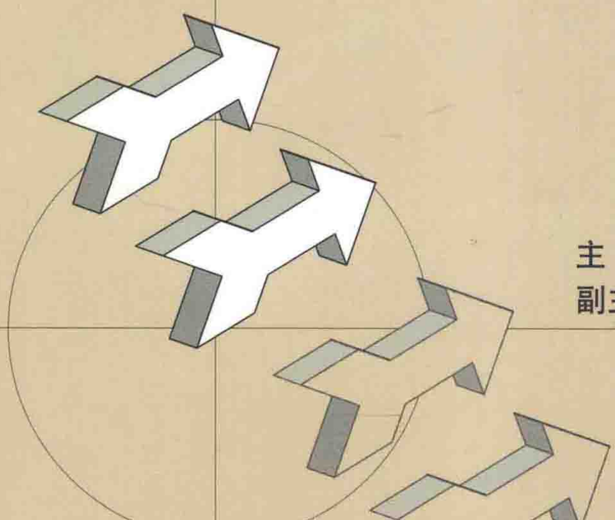
新世纪高校经济学·管理学系列教材

XINSHIJIGAOXIAOJINGJIXUE · GUANLIXUEXILIEJIAOCAI

Weijifen

经济应用数学：
微积分



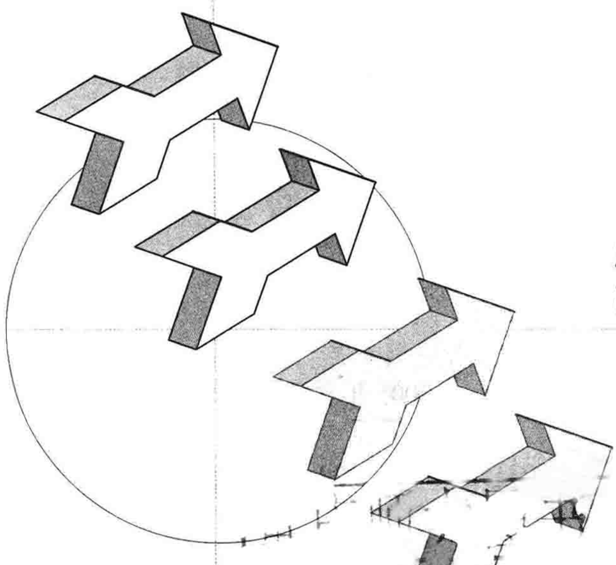
主 编 任 彪
副主编 赵秀恒

河北人民出版社

新世纪高校经济学·管理学系列教材

XINSHIJIGAOXIAOJINGJIXUE · GUANLIXUEXILIEJIAOCAI

经济应用数学：微积分



主　编　任　彪

副主编　赵秀恒

河北人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学：微积分/任彪主编．—石家庄：河北人民出版社，2005.9
（新世纪高校经济学·管理学系列教材）
ISBN 7-202-03957-5

Ⅰ．经…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 091624 号

书　　名	**经济应用数学：微积分**
主　　编	任　彪
副 主 编	赵秀恒
出版发行	河北人民出版社（石家庄市友谊北大街 330 号）
经　　销	新华书店
印　　刷	河北新华印刷一厂
开　　本	720×960 毫米　1/16
印　　张	21.5
字　　数	388,000
版　　次	2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	1—5,000
书　　号	ISBN 7-202-03957-5/G·1120
定　　价	27.50 元

总　序

高校教材是各门科学中人类所取得的既有成果的集中体现，是一门学科教学内容和知识体系的载体，是展开教学的基本依据。所以，教材建设是学科建设的基础工程。在人类已经进入21世纪的背景下，科学技术发展突飞猛进，知识更新速度加快。中国社会主义市场经济体制的确立，中国加入“WTO”所带来的冲击，对中国高校的教育教学改革提出了更高的要求，也对中国高校的教材建设提出了更高的要求。基于发展河北高等教育、推动河北高校教材建设的历史责任感，河北人民出版社组织河北各高校经济学、管理学各学科的学术带头人和教学骨干，共同编写了这套“新世纪高校经济学·管理学系列教材”。参加的院校有河北大学、燕山大学、河北师范大学、河北农业大学、河北经贸大学、石家庄铁道学院、河北科技大学、河北理工学院、石家庄经济学院等。

本套教材第一批以高校经济类、管理类的核心课程为主体，包括：《政治经济学（资本主义部分)》、《政治经济学（社会主义部分)》、《微观经济学》、《宏观经济学》、《管理学》、《统计学》、《财政学》、《货币银行学》、《基础会计学》、《国际贸易》、《市场营销学》、《管理信息系统》、《运筹学》等，已于2003年8月出版。

第二批以高校经济类、管理类基础课程为主体，包括《金融市场学》、《产业经济学》、《经济法》、《国家税收》、《财务管理》、《证券投资学》、《国际经济

学》、《经济应用数学：概率论与数理统计》、《经济应用数学：微积分》、《数据库原理及应用》、《风险管理》共计11本。

本套教材编委会组织编委、各教材主编和部分作者在石家庄多次就本套教材编写的指导思想、编写体例及主编、副主编、作者的入选资格等进行研究，力图从主编负责制、作者筛选、统一编写体例与编写要求等方面，确保本套教材的编写质量，力图使本套教材能充分地体现近年来相关学科科学研究、教学内容和课程体系改革研究的新成果，使之适应新世纪高校厚基础、宽口径、高素质的培养要求。本套教材曾送经济学家、河北大学博士生导师刘永瑞教授等专家审阅，他们都给予高度评价。

本套教材主要是按照高校经济学类、管理学类本科学生的教学要求规划设计的，也可供各类继续教育的教学使用。

新世纪高校经济学·管理学系列教材编委会

2005.6

前　言

该教材是基于发展河北高等教育、推动河北高校教材建设，打造河北精品教材，由河北人民出版社推出的新世纪高校经济学·管理学系列教材之一。它与《线性代数》、《概率论与数理统计》一起作为经济管理类各专业基础数学课程，它们不仅为经济管理类各专业学习专业课程提供必需的数学知识，而且对培养和提高学生分析和解决问题的能力，训练学生严谨的逻辑思维能力至关重要。

受河北人民出版社委托，我们组织河北经贸大学、河北大学、河北科技大学、河北工程学院、石家庄经济学院等高校具有多年教学经验的教授或副教授参加编写。在编写过程中先是根据教育部关于“21世纪教学内容和课程体系改革总体目标和要求”，对教材体系、内容及教法处理等问题展开深入调查研究，在此基础上参考1990年原国家教委制订的“经济应用数学教学大纲”和近年教育部制订的“经济管理类专业硕士研究生入学考试数学大纲”，结合地方高等教育特点，并广泛征求教师和学生意见制订了编写大纲。

该教材内容包括：函数及其性质、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程简介、差分方程简介，涵盖了经济管理类硕士入学考试数学三、四大纲对微积分要求的全部内容。

教材处理上尽量适应经济管理类专业教学特点，使有关概念、理论与方法易于学生接受。在不影响微积分学科的系统性、科学性前提下，简化和略去了某些

结论冗繁的推导而仅给出直观解释。力求概念、理论与方法的表述简单、直观、通俗易懂。

在微积分概念引入上，像导数、定积分等概念均选用经典例子，使读者对知识的来龙去脉有一个清楚的认识。在例题的选取上尽量选择与经济管理相近的例子，但又避免强拉硬拽。

教材中“*”标出的内容为选学内容，可根据课时决定是否讲授。

像知识补充、阅读与欣赏、探索与研究等方面的内容安排在章末附录中供学生阅读，目的是开阔视野、启发数学思想、提高学习兴趣，以飨读者，抛砖引玉。

每章习题配有 A、B 两组及参考答案，其中 B 组习题不少选自历年考研试题，是为满足那些有较高要求或考研同学准备的。

本书由任彪教授任主编、赵秀恒教授任副主编，其中第一章由任彪编写，第二章由赵秀恒编写，第三、第四章由刘春荣编写，第五、第六章由高志强编写，第七章由毕建芝编写，第八、第九、第十章由惠红旗编写。全书由任彪、赵秀恒统稿。

由于编者水平有限，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心希望得到专家、学者和读者的批评指正，使这部教材在教学实践中不断改进完善。

编　者

2005.7

目　录

新世纪

高校经济学·管理学系列教材

函数及其性质

本章学习目的和要求

本章是微积分的准备知识,从"映射"观点进一步理解函数概念,并概括总结了中学阶段学习过的函数的几种简单性质、基本初等函数性质和图象.通过本章的学习,要求掌握函数的几种简单性质、基本初等函数性质和图象,为学习微积分铺垫必要的基础知识.

第一节 预备知识

一、实数系

微积分研究的对象是实变量之间的函数关系,变量的取值范围是限制在实数集合内的,要了解实数系的一些性质,我们先考察数系扩充的演变.

人类对数的认识是从自然数开始的,它们是 0,1,2,⋯,全体自然数的集合为 $\mathbf{N}$①. 在自然数集范围内,关于数的加法、乘法是封闭的,即任意两个自然数 n,m 的

① 本书用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集合{0,1,2,⋯},用 $\mathbf{N}^+$ 表示正整数集合.

和与积还是自然数. 但对减法不封闭. 后来由于社会实践需要和数的运算的要求, 又引进了负整数,这样数系就扩充到了整数集 **Z**. 在整数集范围内,关于数的加法、减法、乘法是封闭的,但对数的除法不封闭. 因此,数系又扩充到了有理数集 $Q = \left\{x \mid x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbf{N}^{+}, q \in \mathbf{Z} \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$,有理数集关于数的加法、减法、乘法、除法(除数不为零)运算均是封闭的.

有理数集具有“稠密性”,即对任意给定的两个有理数 a,b,且 $a<b$,则在 a 与 b 之间至少存在一个有理数 c,即 $a<c<b$;同样,在 a 与 c 之间又至少存在一个有理数 d,即 $a<d<c$;如此类推,可知无论 a 与 b 之间相差多么小,总可以在 a 与 b 之间找到无穷多个有理数. 反映在数轴上,即任意两个有理点之间总有无穷多个有理点. 直观看,数轴上的有理点密密麻麻,这就是所谓的有理数集的“稠密性”.

但是有理数并没有充满整个数轴,还留有“空隙”. 如单位正方形的对角线长度 c,找不到一个有理数和它对应. 即这个长度不可能用有理数来表示,这可以通过反证法论证:

如图 1—1,根据勾股定理 $c^2=2$,若 $c=\dfrac{q}{p}$,其中 $p,q \in \mathbf{N}$,并且 p,q 互质,那么 $q^2=2p^2$. 由于奇数的平方必为奇数,因此 q 为偶数,设 $q=2r, r \in \mathbf{N}$,又得到 $p^2=2r^2$,也就是说 p 也是偶数,这与 p,q 互质矛盾.

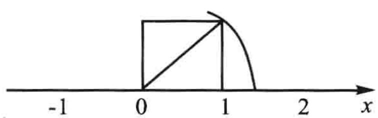


图 1—1

首先发现不可公度线段的存在是公元前 5 世纪古希腊毕达哥拉斯学派的希帕索斯,这与当时毕达哥拉斯学派所信奉的“一切数皆可用有理数来表示”相矛盾,于是产生了第一次数学危机.

注意到有理数一定能表示成有限小数或无限循环小数,很自然会想到,扩充有理数集最直接的方式之一,就是把所有的无限不循环小数(称为无理数)吸纳进来. 我们将全体有理数和无理数所构成的集合称为实数集 **R**,即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 是有理数或无理数}\}$$

在数轴上全体无理数的点填补有理数在数轴上留下的“空隙”,即实数充满整个数轴. 这样每个实数都可以在数轴上找到自己的对应点,而数轴上每个点都有惟一的一个实数(称为点的坐标)和它对应. 实数集的这一性质称为实数集 R 的“连续性”. 这一性质从几何的角度理解,就是全体实数布满整个数轴而没有“空隙”.

二、实数的绝对值及其基本性质

实数 x 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

在数轴上表示点 x 与原点之间的距离. 它具有下列基本性质：设 x,y 为实数，则

性质 1.1 $|x| \geqslant 0$

性质 1.2 $|x| = \sqrt{x^2}$

性质 1.3 $|-x| = |x|$

性质 1.4 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

性质 1.5 若 $a>0$，则

$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$

$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x < -a$ 或 $x > a\}$（式中“$<$”、“$>$”改为“$\leqslant$”、“$\geqslant$”同样成立）

性质 1.6 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

性质 1.7 $|x| - |y| \leqslant |x-y|$

性质 1.8 $|xy| = |x||y|$

性质 1.9 $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

这些性质利用绝对值的定义很容易证明，仅以性质 1.6 为例证明如下，其他从略.

性质 1.6 的证明：

由性质 1.3 得：$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$，$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$

因此，$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$

由性质 1.5，有 $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

三、区间与邻域

设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$a,b \in \mathbf{R}$，且 $a<b$.

集合 $\{x \mid a<x<b, x\in\mathbf{R}\}$ 称为以 a、b 为端点的**开区间**，记作 (a,b)，如图 1—2.

集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$ 称为以 a、b 为端点的**闭区间**，记作 $[a,b]$，如图 1—3.

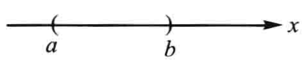


图 1—2

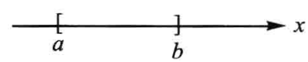


图 1—3

类似还可定义半开半闭及无穷区间：

$(a,b] = \{x \mid a<x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$　$[a,b) = \{x \mid a\leqslant x<b, x\in\mathbf{R}\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$

$(-\infty, b)=\{x \mid x<b, x \in \mathbf{R}\}$　$(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a, x \in \mathbf{R}\}$　$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\}$

当考虑某点附近的点所构成的集合时,通常用邻域的概念来描述:

设$\delta>0$,开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$即集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta, x \in \mathbf{R}\}$称为点$x_0$的$\delta$邻域(如图1—4).

而集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, x \in \mathbf{R}\}$称为点$x_0$的$\delta$空心邻域(如图1—5).

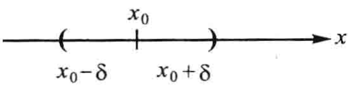


图1—4

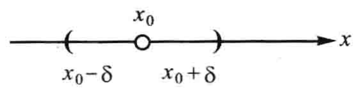


图1—5

而$(x_0, x_0+\delta)$称为点x_0的右邻域;$(x_0-\delta, x_0)$称为点x_0的左邻域.

四、常用不等式

由性质1.6 $|x+y| \leqslant |x|+|y|$,易得$||x|-|y|| \leqslant |x+y|$,合起来

$$||x|-|y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y| \tag{1.1}$$

通常又叫三角不等式.

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是n个正数,称$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$、$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$分别为这$n$个正数的算术平均、几何平均.它们有如下关系:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{1.2}$$

证*:先证左边不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

当$n=1,2$时,不等式显然成立.

当$n=2^k$时,不等式是$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$的直接推论.

当$n \neq 2^k$时,设$2^{l-1}<n<2^l, l \in \mathbf{N}^+$.记

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}=b$$

在$a_1, a_2, \cdots, a_n$后面加上(2^l-n)将其扩充成2^l个正数.

对这2^l个正数应用不等式,得到

$$\frac{1}{2^l}[a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^l-n)b] \geqslant [a_1 a_2 \cdots a_n b^{2^l-n}]^{\frac{1}{2^l}}$$

即 $a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^l-n)b\geqslant 2^l b$

$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant nb$

即 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ □①

第二节 映射与函数

一、映射

定义 1.1 设 X,Y 是两个给定的集合，若按照某种规则 f，使得对集合 X 中的每一元素 x，都可以找到集合 Y 中惟一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是集合 X 到 Y 的一个**映射**，记为

$$f:\ X\to Y$$
$$x\mapsto y=f(x)$$

式中：y 称为在映射 f 之下 x 的象，x 称为在映射 f 之下 y 的原象. 集合 X 称为映射 f 的定义域，记为 D_f，即 $D_f=X$. 而在映射 f 之下，X 中元素 x 的象 y 的全体称为映射 f 的值域，记为 R_f：

$$R_f=\{y\mid y\in Y \text{ 且 } y=f(x),x\in X\}$$

【例 1.1】设平面上所有三角形的全体为 X，所有圆的全体为 Y. 若定义对应规则 f 如下：

$$f:X\to Y$$
$$x\mapsto y(y\text{ 是三角形的外接圆})$$

则 f 是一个映射，其定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$.

【例 1.2】设 $X=\mathbf{Z}$（整数集），$Y=\mathbf{R}$（实数集）. 若定义对应规则 f：

$$f:\ X\to Y$$
$$x\mapsto y=x^2$$

则 f 也是映射，其定义域 $D_f=Z$，值域 $R_f=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,4,9,\cdots\}$.

映射是指两个集合之间的一种对应关系，它必须具备下列三个基本要素：

(1) 集合 X，即定义域 $D_f=X$；

(2) 集合 Y，即限制值域的范围 $R_f\subset Y$；

(3) 对应规则 f，使每一个 $x\in X$，有惟一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

---

① □——表示命题证明结束.

注意：(1)映射要求元素的象必须是惟一的；(2)映射并不要求原象惟一.

定义 1.2 设 f 是集合 X 到 Y 的一个映射，若对值域 Z_f 中任一元素 y 的原象惟一，即对 X 中任两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$，它们的象 y_1 与 y_2 也满足 $y_1 \neq y_2$，则称 f 为单射；如果映射 f 满足值域 $R_f = Y$，则称 f 为满射；如果 f 既是单射，又是满射，则称 f 为双射(又称一一映射).

【例 1.3】 设 $X = N = \{0,1,\cdots,n,\cdots\}$，$Y = \{偶数集\} = \{0,2,4,\cdots\}$. 若定义对应规则 f：

$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y = 2^{x+1}$$

则 f 为单射，但不是满射.

例 1.2 中的映射既不是单射，也不是满射.

【例 1.4】 设 $X = \mathbf{R}^+$(正实数集)，$Y = \mathbf{R}$(实数集). 若定义对应规则 f：

$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y = \lg x$$

则 f 为双射.

二、函数

定义 1.3 若 $X \subset \mathbf{R}$，$Y = \mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 为实数集，则 X 到 Y 的一个映射 f

$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

称为一元实函数，简称函数. 简单表示为 $y = f(x)$.

读作"函数 $y = f(x)$"或"函数 f".

$D_f = X$ 称为定义域，有时记作 $D(f)$ 或 D；$R(f) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为值域.

f 为函数，即：对每一实数 $x \in X$，按照对应规则 f，都有惟一的实数 $y = f(x) \in Y$ 与之对应.

【例 1.5】 将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个边长为 x 的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒. 所得方盒的容积 V 显然是 x 的函数：

$$V = x(a-2x)^2 \quad x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

式中：变量 x 是主动变化的，我们称之为自变量；而容积 V 是随着 x 的变化的，我们称之为因变量. 因变量与自变量之间的这种依赖关系就叫做函数关系.

在观察自然现象和分析社会活动时，可以发现存在着许许多多的变量，它们在一定的约束关系下变化着. 这里给出的一元实函数是含一个自变量和一个因变量的函数关系，在第七章还要进一步讨论多元函数(含有多个自变量)与向量函数

（含有多个因变量）.

函数的表示法有：(1)表格法；(2)图象法；(3)解析法.

解析法是将一个函数通过指明运算的数学式子表示出来，便于理论上分析研究，在实际问题中两个变量之间的函数关系一般是用解析法表示的.

【例 1.6】某厂生产某种型号车床，年产量为 a 台，分若干批进行生产，每批生产的准备费 b 元. 设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，此时，平均库存量为批量的一半. 设每台每年的库存费为 c 元，则一年的生产准备费与库存费之和 P 是批量 x 的函数关系：

$$P=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x \quad x\in(0,a]\text{且 } x\in\mathbf{N}$$

解析法表示的函数除显函数 $y=f(x)$ 形式以外，还会经常遇到分段函数、隐函数、参数函数.

(1)分段函数：在定义域不同的部分用不同的数学式子表达的函数.

【例 1.7】某运输公司规定的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元；超过 a 公里，超过的部分每公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 则吨运价 m 和里程 S 之间的函数关系为：

$$m=\begin{cases} ks & ,0<s\leqslant a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a) & ,s>a \end{cases}$$

这个函数关系就是分段函数，分段函数的例子很多，举例如下：

绝对值函数：

$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，其图象如图 1—6.

取整函数：$y=[x]=n,n\leqslant x<n+1,n\in\mathbf{Z}$，其图象如图 1—7.

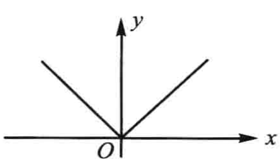


图 1—6

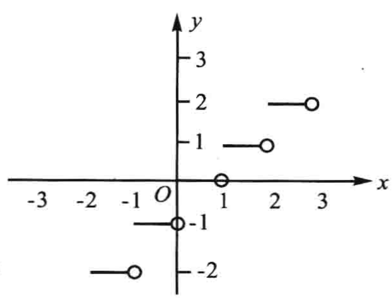


图 1—7

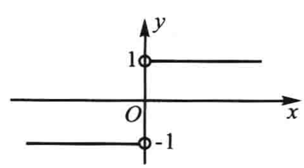


图 1—8