

■ 主 编 魏秀业

■ 副主编 陆辉山 吴淑芳

过程装备力学基础

GUOCHENG ZHUANGBEI
LIXUE JICHU



国防工业出版社

National Defense Industry Press

过程装备力学基础

主 编 魏秀业
副主编 陆辉山 吴淑芳
参 编 闫宏伟

国防工业出版社

• 北京 •

内 容 简 介

本书介绍在“过程装备”设计过程中所涉及的工程力学方面的基本理论与基本知识。包括弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法;薄板理论、薄壳理论、有限元分析理论、ANSYS 软件及其应用。编写过程中,理论知识的编写通俗易懂,对重要的知识点和理论均给出典型例题介绍,在有限元分析部分通过给出求解实例的具体操作步骤,使解题形象化,便于学生快速掌握有限元软件的应用,体现教材的新颖性、实践性和启发性。

该书可作为过程装备及控制工程专业的过程装备力学的基础课教材,也可作为机械类、力学类专业的弹性力学及有限元课程的参考教材,还可作为相关专业技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

过程装备力学基础/魏秀业主编. —北京:国防工业出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-118-07933-3

I. ①过… II. ①魏… III. ①化工过程—化工设备—工程力学—高等学校—教材 IV. ①TQ051

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 157927 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14 $\frac{3}{4}$ 字数 335 千字

2012 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 40.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777
发行传真:(010)88540755

发行邮购:(010)88540776
发行业务:(010)88540717

前 言

“过程装备与控制工程”本科专业担当着培养机械、化工、石油、轻工、环保及工业企业等部门从事过程控制工程的设计、研究、开发、制造、技术等工作人才的重任。本书力求从过程装备的力学认知规律出发,阐明过程设备设计、分析的基本理论与应用及其现代进展,做到新体系、厚基础、重实践、易自学、引思考。编写适合于本专业的高质量、具有专业特色的教材,对加强本专业的课程建设,使学生全面掌握设备设计的基础理论和方法,并在机械、化工、石油、电力、钢铁等部门加以应用起到积极的作用。

本书拟实现两个目标:一是较为系统地阐述“过程装备”所设计的工程力学方面基本理论和基本知识,既强调理论内容的系统性、科学性,又着眼于解决实际问题的基本思路和方法,内容在难度、深度和内容层次编排上进行必要的改造,适合于非力学工科专业本科生的教学用书;二是结合项目负责人及组成人员多年从事复杂机械及设备优化设计、故障诊断的理论和应用的研究成果,体现过程装备专业特色。

(1)将弹性力学和有限单元法作为两大主要理论,使学生掌握“过程装备”设计过程所需的弹性体的建模、应力、应变和有限元分析方法。

(2)突出薄板理论、旋薄壳理论知识,体现本书的专业特色。

(3)在有限元部分将有限元分析方法的理论、最新进展融入教学内容中,重点增加 ANSYS 应用,通过给出求解实例的具体操作步骤,使解题形象化,便于学生应用有限元软件有据可查,能够按步骤完成求解过程。充分体现本书的新颖性和启发性。

本书共分 10 章,其主要内容如下:

第 1 章主要介绍各力学分支之间的关系及差异。

第 2 章介绍弹力学概念、基本方程、弹性力学的平面问题、圣维南原理等。

第 3 章介绍薄板的基本概念,薄板弯曲的平衡方程、边界条件及圆平板的轴对称问题。

第 4 章介绍薄壳的受力特点、无力矩理论、圆筒壳轴的对称理论。

第 5 章至第 9 章主要介绍有限元的基础知识,包括有限元法概述、平面问题有限元法、轴对称问题有限元法、杆梁问题有限元法、等参数单元。

第 10 章介绍有限元通用分析软件,结合多个工程实例介绍 ANSYS 软件的应用。

本书第 1 章、第 2 章、第 5 章、第 6 章由魏秀业编写,第 3 章、第 4 章由陆辉山编写,第 7 章、第 8 章和第 9 章由吴淑芳编写,第 10 章由闫宏伟编写。在编写过程中,逯子荣、安政光对本书的公式和插图做了大量工作,在此表示感谢。

本书在编写和出版过程中,得到中北大学的资助,特此表示感谢。同时感谢参考文献所列的单位和作者。

因编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请专家和广大读者批评指正!

编 者
2012 年 5 月

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 各力学学科分支的关系	1
1.1.1 各力学研究对象	1
1.1.2 各学科之间的联系与区别	2
1.2 过程装备力学构成	3
思考题	4
参考文献	4
第 2 章 弹性力学基础	5
2.1 弹性力学中的基本假设	5
2.2 弹性力学中的几个基本概念	6
2.2.1 外力	6
2.2.2 应力	6
2.2.3 形变	8
2.2.4 位移	8
2.3 弹性力学的基本方程	9
2.3.1 平衡微分方程	9
2.3.2 几何方程	10
2.3.3 物理方程	11
2.3.4 形变协调方程	13
2.4 边界条件	14
2.4.1 位移边界条件	14
2.4.2 应力边界条件	15
2.4.3 混合边界条件	15
2.5 弹性力学平面问题	18
2.5.1 平面问题分类及基本方程	18
2.5.2 平面问题的基本方程	20
2.6 圣维南原理	25
2.6.1 意义	25
2.6.2 内容	25
2.7 弹性力学中的应力函数	26
2.8 平面问题的笛卡儿坐标解答	28
2.8.1 逆解法	28

2.8.2 半逆解法	31
2.9 弹性力学平面问题的极坐标解答	31
2.10 有限单元分析与变分原理	33
思考题	34
习题	34
参考文献	35
第3章 薄板理论	36
3.1 薄板的基本概念及基本假设	36
3.2 圆平板的轴对称问题	37
3.2.1 圆平板轴对称弯曲的基本方程	37
3.2.2 受均布载荷圆平板的应力分析	41
3.2.3 承受轴对称载荷的环板	44
思考题	50
习题	51
参考文献	52
第4章 旋转薄壳理论	53
4.1 基本概念	53
4.1.1 旋转壳体	53
4.1.2 外力与内力	54
4.2 旋转薄壳的无力矩理论	56
4.2.1 无力矩理论的基本方程	56
4.2.2 无力矩理论的应用	58
4.2.3 无力矩理论的应用范围	65
4.3 旋转薄壳的不连续分析	66
4.3.1 概述	66
4.3.2 圆筒形壳体的有力矩理论	67
4.3.3 一般旋转壳体边缘弯曲的应力和变形表达式	73
4.3.4 边缘问题的求解	74
4.3.5 边缘问题求解实例	75
4.3.6 边缘应力的特点及设计中的应用	79
思考题	80
习题	80
参考文献	82
第5章 有限元法概论	83
5.1 有限元法的思想	83
5.2 有限元法的发展历程	83
5.3 有限元法的特点	85
5.4 有限元法分析过程概述	85
5.4.1 结构离散化	85

5.4.2 单元分析·····	88
5.4.3 整体分析·····	89
5.5 有限元法的应用·····	89
思考题·····	90
参考文献·····	90
第6章 平面问题有限元法 ·····	91
6.1 简单三角形单元的位移模式·····	91
6.1.1 位移模式与形函数·····	91
6.1.2 形函数性质·····	94
6.1.3 位移模式收敛性质的分析·····	95
6.2 应变矩阵、应力矩阵与单元刚度矩阵·····	97
6.2.1 用单元节点位移表示单元应变、应变矩阵·····	97
6.2.2 用单元节点位移表示单元应力、应力矩阵·····	98
6.2.3 用单元节点位移表示单元节点力、单元刚度矩阵·····	98
6.3 等效节点载荷·····	100
6.3.1 集中力的移置·····	100
6.3.2 体力的移置·····	100
6.3.3 面力的移置·····	101
6.3.4 线性位移模式下的载荷移置·····	101
6.4 整体分析·····	103
6.4.1 总体刚度方程·····	103
6.4.2 形成总体刚度矩阵的方法·····	104
6.4.3 总体刚度矩阵的性质·····	106
6.5 位移边界条件的处理·····	108
6.5.1 对角元素改1法·····	109
6.5.2 乘大数法·····	109
6.5.3 降阶法·····	110
6.6 矩形单元·····	117
6.6.1 位移函数·····	117
6.6.2 单元应变、单元应力和单元刚度矩阵·····	118
6.6.3 单元等效节点力·····	120
6.6.4 整体平衡方程·····	120
思考题·····	120
习题·····	120
参考文献·····	122
第7章 轴对称问题有限元法 ·····	123
7.1 轴对称问题概述·····	123
7.2 轴对称问题的力学基础·····	123
7.3 轴对称问题有限元法具体分析·····	125

7.3.1	位移模式	125
7.3.2	单元应变与应力	126
7.3.3	单元刚度矩阵	128
7.3.4	等效节点载荷计算	129
7.4	应用实例	132
	思考题	133
	习题	133
	参考文献	133
第8章	杆梁问题有限元法	134
8.1	概述	134
8.2	局部坐标系杆梁单元分析	135
8.2.1	局部坐标系杆单元分析	135
8.2.2	局部坐标系梁单元分析	141
8.3	杆系结构的整体分析	146
	思考题	154
	习题	154
	参考文献	156
第9章	等参数单元	157
9.1	等参数单元的引入	157
9.2	等参数变换的概念和单元变换矩阵	157
9.2.1	形函数	157
9.2.2	母单元	158
9.2.3	坐标变换	160
9.2.4	等参元	163
9.3	平面问题等参数单元	164
9.3.1	母单元	164
9.3.2	等参元	165
9.3.3	单元分析	165
9.3.4	等效节点载荷	167
9.4	空间问题等参数单元	169
9.4.1	20节点三维等参元	169
9.4.2	单元分析	170
9.4.3	等效节点载荷	172
	思考题	174
	习题	174
	参考文献	175
第10章	有限元分析软件及应用	176
10.1	有限元软件技术	176
10.2	有限元通用软件介绍	176

10.3	ANSYS 软件及应用	180
10.3.1	ANSYS 软件的功能	180
10.3.2	通用程序应用举例——ANSYS	180
10.3.3	ANSYS 的输入方式	183
10.3.4	ANSYS 的用户界面	183
10.4	ANSYS 分析应用实例	184
10.4.1	一个钢板模型的有限元分析	184
10.4.2	模态分析实例——单自由度系统的固有频率分析	198
10.4.3	受内压压力容器筒体与封头连接的应力计算	203
10.4.4	传动箱齿轮的模态分析	211
10.5	有限元分析综合实例——筒式搅拌器的动态优化设计	217
10.5.1	筒式搅拌器的结构	217
10.5.2	筒式搅拌器的工作原理	217
10.5.3	筒式搅拌器的动态优化	219
10.5.4	结论	222
	思考题	226
	习题	226
	参考文献	226

第 1 章 概 述

随着现代工业与高科技的迅猛发展,工程师们所面临的结构与设计任务变得越来越新颖、越来越复杂。目前,我国高等院校工科专业教学中所设置的基础力学课程(理论力学和材料力学)对于分析和处理复杂结构部件的应力分析和强度设计问题远远不够,需要深入地学习。

1.1 各力学学科分支的关系

1.1.1 各力学研究对象

1. 材料力学

材料力学研究的对象是杆状构件(直杆、小曲率杆),研究杆状构件其在拉压、剪切、弯曲、扭转及其组合变形作用下的应力、应变和位移。

2. 结构力学

结构力学是在材料力学的基础上研究由多杆构成的杆系结构的强度和刚度问题。而对于一般弹性实体结构,如板与壳结构、挡土墙与堤坝、地基以及其他三维实体机构来说,相应的刚度和强度问题要用弹性理论的方法来解决。

3. 弹性力学

弹性力学又称弹性理论,是固体力学的一个分支,是研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移。

4. 有限单元方法(Finite Element Method, FEM)

有限单元方法(简称有限元法)是力学、数学、物理学、计算方法、计算机技术等多种学科综合发展和集合的产物。利用有限元方法几乎可以对任意复杂的工程结构进行分析,获取结构的各种力学性能信息,对工程结构进行设计和评判,对工程事故进行分析。

5. 塑性力学

塑性力学是当物体中的某一应力或应力的组合超出材料的弹性极限之后,则需要用非线性的塑性本构关系对问题进行研究。

塑性力学的研究对象是非弹性阶段变形体,其受力与变形之间是非线性关系,如某些聚合物、生物材料、岩土材料以及处于高速变形状态下的金属材料。其具有流变性质,即所有物体的变形与时间有关。

6. 断裂力学

在船只、桥梁、压力容器及其他焊接结构上常发生低应力脆断事故,这引起工程界与科学界的重视。并开始逐渐形成一个新的学科,即专门研究裂纹与断裂的断裂学科。这

个学科最重要的分支便是断裂力学,它很好地解释含裂纹结构发生断裂的条件。

断裂力学包括线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学。线弹性断裂力学是研究弹性范围内的断裂问题。其与常规设计方法有一个共同点,都把研究对象看作是处在弹性阶段的变形体,其应力与变形之间是线性关系。其不同点是,常规设计中把材料看成是均匀连续的,而断裂力学考虑材料的断裂裂纹存在(包围裂纹的材料仍是连续介质)线弹性断裂力学目前已比较成熟,可以解决各种裂纹,如穿透性裂纹、深埋裂纹、表面裂纹等裂纹尖端处于弹性范围内或存在很小塑性区的断裂问题。

弹塑性断裂力学是研究塑性范围内的变形体断裂问题(塑性区域大),其应力与变形之间是非线性关系。其研究方法是建立裂纹尺寸、载荷、材料韧性三者之间的关系式,很好地应用于低应力脆断问题的分析。

1.1.2 各学科之间的联系与区别

1. 联系

各学科之间的联系如图 1.1 所示。理论力学研究的是刚体;材料力学、结构力学、弹性力学和有限单元法研究对象都是处于弹性变形阶段的变形体;塑性力学研究的是处于非弹性阶段的变形体,断裂力学研究的是有裂纹的变形体。

不同力学课程主要研究对象和内容的比较见表 1.1。

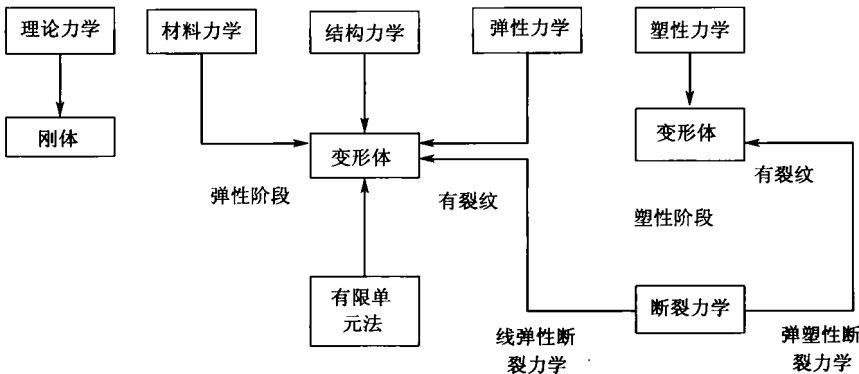


图 1.1 各学科之间的联系

表 1.1 不同力学课程主要研究对象和内容的比较

课 程	研 究 对 象	研究的主要内容
弹性力学	弹性体	梁、柱、坝体、壳等受力体的应力、应变和位移的精确分析
材料力学	杆件结构	梁、柱等杆件在拉、压、弯、扭、剪状态下的应力与位移
理论力学	刚体	刚体的静、动力学(约束力、速度、加速度)分析
结构力学	杆系结构	桁架、刚架等杆系结构的约束力、内力与位移的计算
塑性力学	弹塑性体	结构的弹塑性分析
断裂力学	弹塑性体(有裂纹)	结构的应力分析、强度校核、断裂韧度分析、断裂判据

2. 区别

在研究方法上,弹性力学与材料力学都从静力学、几何学、物理方程三个方面来进行分析。但不同点是材料力学常借助于直观和实验现象作一些假设。例如,在材料力学中研究直梁在横向载荷作用下的弯曲时,引用平截面假设,即假设梁的横截面变形之前为平面,在变形之后仍保持为平面。这样简化了问题的数学解答,因而很容易求得横截面上的弯曲正应力是沿梁的高度按直线规律变化的,如图 1.2(a)所示。在弹性力学中研究这一问题就无须引用这一假设。虽然数学解题变得复杂些,但结果要比材料力学得到的更为精确,并且从结论上还可判明梁的高度与跨度两者属于同阶大小时,横截面上的应力并不按直线规律变化,而是按图 1.2(b)所示曲线变化的,所以可用来校核材料力学中平面假设的正确性。但这并不是说弹性力学不需要假设。事实上对于任何学科来说,如果不对研究对象作必要的抽象和简化,相应的研究工作都是寸步难行的。

又如,对于有孔的拉伸杆件,用材料力学的方法计算,那就和无孔时一样,要假定拉应力在截面上均匀分布,如图 1.3(a)所示。在弹性力学中研究这个问题时就用不着拉应力均匀分布的假定。弹性力学的研究结果表明:净截面上的拉应力远不是均匀分布的,而是在孔的附近发生高度的集中,孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出若干倍,如图 1.3(b)所示。

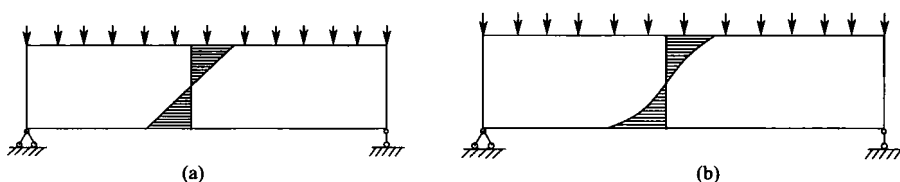


图 1.2 弯曲应力分布

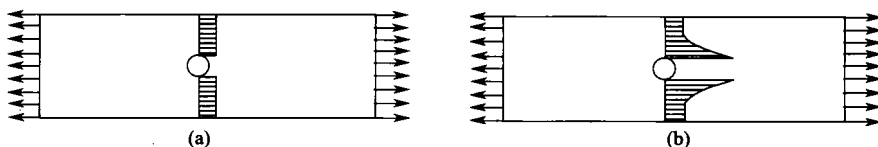


图 1.3 拉伸应力分布

有限元法把连续体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学和弹性力学中的位移法、力法和混合法求解。因此,对同一结构的各个构件或同一构件的不同部分分别采用不同方法分析,节省工作量,取得满意效果。

1.2 过程装备力学构成

现代过程装备与控制工程是工程科学的一个分支,它是机械、化学、电、能源、信息材料工程及系统学等学科的交叉学科,是在多个大学科发展基础上的交叉、融合而出现的新兴学科分支。过程装备是与生产工艺,即加工流程性材料紧密结合,有其独特的过程单元设备和工程技术,如混合工程、反应工程、分离工程及其设备等,与一般的机械设备相比,

有其独特之处。过程装备与控制工程的上述特点决定了其学科研究的领域十分宽广,“过程装备”设计过程中所涉及的工程力学方面的基本理论与基本知识综合性很强,过程装备力学是多种力学的交叉和融合,它主要包括以下几种学科。

1. 弹性力学

弹性力学基本理论,包括应力、应变、平衡、协调、能量,建立一般原理和求解方程体系。

(1)专门问题:简化问题的解析解、平面问题、轴对称问题、薄板理论、旋转薄壳、厚壁圆筒。

(2)能量原理:解析求解法最小势能,最小余能基本原理。

2. 机械振动学

机械振动是一种特殊形式的振动,是指物体在其平衡位置附近所作的往复运动。当振动超出允许范围之后,振动将会影响机器的工作性能,使机器零件产生附加的动载荷,从而缩短其使用寿命;振动剧烈时,有可能造成严重的事故。要使机械避免不应有的振动,保证安全平稳运行,设计时应分析与解决振动问题。

机械振动问题大致可以分为三类:一是固有特性问题,如求系统的固有频率;二是振动响应问题,即振动系统在外界激励下的反应;三是振动稳定性问题。

3. 断裂力学

断裂力学是断裂学科的一个重要分支,它包括线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学。它可以很好地解释含裂纹结构发生断裂的条件,可以建立裂纹尺寸、载荷、材料韧性三者之间的关系,很好地用于解决过程设备低应力脆断问题的分析。

4. 有限元法

把连续体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学和弹性力学中的位移法、力法和混合法求解。其基本思想是将原结构划分为许多小块(单元),用这些离散单元的集合体代替原结构。用近似函数表示单元内的真实场变量,从而给出离散模型的数值解。

思考题

1. 弹性力学与材料力学之间有哪些不同之处?

参考文献

- [1] 薛强. 弹性力学. 北京:北京大学出版社,2006.
- [2] 程选生,张少波. 弹性力学与有限元法教程. 北京:中国计量出版社,2008.
- [3] 陈旭. 过程装备力学基础. 第2版. 北京:化学工业出版社,2006.

第2章 弹性力学基础

弹性力学是固体力学最基本也是最主要的内容。它从宏观现象的认知规律出发,利用连续数学的工具,研究任意形状的弹性物体受力后的变形、各点位移、内部的应变与应力。

2.1 弹性力学中的基本假设

为了便于对弹性力学问题用数学的方法来解决,在弹性力学里对材料的性质作了某些假设。引用这些假设在于突出主要矛盾的主要方面,忽略一些次要因素。弹性力学有如下假设。

1. 连续性假设

假设物体是连续的。物质内部由连续介质组成,物体中没有空隙,因此物体中的应力、应变、位移等量是连续的,可用坐标的连续函数来描述。实际上,所有物体都是由微小颗粒组成的,它们之间存在空隙。但是,微粒的尺寸以及它们之间的空隙相对于宏观物体是微小的,因而宏观上可将物体看做是连续体。

2. 均匀性假设

假设物体是匀质的,物体内各个位置的物质具有相同的特性。这样,物体的弹性常数不随位置坐标和方向而变化。

3. 各向同性假设

假设组成物体的材料在物体空间内每一点沿不同方向的力学性能相同。这样物体的弹性常数与方向无关。对于工程上常用的金属及其他合金材料,它们所含的晶粒是各向异性的。但是,由于晶粒相对于物体的几何尺寸来说非常微小且杂乱排列,物体的性质表现为无数晶粒的平均性质,可认为这些材料是宏观各向同性的。一些工程材料,如木材、竹材等是各向异性的。

4. 完全弹性假设

假设物体是完全弹性的,物体的变形在外力作用去除后,物体可恢复原状而没有任何变形。同时还假定材料服从胡克定律,即应力与形变成正比。这就保证了应力与应变之间的一一对应关系。对于工程上的大多材料,当应力不超过某一极限时,这个假设与实际情况基本相符。

凡是满足以上四个假设的物体,称为理想弹性体。

5. 小变形假设

假设物体的形变很小,在载荷或温度变化等作用下,物体变形远小于物体的几何尺寸,在建立方程时,可以忽略高阶小量。

以上基本假设将作为问题简化的出发点,这些基本假设与材料力学中的基本假设是一样的。但在材料力学中除了上面基本假设外,对不同的问题还引用了一些有关变形的

假设,使计算得到简化。与弹性力学相比,其结论的精确程度与适用范围都受到一定的限制。

以上述基本假设为根据的弹性理论,称为线性弹性理论。

如物体中应力超过弹性极限,物体将处于塑性状态。此时应力与形变不是线性关系,这是物理上的非线性,研究物体处于塑性状态时的应力与应变的学科,称为塑性理论。

如果物体的变形不是很微小,就不能略去应变的影响,这就形成了几何上的非线性,在弹性理论中将得出非线性微分方程。研究这种问题的弹性理论,称为非线性弹性理论。

如仅根据上述基本假设,对物体中的应力与应变进行研究,这样的弹性理论也可称为数学弹性理论。如果除了上述基本假设外,还引用某些补充假设。引用补充的几何假设,这样的弹性理论也可称为应用弹性理论。

2.2 弹性力学中的几个基本概念

2.2.1 外力

1. 体积力(体力)

指分布在物体体积内的力,如重力和惯性力。物体内部各点受体力的情况,一般是不相同的。用体力集度矢量表明物体在某点所受体力的大小和方向。 X 、 Y 、 Z 称为体力矢量在三坐标轴的分量。

2. 表面力(面力)

指分布在物体表面上的力,如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况,一般也是不相同的。用面力集度矢量表明该物体在其表面上某一点所受面力的大小和方向。

2.2.2 应力

1. 定义

物体在外力的作用下,伴随变形而同时在其内部将产生抵抗变形的力,称为内力。

下面研究物体内部一点 P 处的内力。假想用经过 P 点的一个截面 mn 将物体分为 A 、 B 两部分,而将 B 部分撤开,研究 B 在截面 mn 上对 A 作用的内力。

设面积为 ΔA 截面上包含点 P ,作用于 ΔA 的内力为 ΔQ ,则平均应力为 $\frac{\Delta Q}{\Delta A}$ 。

$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = S$,称极限矢量 S 是物体在截面 mn 上 P 点的应力。

2. 关于应力

(1)物理意义:表示内力在截面上分布的密度。

(2)应力是矢量,不仅有大小和方向,而且与点的位置以及通过该点截面的方向有关。即在物体内部不同点的应力不同,在相同点处不同截面上的应力也是不同的。

(3)应力与物体的形变及材料强度直接相关,应力在作用截面的法向和切向的分量,也就是正应力和剪应力,如图 2.1 所示。

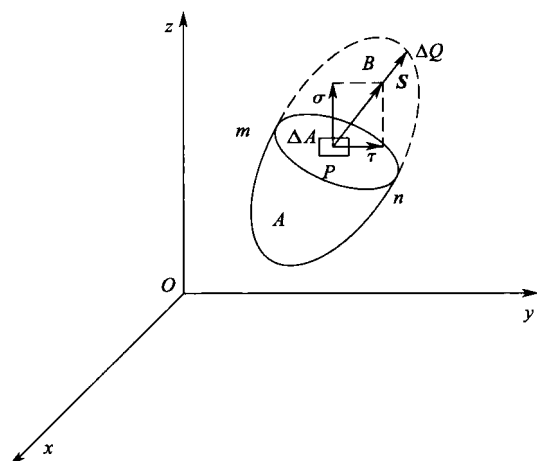


图 2.1 应力示意图

3. 分析一点的应力状态

为了考察物体受载后内部某一点 P 的应力。在 P 点从物体内取一个微小的正六面体，其棱边平行于坐标轴，且将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪切应力，分别与坐标轴平行，正应力用 σ 表示，剪应力用 τ 表示，如图 2.2 所示。

符号规定：如果某一截面的外法线方向沿着坐标轴的正方向，这个截面称为正面，而这个截面上的应力分量就以坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。如果某一截面的外法线方向沿着坐标轴的负方向，这个截面称为负面，而这个截面上的应力分量就以坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负（负负为正，负正为负）。

正负：指平面外法线方向和应力方向与坐标轴的比较，一致取正，相反取负。

用两个坐标角码表示方向，前一个角码表明作用面垂直于哪个坐标轴，一个角码表明作用方向沿哪一个坐标轴。例如 τ_{xy} 是作用在垂直 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

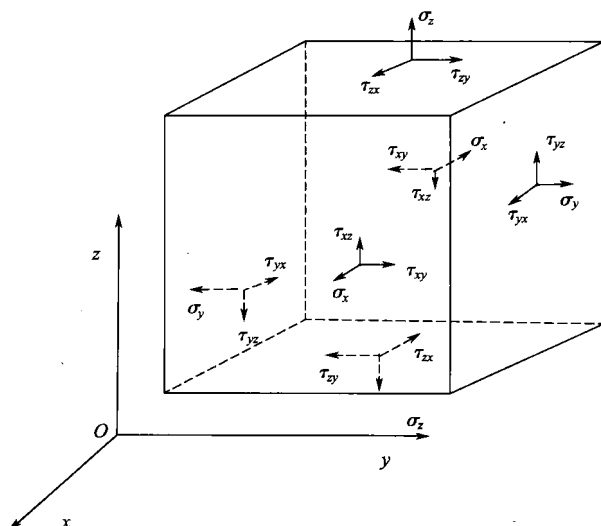


图 2.2 弹性体内某一点的应力

物体任意一点,如果已知 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ 九个分量,则该点的应力状态可确定。根据剪切力互等定律,由六个分量可完全确定。六个剪切应力之间存在互等关系 $\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$,即作用在相互垂直面上垂直于两面交线的剪应力大小相等,正负号相同。

下面给出该定理的简单证明:以图 2.2 给出的六面体为研究对象,分别以连接六面体前、后两面中心的直线为矩轴,列出力矩平衡方程:

$$2\tau_{yz} dz dx \frac{dy}{2} - 2\tau_{zy} dy dx \frac{dz}{2} = 0$$

化简得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

同理,对连接左、右两面中心的直线、连接上、下两面中心的直线分别列六面体的力矩平衡方程并整理,可得

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

定理得证。由此可知,在弹性力学里,剪切应力记号的两个下标字母可以对调。

可以证明,在物体任意一点,如果已知 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 这六个分量,就可以求解经过该点任意截面上的正应力和剪应力。因此,该点的应力状态可由上述六个应力分量完全确定。

2.2.3 形变

即形状的改变。物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。图 2.3 所示物体变形以后,这三个线段的长度以及它们之间直角都将有所改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态,在这一点沿着坐标轴 x, y, z 的正方向取三个微小的线段 PA, PB, PC , 如图 2.3 所示。各线段的每单位长度的伸缩,称为正应变,用 ϵ 表示: ϵ_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变,以此类推。正应变以伸长时为正,缩短时为负,与正应力的正负号的规定相适应。线段之间的直角的改变,称为剪应变,用弧度表示,用 γ 表示: γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段(PB 和 PC)之间夹角的改变,以此类推。剪应变以直角变小时为正,变大时为负,剪应力的正负号规定与此相适应。

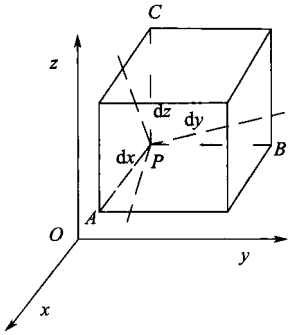


图 2.3 应变示意图

在物体任意一点,如果已知 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 六个分量,则该点的应变状态可确定。这六个应变,称为该点的形变分量。

2.2.4 位移

位移即位置的移动。将物体内任意一点的位移用它在 x, y, z 坐标轴上的投影 u, v, w 来表示,以沿坐标轴正方向时为正,沿坐标轴负方向时为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论,弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量,都是随着该点的位置而变的,因而都是位置坐标的函数。在弹性力学问题里,通常是已知物体的形状和大小(已知物体的边界),已知物体的弹性常数、物体所受的体力、物体边界上的约束情况或面力,需要求解应力分量、形变分量和位移分量。