立体几何学直线及平面

立體幾何學
直線及平面

林鶴一　尾崎敏郎著

鄭心南譯

算學小叢書

目　次

立體幾何學

直線及平面

第一章

直線及平面之關係

1. 立體幾何學，亦稱空間幾何學者，乃論不在同一平面上之圖形之學科也．本篇所論，僅就空間圖形中直線及平面之性質而言，而不及體積．

定義 1. **平面**者，乃一表面而通過於其上之任何二點所作之直線必全在於其面上者也．

如泛言平面，則其廣袤本無限際，但如僅就其一部分而言時，則可用平行四邊形或其他之直線形，但隨必要可以延長．

依平面之定義，則一直線能在平面上時，其必要而且充分之條件，爲此直線上之二點當在平面之上，

定義 2. 一直線全在平面上時，稱此平面含此直線。

一平面所不含之直線，與此平面，不能有二點共通。

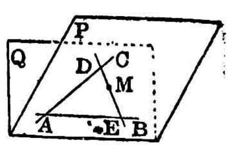
定義 3. 一直線與一平面唯有一點共通時，稱此直線與此平面相交。

公理 1. 與一平面相交之直線，由交點所分之各部分，各在此平面之兩側．又連結在一平面兩側之二點所得之線分，必與此平面相交。

公理 2. 以平面上之一直線爲軸而迴轉此平面使復歸於原位置時，則由此直線所分之平面之二部分中，其一部分當通過於空間一切之點。

2. 定理 1. 含有相交之二直線之平面有一，且限於一。

證明．命在 A 點相交之二直線爲 AB, AC，試先證含此二直線之平面必能成立。



試想像含有 AB 之任意平面，若以 AB 爲軸而迴轉時，則依公理 2，當通過於空間一切之點，故必能通過於 AC 上之一點 C，故必有通過直線 AB 及點 C 之平面。然因 A, C 二點必在此平面上，故直線 AC 必在此平面上(定義1)。故含 AB, AC 之平面必成立。

次證如此平面僅有一個。如含有 AB, AC 之平面有二，命爲 P, Q,

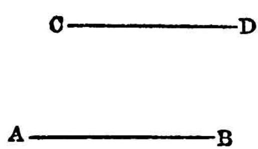
則平面 P 上任意之點 M 必在平面 Q 上。何則，如通過 M 點引直線於 P 上則可得與 AB, AC 相交之二點 D, E，因此直線通過 Q 上 D, E 二點，故此直線當全在 Q 上。依同理凡平面 Q 上任意之點必在 P 上，故二平面 P, Q 爲同一平面。即可證明此定理。

系 1. 含一直線及不在此線上一點之平面有一，且限於一。

系 2. 含不在同一直線上三點之平面有一，且限於一。

系 3. 與一直線平行而通過不在此線上之一點之直線有一，且限於一。

證明. 通過一點 C 而與直線 AB 平行之直線 CD，在含有直線 AB 及點 C 之平面上(∵依平面幾何學平行線之定義 AB, CD 平行者，此二線在同一平面上而不相遇之謂也）然此平面限於一，故直線 CD 在此唯一之平面上，與定直線 AB 平行而通過定點 C。故有一且限於一。



系 4. 含平行二直線之平面有一，且限於一。

3. 前節之定理及系(除 3 外)可略述如次：

(i) 相交二直線(AB, CD)

(ii) 一直線(AB)及不在此線上之一點 C

(iii) 不在同一直線上之三點(A, B, C)

(iv) 平行二直線(AB,CD)

決定一平面.

依 (i) (ii) (iii) (iv) 所決定之平面，通例略記如次:

(i) 平面(AB,CD).　(ii) 平面(AB,C).

(iii) 平面(A,B,C).　(iv) 平面(AB,CD).

問　　題

1. 每二個相交之三直線，在同一平面上，否則僅交於一點.

2. 二平行線及與此各相交之任意直線在同一平面上.

3. 每二個相互平行之三直線，與同一直線相交，則此等直線悉在同一平面上.

4. 每三個俱不在同一直線上之四點，決定若干平面?

5. 連結不在一平面上二直線上之點所得之直線，必不平行.

4　二直線相互位置之關係.

二直線相互之位置有二，只限此二.

(i) 在同一平面上.

(ii) 不在同一平面上.

(i) 可更分為二,

(a) 二直線相交

(b) 二直線平行

此外無他道.

故如謂二直線不平行亦不交時，則必為(ii)之位置. 即含此二直線

之一與他直線上一點之平面,必於此點與他直線相交。

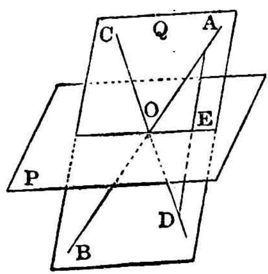
注意. 欲證空間上二直線爲平行時,僅證此二直線不相交,尙不充分,非證此二直線在同一平面上不可。

5. 定理 2. **共含有同一之點 O 而不一致之二平面 P,Q, 必共含有通過此點之一直線. 且不共含有不在此直線上之點。**

證明. 試先證 P,Q 共含有通過 O 點之一直線。通過平面 Q 上之點 O 引二直線 AB,CD。

(i)如此二直線中有一在平面 P 上,則 P,Q 共含有此直線。

(ii)如此二直線俱不在 P 上,則必各與平面 P 相交,故此二直線各由平面 P 分爲在兩側之二部分(公理 1)。今命 OA,OD 爲由直線 ABCD 所決定之平面 P 所分在其兩側之部分,則此二線分上任意二點,D 在平面 P 之兩側. 故依公理 1直線 AD 與 P, 必在 O 以外之一點相交,如命此點爲 E, 則 O,E 二點俱在平面 P 與 Q 上, 故直線 OE 在兩平面上 (定義1), 即二平面 P, Q 共含有直線 OE。



次證二平面 P,Q 不共含有不在此直線上之點. 使 P,Q 共含有不在 OE 上之點,則由定理 1 系 1, 當爲同一平面,與假設相反,不能成立。故可證明此定理。

定義 4. 二平面共含有一直線而不一致時稱此二

平面相交,此共有線稱爲此二平面之交線.

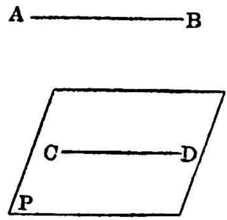
問題. 三角形之三邊,與任意之平面相交時,則三交點在一直線上.

6. 定理 3. 含平行二直線 (AB,CD) 中之一 CD 而不含其他 AB之平面 P,與 AB 不交.

證明. 設平面 P 與直線 AB 相交,命此交點爲 E,則

平面 P =平面(CD,E)

=平面(CD,AB)



卽平面 P 含有 AB,反於假設,故平面 P 與直線 AB 不交.

注意. 上述證明與前定理全無關係,如應用前定理,可得證明如下:

試作含有平行直線 AB,CD 之平面 Q,則 Q 與 P,於直線 CD 相交,不共含有不在 CD 上之點(定理2).然 AB 在 Q 上,故不在 CD 上之點不與 P 交.又與 CD 直線平行故 CD 線上之點亦不與 P 交,故可證明此定理、

定義 5. 一直線不含一平面上任何一點時,稱此直線與此平面平行.

系 1. 一直線與不含此直線之平面上任意直線平行時,與此平面平行.

7. 一直線與一平面之位置關係.

此關係不外三種如次:

(i) 直線含於平面(定義2)。

(ii) 直線與平面相交(定義3)。

(iii) 直線與平面平行(定義4)。

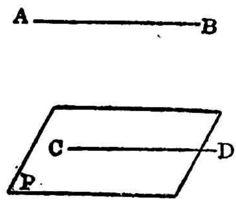
8. **定理 4.** 一直線(AB)與平面(P)平行時,則含此直線之平面(Q)與前平面(P)之交線(CD)與此直線(AB)平行。

證明。 直線AB與P平行,故與P上之直[illegible]在同一平面Q上,故AB,CD互相平行(參看第6節之圖)。

(記號) 直線與平面之記號間夾有 // 時表示二者平行。

例如 直線AB //平面(CD,E)。

系 1. 直線AB // 平面P時,通過P上之一點C而與AB平行之直線CD在於P上。



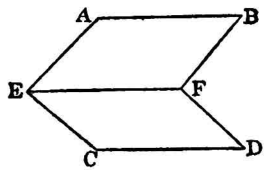
證明。 平面(AB,C)與P之交線通過點C而與AB平行(本定理)。直線CD亦通過點C與AB平行。故依定理1系3知其交線爲CD,即CD在於P上。

系 2. 與同一直線平行之二平面,其交線與此直線平行。

系 3. 二直線(AB,CD)如平行時,則各含此一直

線之二平面，其交線(EF)亦各平行。

證明. 直線 AB, 與平面(CD, EF)上一直線 CD 平行而不含於此平面，故依定理 3 系 1 與此平面平行，故含 AB 之平面 (AB, EF) 與平面(CD, EF)之交線即EF，與AB平行(本定理)。



依同一理由，可證明 EF 與 CD 平行。

問題. 一平面與含有與此平行之一直線之二平面各相交時，其交線互相平行。

9. 作圖題.

立體幾何學之作圖題，不能如平面幾何學將其圖形實際畫於紙上，但將滿足所設之條件之圖形，從推理上決定其位置即可.而其可爲基礎之事項，即認爲可作圖之事項如下:

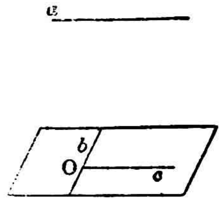
(i) 作第 3 節所述之各平面。

(ii) 於各平面上施行平面幾何學之作圖.

例. 試作含有不在同一平面上二直線之一，且與其他直線平行之平面。

解. 欲作含有不在同一平面上之二直線 a, b 之一 b，且與 a 平行之平面。於 b 上取一定點 O，在平面(O, a)上通過 O 點引與 a 平行之直線 c，依假設 a 不與 b 平行，故與 a 平行之 c 不與 b 一致。故如作平面(b, c)，即所求之平面。因平面(b, c)不含 a 而含與 a 平

行之 c 故也。又所求平面之外無他平面，因含 b 而與 a 平行之任何平面，縱能成立，而與 a 平行之 c 必在其上故也。



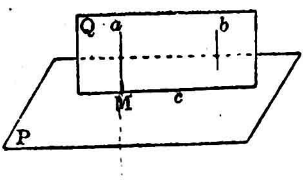
問題。 求通過一點且各與不平行之二直線平行之平面。

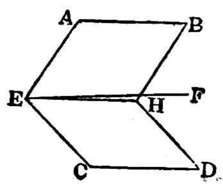
10. 定理 5. 與平行二直線(a, b)之一(a)相交之平面(P)，亦與他直線(b)相交。

證明。 含有 a, b 之平面 Q，於通過 a 及 P 之交點 M 之直線與 P 相交(定理 2)。命此直線為 c，則 a, b, c 皆在 Q 上，a 與 c 相交而與 b 平行。故 b 與 c 相交而不含於 P。故與 P 相交。

11. 定理 6. 與同一直線(AB)平行之二直線(CD, EF)互相平行。

證明. 三直線俱在同一平面上時平面幾何學上既已證明不必贅述，茲試就不在同一平面上時加以證明。AB∥CD，故平面(AB, E)與平面(CD, E)之交線 EH，與 AB 及 CD 俱相平行(定理 4 系 3)而與通過 E 點與 AB 平行之 EF 為同一直線(定理 1 系 3)即直線 EF 與 CD 平行。

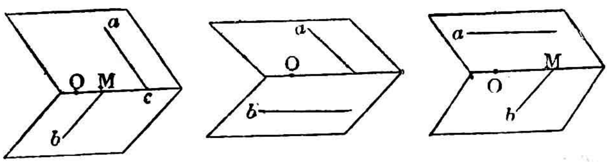




問　　題

1. 通過所與一點，試引直線使交於不在同一平面上之二直線。

解. 欲引通過O點,而交於不在同一平面上之a,b二直線.所引之直線通過O點而交於a,故在平面(O,a)上.依同一理由,亦在(O,b)上,故非在此二平面之交線上不可.今試吟味此交線得爲所求之直線與否?因平面(O,a)與平面(O,b)共有O點而非爲同一平面(因a,b不在同一平面上)故以通過O點之直線相交,然此交線c不必爲所求之直線.欲使c爲所求之直線,其必要而且充分之條件,爲各與a,b相交,故c爲與a,b中任何一直線平行時所求之直線不能存在.



注意1. 平面(O,a)(O,b)之交線,與a,b各不平行,何則?如此交線各與a,b平行;則a$\parallel$b與a,b不在同一平面上之假設相反故也.

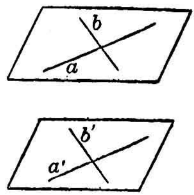
注意2. 不作(O,a)(O,b)二平面,而求平面(O,a)及b之交點M,通過O,M引直線以代之,此線如與a相交,則爲所求之直線,然如平面(O,a)$\parallel$b,則M點不存在,則此解自不能成立,二平面(O,a)(O,b)之交線,與b平行亦得不可能之結果,與前之吟味一致.又平面(O,a)與b之交點M雖能存在,如OM不與a相交時,則此解亦不能成立.如認OM爲二平面之交線則亦得不可能之結果,又與前之吟味一致.此時平面(O,b)與a平行.故平面(O,a)$\parallel$b或(O,b)$\parallel$a時此問題俱不能成立,否則必有解答.

2. 不在同一平面上四點所連結之四邊形,其各邊之中點爲一平

行四邊形之頂點。

12. 定理 7. 一平面(P)上相交之二直線(a,b)如各與他平面(Q)上之二直線(a′,b′)平行時，二平面(P,Q)互不相交。

證明。 二平面 P,Q 各含有互相平行二直線 a,a′ 中之一，如此二平面相交，則其交線必各與 a,a′ 平行(定理 4 系 3)。



依同理，其交線必各與 b 及 b′ 平行，故其交線同時與相交二直線 a 及 b 平行，此與定理 1 系 3 相反，故二平面 P,Q 不相交。

定義 6. 不相交之二平面稱互相平行。(二平面平行時，二平面記號之間夾 // 以表之)。

注意。 二直線 a′,b′ 必相交，何則？如不相交，則因共在平面 Q 上，故

上，故	$a' \parallel b'$	
然	$a' \parallel a$	(假設)
∴	$a \parallel b'$	(定理5)
然	$b \parallel b'$	(假設)
∴	$a \parallel b$	(定理5)

與假設相反，不可。

故定理可述之如次：

一平面上相交之二直線，如與他平面平行時，則二平面互相平行。

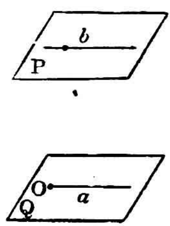
系 1.　一平面上相交之二直線，如與他平面平行時，則兩平面互相平行.

系 2.　如二平面平行，則其中一平面上一切直線，與他平面平行.

系 3.　如二平面(P,Q)平行，則通過其中一平面(Q)上之一點 O，所引與他平面(P)平行之直線(a)，在此平面(Q)上.

證明.　通過 P 上一點，如引與 a 平行之直線 b 時，因 P 與 a 平行，故 b 在 P 上(定理 4 系 1).然因 P∥Q，故由前系 b∥Q，故通過 Q 上之一點 O 與 b 平行之直線 a，亦在 Q 上(定理 4 系 1).

此系之對偶如次:



系 4.　與平行二平面中之一相交之直線，亦與其他相交.

系 .　與平行二平面中之一相交之平面，亦與其他相交.

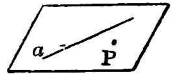
系 6.　平行二平面與他一平面之交線，互相平行.

問　　題

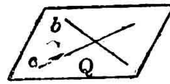
1. 如在平行二平面上之二直線，亦平行否?

2. 多數平行直線，由平行二平面所截取之部分相等.

3. 各含有不在同一平面上之二直線之一而與他直線平行之二平面，互相平行.



證明. 命 a,b 爲不在同一平面上之二直線，含 a 而與 b 平行之平面爲 P，含 b 而與 a 平行之平面爲 Q，因 a,b 不在同一平面上，故可引與 b 相交與 a 平行之直線 c。然因 $a \parallel Q$，故 c 在 Q 上，



$$c \parallel a$$

$$\therefore \quad c \parallel P$$

又由假設　$b \parallel P$　故由定理 7 系 1,

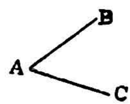
平面(b,c)即 $Q \parallel P$。

4. 通過一點 A 而與不含此點之平面 P 平行之平面有一，且限於一。

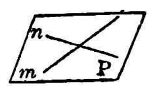
證明. 通過點 A，引二直線 AB,AC 使與平面 P 上相交之二直線 m,n 平行時，則

平面(AB,AC) ∥ 平面 P(定理 7 及定義 6)

故必有通過 A 點與 P 平行之平面。



其次凡通過 A 點與平面(AB,AC)相交之任何平面，皆與 P 相交(定理 7 系 4)。故通過 A 點與 P 平行之平面舍平面(AB,AC)外，無他平面。

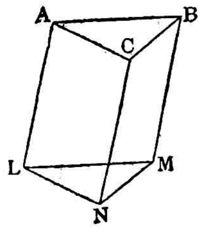


5. 與同一平面平行之二平面，互相平行。

6. 相交之二平面如各與其他相交之二平面平行時，前者之交線與後者之交線平行。

13. 定理 8. 相交二直線(AB,AC)如各與其他相交二直線 (LM,LN) 平行時，前者所夾二對之對頂角，各與後者所夾二對之對頂角相等。

證明. (i)於平面(AB,LM)上,命AB與LM在AL之同側,又於平面(AC,LN)上,命AC與LN在AL之同側.



於AB,LM上任意取相等之線分AB,LM,又於AC,LN上任意取相等之線分AC,LN時,則四邊形ABML爲平行四邊形.

故 $$BM\#AL$$

四邊形ACNL亦爲平行四邊形.

故 $$CN\#AL$$

故由定理6, BM#CN, 故四邊形BMNC,爲平行四邊形,

$$CB=NM$$

然 $$\left.\begin{aligned} AB=LM \\ AC=LN \end{aligned}\right\}(\text{作圖})$$

$$\therefore \qquad \triangle ABC\equiv LMN$$

$$\therefore \qquad \angle ABC=MLN$$

(ii)於平面(AB,LM)上,命AB與LM在AL之同側,於平面(AC,LN)上,命AC與LN在AL之兩側.

延長NL使爲NLN′時,則LN′與AC共在AL之同側,故由(i)

$$\angle BAC=MLN'$$

(iii)於平面(AB,LM)上命AB與LM在AL之兩側,於平面(AC,LN)上命AC與LN在AL之兩側.

延長ML,NL,各爲MLM′,NLN′時,則LM′, LN′各與AB,AC共在AL之同側,故由(i)