rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$$

则 $\langle X, Y\rangle$ 为一个集合，称为 X 与 Y 的**有序偶集合**。这时，显然有

$$\langle X, Y\rangle = \langle U, V\rangle \quad \text{当且仅当} \quad X = U \text{ 且 } Y = V$$

5) 原则 3：对任意集合 S，均存在 S 的**幂集** $\mathscr{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$。

6) 原则 4：对任意集合 S，均存在 S 的**并集** $\bigcup S = \{x \mid \text{有 } U \in S \text{ 使 } x \in U\}$。

7) 原则 5：对任意性质 P 和集合 S，存在集合 $\widetilde{S} = \{x \mid x \in S \text{ 且 } P(x)\}$。

原则 5 又称**子集分离原则**，因为它是通过性质 P 从 S 中分离出的一个子集 $\widetilde{S}$。若令

$$V = \{x \mid x = x\}$$

则由概括原理知道，V 是一个类。但因为

$$T = \{x \mid x \in V \text{ 且 } x \notin x\}$$

所以由子集分离原则知道，V 必是一个真类。

若 S、S_1 和 S_2 均是类，则令

$$\begin{aligned}
\bigcup S &= \{x \mid \text{有 } U \in S \text{ 使 } x \in U\} \\
\bigcap S &= \{x \mid \text{若 } U \in S \text{ 则 } x \in U\} \\
S_1 \times S_2 &= \{\langle x, y\rangle \mid x \in S_1 \text{ 且 } y \in S_2\} \\
S_1 \setminus S_2 &= \{x \mid x \in S_1 \text{ 且 } x \notin S_2\} \\
\sim S &= V \setminus S
\end{aligned}$$

根据概括原则，$\bigcup S$、$\bigcap S$、$S_1 \times S_2$、$S_1 \setminus S_2$ 和 $\sim S$ 均是类，且有

$$\sim \varnothing = V \qquad \sim V = \varnothing$$
$$V = S \cup \sim S \qquad \bigcup V = V$$

定义 1.1.3　若 S_1 和 S_2 均是类且 $R \subseteq S_1 \times S_2$，则称 R 是一个从 S_1 到 S_2 的**二元关系类**，简称**关系类**。并令

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}R &= \{x \mid \exists y.(y \in S_2 \wedge \langle x, y\rangle \in R)\}\\ \mathrm{ran}R &= \{y \mid \exists x.(x \in S_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R)\}\\ \mathrm{fld}R &= \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R\end{aligned}$$

当 R 为一个集合时，则称类关系 R 为**集合关系** R，并简称关系 R。

关于类关系的**合成**、**逆**和**限制**定义如常，而且相应的性质也成立。

定义 1.1.4　设 S_1 和 S_2 均是类，若 $F \subseteq S_1 \times S_2$ 满足

$$\forall x.\forall y.\forall z.(\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in F \to y = z)$$

则称 F 为一个从 S_1 到 S_2 的**部分函数**，记为 $F : S_1 \rightsquigarrow S_2$。

若 F 为集合，则称类部分函数 F 为**集合部分函数**，简称**部分函数**。如果 $\mathrm{dom}F = S_1$，则称类部分函数 F 为**类全函数**，简称**类函数**。

关于类函数的**内射**、**满射**、**双射**、**左逆**、**右逆**、**逆**以及类部分函数的**合成**和**限制**定义如常，而且相应的性质也均成立。

8) 单值化原则：对任意类关系 R，均存在类部分函数 F 使

$$F \subseteq R \quad \text{且} \quad \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}R$$

单值化原则与概括原则无关，它等价于选择公理。

9) 类选择公理：若类 S 的元素均是非空集合，则有选择函数 $\varphi : S \to \bigcup S$ 使

$$\varphi(x) \in x \qquad x \in S$$

当 S 为集合时，该公理也称为**选择公理**。

10) 原则 6：若 $F : S_1 \rightsquigarrow S_2$ 为类部分函数且 $S \subseteq S_1$ 为集合，则 $\mathrm{ran}(F\restriction_S)$ 为集合。这个原则称为**替换原则**，当 $S \subseteq S_1$ 为集合时，它保证了替换结果 $\mathrm{ran}(F\restriction_S)$ 为集合。

定义 1.1.5　设 S 为集合且 $X \in S$。若 $S \cap X = \emptyset$，则称 X 为 S 的**极小元**。
显然，X 为集合 S 的极小元，当且仅当 $X \in S$ 且 $S \cap X = \emptyset$。
注意，对于真类而言，我们一般不谈论它的极小元。

11) 极小元存在原则：每个非空集合均有极小元。

这个原则与概括原则无关，它是对集合的一种限制，用以排除一些非正规的“集合”，因此它又称为**正规性原则**。由此原则不难知道：

(1) 若 X 为集合，则 $X \notin X$。

(2) 若 X 和 Y 均是集合，则 $\neg(X \in Y \wedge Y \in X)$。

(3) 若 $X_0, \cdots, X_n$ 均是集合，则 $\neg(X_0 \in X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1} \in X_n \wedge X_n \in X_0)$。

(4) 不存在集合的无穷序列 $X_0, X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots$ 使 $\cdots \in X_{n+1} \in X_n \in \cdots \in X_1 \in X_0$。

定义 1.1.6 若 S 为集合，则令

$$S^+ = S \cup \{S\}$$

并称 S^+ 为 S 的**后继**。

显然，集合 S 的后继 S^+ 仍为集合。

自然数可用集合定义如下：

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= 0^+ \\ 2 &= 1^+ \\ &\vdots \end{aligned}$$

也可以归纳如下：

(1) $0 = \varnothing$ 为自然数。

(2) 若 n 为自然数，则 n^+ 为自然数。

(3) 每个自然数均可通过有限次应用 (1) 和 (2) 获得。

12) 原则 7：所有的自然数形成一个集合。

这个原则又称**无穷原则**，它保证了无穷集合的存在性。

所有自然数形成的集合称**自然数集合**，用 ω 表示。这时显然有

$$0 \in \omega \wedge \forall x.(x \in \omega \to x^+ \in \omega)$$
$$\forall x.(x \in \omega \to x = 0 \vee \exists y.(y \in \omega \wedge x = y^+))$$

定义 1.1.7 设 A 和 B 均为集合：

(1) 若有内射 $f : A \to B$，则记为 $\#A \leqslant \#B$（或 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{B}}$）。

(2) 若有双射 $f : A \to B$，则称 A 与 B **等势**，记为 $\#A = \#B$（或 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$）。

(3) 若 $\#A \leqslant \#B$ 且 $\#A \neq \#B$，则记为 $\#A < \#B$（或 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$）。

定义 1.1.8 **序数**是自然数的推广，它可以归纳定义如下：

(1) 0 为序数。

(2) 若 α 为序数，则 α^+ 为序数。

(3) 若 s 为序数的一个集合（即 s 的元素皆是序数），则 $\bigcup s$ 为序数。

(4) 每个序数皆可以通过有限次应用 (1) ~ (3) 获得。

关于序数，有几点说明：

(1) 每个自然数 n 都是序数。

(2) ω 是一个序数。

(3) $\omega + 1 = \omega^+$、$\omega + 2 = (\omega + 1)^+ \cdots$ 都是序数。

(4) $\omega + \omega = \bigcup\{\omega + n \mid n \in \omega\}$ 也是序数，将其记为 $2 \cdot \omega$，同样还有序数 $3 \cdot \omega$，$\cdots$，$n \cdot \omega$。

(5) $\omega \cdot \omega = \bigcup\{n \cdot \omega \mid n \in \omega\}$ 也是序数，记为 ω^2，同样还有序数 ω^3，$\cdots$，ω^n，$\cdots$，ω^ω，$\cdots$。

在序数之间可定义二元小于关系 $<$ 如下：

$$\text{若 } \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 皆是序数，则 } \alpha<\beta \text{ 当且仅当 } \alpha\in\beta$$

并把 $\alpha<\beta\vee\alpha=\beta$ 简写为 $\alpha\leqslant\beta$。

定义 1.1.9　设 A 为集合，

(1) 称 A 为 **$\in$- 连接的**，是指 A 满足

$$\forall x\in A.\forall y\in A.(x\in y\vee x=y\vee y\in x)$$

(2) 称 A 为**传递的**，是指 A 满足

$$\forall x.\forall y.(x\in y\wedge y\in A\rightarrow x\in A)$$

可以证明：

(1) α 为序数当且仅当 α 是传递的和 $\in$- 连接的。

(2) 序数具有**三岐性**：若 α 和 β 为任意二序数，则恰有以下三者之一成立：

$$\alpha<\beta,\quad \alpha=\beta,\quad \beta<\alpha$$

通常，用 On 表示所有序数组成的类。显然，On 是一个真类，而且 On 上的类二元关系“$\leqslant$”是自反的、反对称的和传递的。

除 0 外的其他序数分为**后继序数**和**极限序数**两种：

① 序数 α 为后继序数：有序数 β 使 $\alpha=\beta^+$；

② 序数 α 为极限序数：$\alpha\neq 0$ 且 α 不是后继序数。

定义 1.1.10　若序数 α 满足

$$\forall\beta.(\beta<\alpha\rightarrow\#\beta<\#\alpha)$$

则称 α 为**基数**(即开始序数)。

由此定义，每个自然数 n 都是基数，ω 也是基数。但是，$\omega+1$，$\omega+2$，2ω，$\cdots$，ω^2，$\cdots$，ω^ω 都不是基数，因为它们都与 ω 等势。

如果令

$$\omega_1=\{\alpha\mid\alpha \text{ 是序数且 } \#\alpha\leqslant\#\omega\}$$

那么可以证明 ω_1 为一个基数。

类似地，对于每个后继序数 α，还可以令

$$\omega_{\alpha+1}=\{\beta\mid\beta \text{ 是序数且 } \#\beta\leqslant\#\omega_\alpha\}$$

对每个极限序数 α，令

$$\omega_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$$

则可以证明每个 ω_α 都是基数。由于这个证明需要超限归纳法，这里不给出。

一般，也把 ω 写作 ω_0。这样，我们就获得了一个基数序列

$$\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots, \omega_\alpha, \cdots$$

在有的教科书上，也把这些基数写作

$$\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_n, \cdots, \aleph_\alpha, \cdots$$

这些基数对应的序数的序，仍用 $\leqslant$ 表示，称为基数的**自然序**。

比类更广泛的概念是"**超类**"，其元素皆是类（即集合或真类）。对于超类和类，也可以仿照对类和集合那样处理，有类似的原则，以及关于超类的代数运算、超类关系、超类部分函数和超类函数等。而且还有与此相应的原则、概念、性质和结果，这里就不再详述了。

1.2 图、图同态与图自然变换

定义 1.2.1 若 O 和 M 均为类，$\text{source}: M \to O$ 且 $\text{target}: M \to O$，则称四元偶 $\mathcal{G} = \langle O, M, \text{source}, \text{target}\rangle$ 为**图**。

(1) 称 O 为 $\mathcal{G}$ 的**结点类**，其元素称为 $\mathcal{G}$ 的**结点**。

(2) 称 M 为 $\mathcal{G}$ 的**箭头类**，其元素称为 $\mathcal{G}$ 的**箭头**。

(3) 若 $f \in M$，则称 $\text{source}(f)$ 为 f 的**源**，$\text{target}(f)$ 为 f 的**靶**。

(4) 若 $f \in M$ 使 $A = \text{source}(f)$ 且 $B = \text{target}(f)$，则称 f 为从 A 到 B 的**箭头**，记为 $f: A \to B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$。

(5) 若 $A, B \in O$，则令

$$\mathcal{G}[A, B] = \{f \in M \mid \text{source}(f) = A, \text{target}(f) = B\}$$

在不引起混淆时，又常简写为 $[A, B]$。

几点说明如下：

(1) 若 $O = \varnothing$，则 $\mathcal{G} = \langle\varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$，此时称 $\mathcal{G}$ 为**空图**。

(2) 若 $M = \varnothing$，则 $\mathcal{G} = \langle O, \varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$，此时称 $\mathcal{G}$ 为**离散图**。

(3) 若 O 和 M 均为集合，则称 $\mathcal{G}$ 为**小图**。

(4) 若 O 和 M 均为有穷集合，则称 $\mathcal{G}$ 为**有穷图**。

(5) 若当 $A, B \in O$ 时，$[A, B]$ 均为集合，则称 $\mathcal{G}$ 为**局部小图**。

(6) 若 $f \in O$，使 $\text{source}(f) = \text{target}(f)$，则称 f 为 $\mathcal{G}$ 的**自圈**。

(7) 若 $\mathcal{G}$ 无自圈，且当 $A, B \in O$ 时皆有 $\#[A, B] \leqslant 1$，则称 $\mathcal{G}$ 为**简单图**。

(8) 当取 $\Psi = \langle\text{source}, \text{target}\rangle$ 时，图 $\mathcal{G}$ 可表示为 $\mathcal{G} = \langle O, M, \Psi\rangle$。

由上可知：

(1) 有穷图为小图。

(2) 离散图为简单图。

(3) 简单图为局部小图。

(4) 每个箭头都有唯一的源和唯一的靶。

例 1.1 设 A 和 B 均为集合且 $R \subseteq A \times B$。若令

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(\langle a, b\rangle) &= a \\ \mathrm{target}(\langle a, b\rangle) &= b \end{aligned} \qquad \langle a, b\rangle \in R$$

则 $\mathcal{G}_R = \langle A \cup B, R, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 为图，且为小图。

例 1.2 设 $\mathscr{L}$ 是一个计算机程序设计语言，$TP(\mathscr{L})$ 为 $\mathscr{L}$ 的数据类型集合，$TPF(\mathscr{L})$ 为 $\mathscr{L}$ 的类型化函数集合。若令

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(f) &= f \text{ 的自变元类型} \\ \mathrm{target}(f) &= f \text{ 的结果类型} \end{aligned} \qquad f \in TPF(\mathscr{L})$$

则 $\mathcal{G}_{\mathscr{L}} = \langle TP(\mathscr{L}), TPF(\mathscr{L}), \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 是一个图，且为小图。

例 1.3 设 FPL 为一个一阶逻辑系统，WFF 为 FPL 的合式公式集合，Π 为 FPL 的所有从单个合式公式出发的形式证明的集合。若令

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(\pi) &= \pi \text{ 的前提} \\ \mathrm{target}(\pi) &= \pi \text{ 的结果} \end{aligned} \qquad \pi \in \Pi$$

则 $\mathcal{G}_{FPL} = \langle WFF, \Pi, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 是一个图，且为小图。

定义 1.2.2 设图 $\mathcal{G} = \langle O, M, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 且 $\mathcal{G}' = \langle O', M', \mathrm{source}', \mathrm{target}'\rangle$。

(1) 若 $\Phi_0 : O \to O'$ 和 $\Phi_1 : M \to M'$ 满足

$$\Phi_0 \circ \mathrm{source} = \mathrm{source}' \circ \Phi_1 \quad \text{且} \quad \Phi_0 \circ \mathrm{target} = \mathrm{target}' \circ \Phi_1$$

则称 $\Phi = \langle \Phi_0, \Phi_1\rangle$ 为从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}'$ 的**图同态**，并记为 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，见图 1.1。

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{source}(f) \arrow[r, Rightarrow, "\Phi_0"] \arrow[d, "f"', ""{name=F}] & \Phi_0(\mathrm{source}(f)) \arrow[r, equal] & \mathrm{source}'(\Phi_1(f)) \arrow[d, "\Phi_1(f)", ""'{name=G}] \\
\mathrm{target}(f) \arrow[r, Rightarrow, "\Phi_0"] & \Phi_0(\mathrm{target}(f)) \arrow[r, equal] & \mathrm{target}'(\Phi_1(f))
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\Phi_1"]
\end{tikzcd}$$

图 1.1

(2) 设 $\Phi_1 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，若 Φ_0 和 Φ_1 均为双射，则称 Φ 为**图同构**。

(3) 若有图同态 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，则称 $\mathcal{G}$ **同态于** $\mathcal{G}'$，记作 $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}'$。

(4) 若有图同构 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，则称 $\mathcal{G}$ **同构于** $\mathcal{G}'$，记作 $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$。

为方便起见，今后统一用 Φ 表示 Φ_0 和 Φ_1，因此

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \Phi_0(A), \qquad & A \in O \\ \Phi(f) &= \Phi_1(f), \qquad & f \in M \end{aligned}$$

例 1.4 对每个图 $\mathcal{G} = \langle O, M, \text{source}, \text{target}\rangle$，取 $\mathbb{I}_{\mathcal{G}} = \langle \mathbb{I}_O, \mathbb{I}_M\rangle$，则 $\mathbb{I}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$，并称 $\mathbb{I}_{\mathcal{G}}$ 为 $\mathcal{G}$ 的**恒等图同态**。

显然，$\mathbb{I}_{\mathcal{G}}$ 为图同构，故 $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}$。

例 1.5 设图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 如图 1.2 所示。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] & 2 \arrow[r, "v"] \arrow[loop above, "u"] & 3 \\
4 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[loop above, "h"] \arrow[loop below, "k"] \\
C &
\end{tikzcd}
$$

(a) 图 $\mathcal{G}$ (b) 图 $\mathcal{G}'$

图 1.2

这时可定义图同态 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ 如下:

$$
\begin{array}{ll}
\Phi(1) = A & \Phi(x) = f \\
\Phi(2) = B & \Phi(y) = g \\
\Phi(4) = C & \Phi(u) = h \\
& \Phi(v) = k
\end{array}
$$

例 1.6 若图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 如图 1.3 所示，

$$
1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3 \qquad A \xrightarrow{f} B
$$

(a) 图 $\mathcal{G}$ (b) 图 $\mathcal{G}'$

图 1.3

则不存在图同态 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，即 $\mathcal{G} \not\preceq \mathcal{G}'$。

例 1.6 说明，并非任意两个图之间都一定有图同态，更不用说图同构。

定理 1.2.1 设 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，$\Psi : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}''$ 且 $\mathcal{G} = \langle O, M, \text{source}, \text{target}\rangle$。若令

$$
\begin{aligned}
(\Psi \circ \Phi)(A) &= \Psi(\Phi(A)), \qquad A \in O \\
(\Psi \circ \Phi)(f) &= \Psi(\Phi(f)), \qquad f \in M
\end{aligned}
$$

则 $\Psi \circ \Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}''$，并称 $\Psi \circ \Phi$ 为 Ψ 与 Φ 的**合成**。

证明很容易，留作练习。

定义 1.2.3 设 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$。

(1) 若 $\Psi : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ 使

$$
\Phi \circ \Psi = \mathbb{I}_{\mathcal{G}'} \quad 且 \quad \Psi \circ \Phi = \mathbb{I}_{\mathcal{G}}
$$

则称 Ψ 为 Φ 的**逆**。

(2) 若有 $\Psi : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ 为 Φ 的逆，则称 Φ **有逆**。

这时，我们不难证明有以下结论:

(1) 图同态的合成是可结合的，且保持图同构。

(2) 若 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，则 $\varPhi\circ\mathbb{I}_{\mathcal{G}}=\mathbb{I}_{\mathcal{G}'}\circ\varPhi$。

(3) 若 $\varPhi$ 有逆，则 $\varPhi$ 的逆唯一，并记为 $\varPhi^{-1}$。

(4) 若 $\varPhi$ 有逆，则 $\varPhi^{-1}:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}$ 也有逆，且 $(\varPhi^{-1})^{-1}=\varPhi$。

(5) 图同态 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 有逆，当且仅当 $\varPhi$ 为图同构。

(6) 若 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 为图同构且 $\varPhi=\langle\varPhi_0,\varPhi_1\rangle$，则 $\varPhi^{-1}=\langle\varPhi_0^{-1},\varPhi_1^{-1}\rangle$ 且 $\varPhi^{-1}:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}$ 也是图同构。

(7) 若 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 和 $\varPsi:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}''$ 均有逆，则 $\varPsi\circ\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}''$ 也有逆，且 $(\varPsi\circ\varPhi)^{-1}=\varPhi^{-1}\circ\varPsi^{-1}$。

现在，我们来介绍一个重要的概念，即图自然变换。

定义 1.2.4 设 $\mathcal{G}=\langle O,M,\text{source},\text{target}\rangle$ 和 $\mathcal{G}'=\langle O',M',\text{source}',\text{target}'\rangle$ 均为图。$\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 且 $\varPsi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，以及 M' 上的局部二元运算 $\circ$ 使得当 $f,g\in M'$ 且 $\text{target}'(f)=\text{source}'(g)$ 时，恒有

① $g\circ f\downarrow$ 当且仅当 $\text{source}'(g)=\text{target}'(f)$。

② 若 $g\circ f\downarrow$ 则 $\text{source}'(g\circ f)=\text{source}'(f)$ 且 $\text{target}'(g\circ f)=\text{target}'(g)$。

如果 $\alpha:O\to M'$ 使

$$\alpha(\text{target}(f))\circ\varPhi(f)=\varPsi(f)\circ\alpha(\text{source}(f)),\quad f\in M$$

$$\begin{tikzcd}
\text{source}(f) \arrow[d, "f"'] & & \varPhi(\text{source}(f)) \arrow[r, "\alpha(\text{source}(f))"] \arrow[d, "\varPhi(f)"'] & \varPsi(\text{source}(f)) \arrow[d, "\varPsi(f)"] \\
\text{target}(f) & & \varPhi(\text{target}(f)) \arrow[r, "\alpha(\text{target}(f))"] & \varPsi(\text{target}(f))
\end{tikzcd}$$

图 1.4

则称 α 为从 $\varPhi$ 到 $\varPsi$ 的**自然变换**，记为 $\alpha:\varPhi\to\varPsi$，见图 1.4。

如图 1.5 所示，若 $f\in M$ 使 $A=\text{source}(f)$ 且 $B=\text{target}(f)$，即 $f:A\to B$，则

$$\varPsi(f)\circ\alpha(A)=\alpha(B)\circ\varPhi(f)$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & & \varPhi(A) \arrow[r, "\alpha(A)"] \arrow[d, "\varPhi(f)"'] & \varPsi(A) \arrow[d, "\varPsi(f)"] \\
B & & \varPhi(B) \arrow[r, "\alpha(B)"] & \varPsi(B)
\end{tikzcd}$$

图 1.5

注意，具有上述局部二元运算 $\circ$ 的图 $\mathcal{G}'$ 称为**演算系统**。