

— 高等学校教材 —

理论力学

(修订本)

下 册

西北工业大学理论力学教研室编

季文美、吕茂烈主编

高等教育出版社



理 论 力 学

(修 订 本)

下 册

西北工业大学理论力学教研室编
季文美、吕茂烈主编

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据1962年审订的高等工业学校机械制造工艺、土木建筑工程类专业适用的“理论力学教学大纲(试行草案)”的要求修订的。现在印行的修订本,可作为上述专业理论力学课程的试用教科书。

全书分上下两册,上册为静力学与运动学部分,下册为动力学部分。内容仅限于课堂讲授的题材,而未包括作业题材,后者应根据具体情况补充。

本书由西北工业大学理论力学教研室编写。初版于1960年8月出版,主编季文美、吕茂烈,参加编写工作的还有孙海润、朱丕昭、扈英超、赵俊三以及教研室的其他同志。本书修订工作由吕茂烈同志负责。修订稿曾请力学课程教材编审委员会理论力学课程教材编审小组刘先志委员和山东工学院王一民同志审阅。

本书原由人民教育出版社出版。现经上级决定,自1965年1月1日起,另行成立“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

理 论 力 学

(修 订 本)

下 册

西北工业大学理论力学教研室编

季文美、吕茂烈主编

北京市书刊出版业营业许可证书字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号K13010·949 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 6 $\frac{12}{16}$

字数 183,000 印数 71,501—75,000 定价(5) ¥0.65

1961年6月第1版 1964年12月第2版 1965年10月北京第7次印刷

下册目录

第三部分 动力学

第十三章 质点动力学导論.....	241
§ 13-1 动力学的任务及其基本內容(241)	
§ 13-2 动力学基本定律(242)	
§ 13-3 质点的运动微分方程(247)	
§ 13-4 质点的直线运动微分方程的积分举例(255)	
§ 13-5 质点的相对运动(261)	
第十四章 质点的振动.....	270
§ 14-1 引言(270)	
§ 14-2 质点的自由振动(271)	
§ 14-3 阻尼对于自由振动的影响——衰减振动(277)	
§ 14-4 质点的受迫振动(284)	
第十五章 动量定理.....	295
§ 15-1 作用于质点系的力·质点系的运动微分方程(295)	
§ 15-2 质点的与质点系的动量定理(微分形式)·动量守恒的条件(297)	
§ 15-3 冲量定理(积分形式)(300)	
§ 15-4 质心运动定理·质心运动守恒的条件(303)	
§ 15-5 变质量质点的运动微分方程(310)	
第十六章 动量矩定理.....	316
§ 16-1 质点的动量矩定理·动量矩守恒的条件(316)	
§ 16-2 质点系的动量矩定理·动量矩守恒的条件(321)	
§ 16-3 刚体的转动惯量·平行移轴定理(324)	
§ 16-4 刚体的定轴转动微分方程(330)	
§ 16-5 相对于质心运动时的动量矩定理(333)	
§ 16-6 刚体的平面运动微分方程(337)	
* § 16-7 賴柴定理(341)	
* § 16-8 对称刚体的規則进动·高速自轉的情形(342)	
第十七章 动能定理.....	351
§ 17-1 力的功(351)	
§ 17-2 质点的动能定理(356)	
§ 17-3 作用于质点系的力的功·内力、約束力的功等于零的情形(362)	
§ 17-4 质点系的动能定理(366)	
§ 17-5 质点系的动能定理的应用·动能的計算(367)	
* § 17-6 相对运动中的动能定理(372)	
§ 17-7 势力場(373)	
§ 17-8 势能·机械能守恒定理(376)	
* § 17-9 质点在牛頓引力場中的运动(379)	
第十八章 碰撞理論.....	385
§ 18-1 碰撞現象及其基本特征·瞬时力及其度量(385)	
§ 18-2 碰撞的两个阶段·恢复系数(387)	
§ 18-3 碰撞时的动力学普遍定理(389)	
§ 18-4 两个物体的对心正碰撞(393)	
§ 18-5 碰撞对定軸转动刚体的作用·撞击中心的概念(399)	

第十九章 达朗伯原理与动静法	402
§ 19-1 达朗伯原理(402)	
§ 19-2 动静法(403)	
§ 19-3 质点系的惯性力(404)	
§ 19-4 惯性力的计算与动静法应用举例(407)	
§ 19-5 转动刚体对轴承的压力·消除附加动压力的条件(413)	
* § 19-6 陀螺力矩(420)	
§ 19-7 刚体对于任意轴的转动惯量·惯性椭圆与惯性主轴(423)	
第二十章 虚位移原理	429
§ 20-1 分析静力学问题的提法(429)	
§ 20-2 约束方程·质点系的自由度(432)	
§ 20-3 质点系的虚位移(434)	
§ 20-4 理想约束(436)	
§ 20-5 虚位移原理(437)	
* § 20-6 以广义坐标表示的质点系的平衡条件(442)	
§ 20-7 动力学普遍方程(448)	

第三部分 动力学

第十三章 质点动力学导論

§ 13-1 动力学的任务及其基本內容

本书第三部分叙述动力学。这里将結合物体之間的相互作用来研究物体机械运动的量的变化和傳遞，从而建立起表征物体运动的各种量与力的作用效果这两者之間的数量关系。

在靜力学里，我們研究了物体在受力作用时处于平衡的条件，而完全沒有提到：如果作用的力不滿足平衡条件，則物体将进行怎样的运动。在运动学里，我們只从几何观点描述了物体运动过程的进行，而未涉及那些使物体运动发生变化的原因。这样，靜力学与运动学的研究是在彼此独立的基础上进行的，只有到研究动力学的时候才看到它們之間的一定的联系。

平衡只是运动的特殊情形，因此靜力学可以包括在动力学里。动力学里也的确有一个部分是专门研究靜力学問題的（見第二十章虛位移原理）。而且还将看到，任何动力学問題，都可以化为靜力学問題的形式来处理（見第十九章达朗伯原理）。

至于运动学，在某种意义上可以看为动力学的預备知識，因为在求解动力学問題时，往往須先进行有关运动学的分析。

动力学知識，無論在工程实践或科学研究中，都有极其广泛的应用；特别是在科学技术高度发展的今天，其重要性更为显著。例如，各种机器、仪表的設計，火箭技术及宇宙航行等問題，都要有动力学的专门知識作为基础。本书根据教学要求，仅叙述动力学的

最基本内容。

和静力学、运动学相类似,动力学的叙述也是从最简单的问题开始。先研究个别质点的运动,然后进而研究质点系(包括刚体)的运动。这样,从研究的对象来看,动力学可以分为两个部分:质点动力学和质点系动力学。但是,为了使叙述紧凑起见,本书并不对此作严格的区分。质点和质点系的定义,已在本书上册中给出,这里不再重复。

§ 13-2 动力学基本定律

质点动力学的研究基础是几个简单的定律,这些定律是牛顿在前人的科学研究、特别是在伽利略的研究成果的基础上总结出来的。他在“自然哲学的数学原理”一书中以完备的形式明确地提出了这些定律。按照现代的形式,这些定律可陈述如下:

第一定律 质点只在其他物体的作用下改变它的运动状态。亦即, 质点如果不受其他物体的作用,则其运动状态将保持不变:作直线匀速运动(包括静止)。这种运动称为按惯性的运动,或简称为惯性运动;而质点能保持其运动不变的固有属性,则称为惯性。这样,第一定律亦称为惯性定律。

其实,惯性定律的基本思想早由伽利略初步提出。伽氏通过著名的斜面实验,雄辩地论证了物体运动的惯性性质。在伽氏以前,人们曾错误地认为:静止是物质的自然状态,要维持运动就必须经常不断地给予物体以外界的推动。物体惯性运动性质的发现,从根本上纠正了上述的错误观点。

第一定律指出了改变质点运动状态的条件:其他物体给予此质点的作用。这种作用就是力。

应该注意,“保持运动状态不变”仅为质点固有属性的一个方面的表现;而另一方面,当受到其他物体作用时,质点将按一定的

规律发生运动状态的变化。下述的第二定律从数量上说明了这种变化。

第二定律 质点因受力作用而产生的加速度，其方向与力相同，大小与力成正比。

表征质点运动变化的加速度，显然还与表征质点本身惯性的量有关。因此，这里要说明的，是作用力、质点的加速度和表征质点惯性的物理量这三者之间的关系。由经验知，设以同样的力作用于两个不同的质点，如第一个质点所含的物质为第二个质点的两倍，则第一个质点所获得的加速度仅为第二个质点的一半。物质含量的多少，可用来量度表征质点惯性的量的大小。表征质点惯性的量的度量称为质量，对于每个给定的质点，其质量为正值的常量^①。于是，设以 m 代表质点的质量， w 代表加速度，而 F 代表此时作用于质点的力，则由第二定律，可得如下关系

$$mw = CF, \quad (13-1)$$

其中 C 为正值的比例系数，决定于所采用的单位。适当地选择各个基本量的计算单位，可使系数 $C=1$ 。

例如，在本书采用的工程单位制中，以长度 $[L]$ 、力 $[F]$ 和时间 $[\tau]$ 为基本量，通常分别以米、公斤(力)、秒或厘米、克(力)、秒为计算单位。此时质量的量纲为

$$[\text{质量}] = \frac{[\text{力}]}{[\text{加速度}]} = \frac{[\text{力}][\text{时间}]^2}{[\text{长度}]}.$$

因此，设以 1 公斤(力)-米⁻¹-秒² 或 1 克(力)-厘米⁻¹-秒² 为质量

① 关于质量的定义，历来有所争论。牛顿把质量简单地定义为物质的含量，这个定义的缺点在于把物质本身和它的某一方面的属性等同起来。物质的属性可以随条件不同而有不同程度的表现。事实上，物体的质量与它本身的运动速度有关。在相对论里建立了质量对于运动速度的依赖联系。

近几年来进行的关于质量定义的争论，可从苏联“关于质量和能量问题的讨论”(论文集)中看到。此书有中译本，1959年科学出版社出版。

单位, 则式(13-1)中的比例系数 $C=1$, 因而有

$$m\mathbf{w}=\mathbf{F}. \quad (13-2)$$

这是质点动力学基本方程, 它表示: 作用于质点的力, 等于质点的质量与加速度的乘积。

牛顿在定义质量时会进行过大量的实验, 他发现了质量与重量之间的联系。质点在本身重力 $\mathbf{P}$ 作用下自由落下时的加速度为 g , 因而由式(13-2), 有关系

$$\mathbf{P}=mg.$$

设已测知物体的重量和重力加速度, 就可以根据上式算出物体的质量, 有

$$m=\frac{P}{g},$$

即物体的质量等于它的重量除以重力加速度。

在地面上各处, 重力加速度并不相同, 例如在赤道和两极的海平面上, 分别为 978.10 厘米/秒² 和 983.11 厘米/秒²; 在我国南北各地的实测结果其平均值可取为 $g=980$ 厘米/秒², 即 9.80 米/秒² (相当于北京地区)。

对应地, 由实验知, 同一物体在各处的重量亦不相同; 但同一物体的重量与就地的重力加速度的比值, 却始终不变, 这正说明了每个物体的质量是一个常量。

第二定律只应用于单个质点, 要使之能引伸应用于质点系, 还需要第三定律。这个定律早在本书上册中叙述, 它在物体平衡和运动时采取同一形式。

第三定律 任何两个物体互相作用的力, 总是大小相等、方向相反, 沿同一直线而分别作用于这两个物体。

由此可见, 两个物体相互作用之力的矢量和恒等于零。例如, 设有工人用手以水平力 $\mathbf{F}$ 推动停在水平直线轨道上的小车。根据

第三定律, 此时小車必給予工人以等于 $-F$ 的水平反作用力。这样, 工人与小車相互作用之力的矢量和等于零。

但是, 上述工人与小車彼此間所作用的两个力并不相互平衡。在力 F 的作用下小車将获得水平加速度 w 。如果軌道的摩擦很小, 可以忽略, 則由动力学基本方程(13-2)有: $F = mw$, 其中 m 为小車的质量。而另一方面, 如果地面作用于工人鞋底的摩擦太小, 則工人也将因小車反力 $-F$ 的作用而获得水平向后的加速度。

从另一观点来看, 当工人推动小車使其获得加速度 w 时, 小車必因慣性而显示它的反抗。此时小車作用于工人手上的力 $-F = -mw$ 就是这种慣性反抗, 并被称为小車的慣性力。可見, 质点的慣性力, 等于它的加速度与质量的乘积取相反的方向, 而这个力作用在使这个质点获得加速度的那些物体上。

引入慣性力的概念并以 $F^n = -mw$ 代表这个力, 即可将动力学基本方程(13-2)改写为与平衡方程相似的形式

$$F + F^n = 0. \quad (13-3)$$

它表示, 质点所受的力与其本身慣性力的矢量和等于零。这个关系将在本书第十九章加以推广并普遍应用。这里應該注意的是, 式(13-3)并不表示真正的平衡, 而仅說明作用力与反作用力的矢量和等于零这个事实。相互作用的每个物体可以分別作任何运动。

对于作为质点动力学基础的第二定律还有一点补充, 它表述为下列定律。

第四定律 几个力同时作用于一个质点时所引起的加速度, 等于每个力单独作用于这个质点时所引起的那些加速度的矢量和。

这个定律, 实质上就是靜力学中力平行四边形定律对动力学情形的推广。它表明, 动力学中力的相加以及由这些力所引起并与之成比例的加速度的相加, 都服从平行四边形定律。其实, 第二

定律可以认为已经包含了第四定律，因为所说的力 F 既可以理解为一个力，也可以理解为若干个力的合力。但是，有了第四定律，就使这种关系的表达更为明确。

最后，必须指出第二定律本身所包含的一个根本性问题。这个定律中出现了三个量：质量、加速度和力。在古典力学里，每个质点的质量可看为常量，质点所受的力则认为与参考系的选择无关，而另一方面，加速度的值却可以因坐标系的选择不同而不同。

上述的不一致性表明，第二定律的公式(13-2)(当然第一定律也如此)不可能适用于一切参考系，而仅能适用于某个或某些特定的参考系。现在的问题就在于如何找出这种适用的参考系。

牛顿在叙述这些定律时指明，它们仅适用于所谓“绝对运动”。而且牛顿所理解的绝对运动，指的是相对于“绝对静止”而与物质运动无关的“绝对空间”的运动。对于这种空间来说，时间也被看成与物质的运动无关而均匀地消逝着；到处可以用同一尺度计算时间。这就是所谓“绝对时间”。当然对空间和时间的这种形而上学的理解是根本错误的，虽然在古典力学范围内物质运动对空间、时间的实际量度的影响小到可以完全忽略。

但是牛顿定律本身是在天体以及地面上物体的运动的研究上总结出来的，它们在研究这些物体的运动时接受了检验并找到了所适用的参考系。这种参考系称为惯性参考系或基础参考系。

天文上采用日心坐标系，其原点放在太阳中心，三轴分别指向遥远的恒星。对于这种坐标系应用牛顿定律所得到的结果和最精密的观测相符。有时将坐标原点移到地球中心，亦即采用所谓地心坐标系，这等于说忽略地球公转的影响。

在大多数工程问题中可以忽略地球自转的影响，因而采用固连于地球的参考系作为基础参考系。在本书的全部叙述中，如果不加特别说明，则总认为所采用的基础参考系是固连于地球的。

§ 13-3 质点的运动微分方程

质点动力学的基本问题是：1) 根据质点的已知运动，确定作用于该质点的力；2) 根据作用于质点的已知力，确定该质点的运动。求解这两类问题所采用的基本方程是(13-2)。但是在具体计算中，需要根据每个问题的特点选择各种形式的坐标系，将方程(13-2)写成相应的形式。通常多采用笛卡儿直角坐标系或自然轴系，有时也采用极坐标系或其他曲线坐标系。

设有可以自由运动的质点 M ，质量为 m ，作用力的合力为 F 。以 w 代表质点在这些力作用下所获得的加速度(图 13-1)，则有

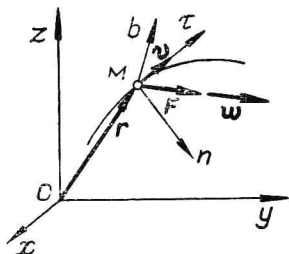


图 13-1

$$maw = F.$$

考虑到 $w = \frac{d^2 r}{dt^2}$ ，其中 r 为质点 M 对于固定点 O 的矢径，则上式可写为

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F. \quad (13-4)$$

这就是质点的矢量形式的运动微分方程。

将式(13-4)投影至固定轴系 $Oxyz$ ，可得质点的直角坐标形式的运动微分方程：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z, \quad (13-5)$$

其中 F_x, F_y, F_z 代表这质点所受各力之合力 F 的投影。

设取质点 M 的自然轴系 $M\tau nb$ ，并将式(13-4)投影到这个轴系，则得质点的自然形式的运动微分方程：

$$m \frac{d^2 \tilde{s}}{dt^2} = F_{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (13-6)$$

其中 $\frac{d^2 \tilde{s}}{dt^2}$, $\frac{v^2}{\rho}$, 0 为质点的加速度在切綫、主法綫和副法綫方向的投影, 而 F_{τ} , F_n , F_b 則代表力 $\mathbf{F}$ 的相应投影。由第三式可見, 作用力 $\mathbf{F}$ 恒垂直于副法綫, 因而也和质点的加速度 $\mathbf{w}$ 一样恒在密切面內。

当求解第一类問題时, 只須根据已知的运动方程, 通过微分演算求出质点的加速度, 从而由以上各式求得未知力。一般說来, 这里不会遇到什么困难。

求解第二类問題是积分的过程。所給定的力在一般情形下可能表现为時間、质点的坐标和速度的函数(有时則根本不可能表示为解析形式)。因此, 只要函数的形式一复杂, 就可能使积分的演算变得非常困难; 在許多情形下, 我們只能滿足于求出近似数值解。

必須注意, 在求解第二类問題时, 方程的积分中要出現任意常量。为了完全确定质点的运动, 必須根据运动的初始条件定出这些积分常量(参看例 13-3)。这样, 自由质点的运动由給定的作用力和运动初始条件所完全确定。

但是, 对于非自由质点, 情形有所不同。非自由质点上加有約束, 因而仅能进行为約束所許可的运动。例如曲柄連杆机构的滑块仅能沿导軌运动, 离心調速器的悬錘仅能在一定的曲面上运动, 等等。可見非自由质点的运动不仅决定于已知的作用力和运动的初始条件, 而且也与所受約束的性质有关。

一般說来, 在主动力 $\mathbf{F}$ 的作用下, 非自由质点 M 所获得的加速度并不等于 $\frac{\mathbf{F}}{m}$, 因为此时約束影响了质点的运动。这种影响相当于某个附加力 $\mathbf{N}$, 即所謂約束力; 这种力不同于主动力。每个主动

力都可以独立地测定,而与其他力无关,因而可以预先给定;但约束力则不能预先给定,它们的大小和方向都与质点的运动、作用于质点的其他力以及约束本身的性质有关。这样,在确定非自由质点运动的问题中,往往需要同时确定未知的约束力。

为了写出非自由质点的运动微分方程,我们可以把约束给予质点运动的限制看作它对约束力 $\mathbf{N}$ 的某种规定,而这个质点则像自由质点那样在主动动力 $\mathbf{F}$ 和约束力 $\mathbf{N}$ 配合作用下进行约束所许可的运动。这等于说,我们可以假想地把约束去掉,而加上一个特殊的力 $\mathbf{N}$,这个力能自动地调节到和存在约束时一样,使质点仅进行约束所许可的运动。这就是动力学中的解除约束原理。

因此,加上约束力 $\mathbf{N}$ 后,就可以应用自由质点的动力学基本方程(13-2)于非自由质点(图 13-2),有

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \quad (13-7)$$

写成直角坐标形式,有

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + N_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + N_y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + N_z, \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

其中 N_x, N_y, N_z 为约束力 $\mathbf{N}$ 在固定轴系 $Oxyz$ 上的投影。

写成自然形式,有

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 \tilde{s}}{dt^2} &= F_\tau + N_\tau, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b, \end{aligned} \right\} \quad (13-9)$$

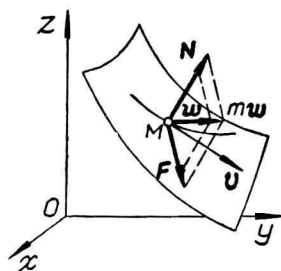


图 13-2

其中 N_τ, N_n, N_b 为约束力 N 在切线、主法线和副法线上的投影。当约束无摩擦时, $N_\tau = 0$ 。

应该注意, 对于第二类问题, 在方程(13-8)中除 x, y, z 外还有未知量 N_x, N_y, N_z 。为了完全求出解答, 需要一些补充的方程或关系式。这些补充的关系式由约束的性质来确定, 在一般情形下建立了约束反力 N_x, N_y, N_z 与质点的坐标、速度以及时间之间的关系。这就反映了非自由质点动力学问题的基本特点, 其求解的困难也正在于此。在分析力学里研究了这类问题的一般解法。本书不叙述这些方法。

最后顺便指出, 对于非自由质点, 亦可写出类似于(13-3)的方程。由式(13-7)显然可得

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}^n = 0, \quad (13-10)$$

即非自由质点的惯性力和实际作用于此质点的主动力、约束反力三者组成平衡力系。

现在来举几个简单的例题以说明上述理论的应用, 从这些例题中可以看到质点动力学两类基本问题的一般解法和主要特点。解题时应特别注意解题步骤和基本要求: 1) 根据问题的已知条件综合地分析质点的运动和受力情况, 用力学上所需的形式表出, 为此应恰当地选择坐标系和正确地画出受力图。2) 根据对运动过程的估计, 恰当地选择定理(或定律)来建立有关各个量之间的关系, 写出必要的方程; 正确地表达和计算各个量, 特别注意量纲、单位、正负号等; 将方程改造成熟知的形式并求出解答。3) 以所得的数学形式的结果重新解释具体的力学过程, 并进一步探讨其内部的联系, 以便把题设条件下得到的结论推广到较为一般的情形中去。

例 13-1 电梯中的过载 设电梯以不变的加速度 a 上升, 求放在电梯地板上重 P 的物块 M 对地板的压力(图 13-3)。

解 先分析物块 M 的受力情形: 作用于物块的力除重力 P 以外, 尚有地板的未知反力 N 。物块的加速度为已知, 故可直接应用方程(13-7), 有矢量

等式

$$P + N = \frac{P}{g}a,$$

从而求得地板的反力

$$N = \frac{P}{g}a - P. \quad (a)$$

地板所受的压力 N' 与它给予物块 M 的反力 N 大小相等、方向相反, 即

$$N' = -N = P + \left(-\frac{P}{g}a\right), \quad (b)$$

注意, 右端第二项 $-\frac{P}{g}a$ 就是物块 M 的惯性力 F^H 。

考虑到加速度 a 方向朝上 (惯性力 F^H 方向朝下, 与重力 P 同向), 故将式 (b) 投影至铅直向下的轴, 可得

$$N' = P\left(1 + \frac{a}{g}\right) = nP, \quad (c)$$

其中 $n = 1 + \frac{a}{g}$ 。可见, 压力由两部分组成: 第一部分等于物块的重量, 这是当电梯静止或作匀速直线运动时所有的, 因而称为静压力; 第二部分等于 $\frac{P}{g}a$, 它只在电梯加速运动时才产生, 因而称为附加动压力。全部压力 N' 则称为动压力。本例中 $n > 1$, 即动压力超过了静压力。这种现象称为超重或过载, n 称为过载系数。

显然, 设加速度 a 方向朝下, 动压力将为

$$N' = P\left(1 - \frac{a}{g}\right), \quad (d)$$

即小于静压力。特别是, 设 $a = g$, 则 $N' = 0$ 。此时物块和电梯各自自由地降落, 互不影响; 在物块的各部间也消除了因重力而引起的压力。此种现象称为失重。

例 13-2 椭圆运动 设质点 M 在平面 Oxy 内运动 (图 13-4), 质量为 m , 运动规律为

$$x = a \cos kt,$$

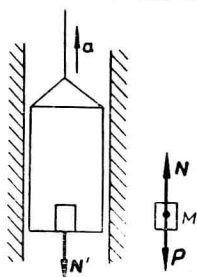


图 13-3

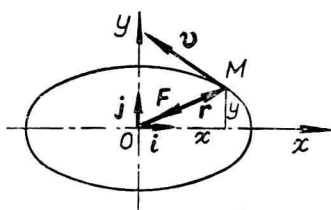


图 13-4

$$y = b \sin kt,$$

其中 a, b, k 均为常量。求作用于质点的力 F 。

解 本例可先进行运动分析。由运动方程求得质点加速度的投影为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 a \cos kt = -k^2 x,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 b \sin kt = -k^2 y.$$

故由式(13-5)求得作用力的投影为

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 m x, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 m y. \quad (a)$$

因而这力的大小为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = k^2 m \sqrt{x^2 + y^2} = k^2 m r, \quad (b)$$

其中 $r = OM$ 为质点的矢径的长度。力 F 的方向余弦为

$$\cos(F, i) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(F, j) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}. \quad (c)$$

写成矢量形式,有

$$F = F_x i + F_y j = -k^2 m (xi + yj) = -k^2 m r. \quad (d)$$

可见,这力的方向与矢径正相反,因而它恒指向点 O 。这种力属于有心力。

例 13-3 真空弹道 求质量为 m 的质点 M 在重力 P 的单独作用下的抛射运动。设初速为 v_0 , 发射角为 α (图 13-5)。

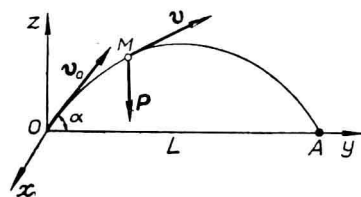


图 13-5

解 取固定坐标系 $Oxyz$, 令原点 O 重合于质点 M 的初始位置, 平面 Oyz 包含初速 v_0 , 轴 z 铅直向上, 轴 y 朝运动前进的一边。

重力 P 在各坐标轴上的投影为 $0, 0, -mg$ 。故质点 M 的运动微分方程(13-5)写为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg;$$

消去 m , 得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g.$$