JSRD 竞赛热点专题丛书

高中数学

竞赛热点专题

编著 叶军 卞新荣 李再湘

◆鲜明、准确的读者定位
◆精练、适中的内容打造
◆抢手、耀眼的作者队伍
◆理性、人性化的版式设计

湖南师范大学出版社

竞赛热点
专题丛书

高中数学

竞赛热点专题

编著 叶　军
卞新荣
李再湘

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学竞赛热点专题／叶军等编著．—长沙：
湖南师范大学出版社，2001.6
（竞赛热点专题丛书）
ISBN 7—81081—058—8/G·023

Ⅰ．高… Ⅱ．叶… Ⅲ．数学课－高中－教学参考
资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 030218 号

高中数学竞赛热点专题

编　　著：叶　军　卞新荣　李再湘
全程策划：陈宏平
组稿编辑：陈宏平
责任编辑：尔　冬
责任校对：刘琼琳

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市银都教育印刷厂印刷
730×988　16 开　32.75 印张　602 千字
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 8 月第 2 次印刷
印数：8201—16250 册
ISBN7—81081—058—8/G·023
定价：35.00 元

策划者寄语

“熊掌”和“鱼”可兼得
“竞赛”“高考”能兼顾
拼搏竞赛的经典　挑战高考的利刃

1. **鲜明、准确的读者定位**：本套书克服了目前市场上竞赛用书只针对部分参加竞赛的学生即所谓“精英”的缺陷，把关怀对象扩大到了立志参加竞赛者和挑战高考的所有中学生.

2. **精练、适中的内容打造**：全套书选取了世界各地及国内的经典赛题和最新的赛题或选拔题. 难度系数控制在“高考提高题”和“竞赛基础题”的范围，使学生在备考时，“高考”和“竞赛”训练相得益彰.

3. **抢手、耀眼的作者队伍**：本套书的主要作者来自全国著名、国际知名的湖南师大理学院、湖南师大附中、长沙市一中、长沙市雅礼中学. 主要作者均是奥林匹克高级教研员，他们所培训的学生在历次的国际或国内数、理、化奥林匹克中已经为我国夺取了几十

枚金牌、银牌，取得了骄人的战绩.

4. **理性、人性化的版式设计**：本套书采用16开异型本符合国际潮流，版式中为读者留下足够的空白，以便读者及时地记录学习心得和重点摘要，不用另纸夹记.用5号字体而不用6号字体，可减轻中学生阅读时眼睛的疲劳，体现了出版人文精神的现实关怀.

挑战“高考”的同学们在理解教材的基础上阅读此书，她将为深化你的知识，增强你的技能，活跃你的思维，实现你的梦想而体现价值.

拼搏“竞赛”的同学们在阅读此套书的基础上，继续阅读我社已经出版的《奥林匹克教程》丛书，她必将为你的梦想插上翅膀.

一箭双雕的“竞赛专题”　过河搭桥的“竞赛专题”
题名金榜的“竞赛专题”　提升技能的“竞赛专题”

《初中数学竞赛热点专题》
《初中物理竞赛热点专题》
《初中化学竞赛热点专题》
《高中数学竞赛热点专题》
《高中物理竞赛热点专题》
《高中化学竞赛热点专题》

前言

近年来,全世界各地的中学生学科奥林匹克方兴未艾.我国选手在每年一次的国际数学竞赛中不断取得优异成绩,多次获得金牌总数世界第一,团体总分世界第一.广大中学生参加各学科的奥林匹克活动,不仅可培养他们的爱国主义情操,而且也是他们丰富学习内容,增长知识,提高各门功课学习成绩的重要途径之一.

多年的数学竞赛实践证明,广泛深入地开展中学数学课外活动,科学合理的举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展,提高青少年数学素质的一个有力措施.

本书由湖南师范大学理学院副教授叶军主编,参加编写的作者有:叶军(第一编,第三编,第八编)、卞新荣(第五编,第六编)、李再湘(第二编,第四编,第七编).

本书是根据全国高中数学竞赛大纲并结合

高考数学考纲较高要求部分，精选出 8 个热门专题编写而成的．各专题融知识、方法、技能技巧于一体，着眼于数学智力的开发，着重数学解题能力的提高．

为了便于学生掌握各专题的知识、方法要领，在各专题的每一个小节中专门配备有一定数量的练习，并附有提示及答案，供同学们根据自己的实际情况有选择的使用．

我们真诚地希望本书能对广大高中学生参加数学竞赛有所裨益，并能通过对本书的学习提高理科各学科的成绩，题名金榜高考时．书中如有错漏或不当之处，欢迎读者批评指正．

作　者

2001 年春于湖南师范大学

目录

第一专题　初等数论

第一讲　整除性理论及应用

在本套书的初中册里,我们已经较为系统地学习了整除的有关概念和性质.因此,在这一讲里,着重围绕解题方法、赛题类型,特别是质数、互质和特殊数等内容,介绍有关整数性质及整除性问题.

§1.1　带余除法

两个整数的和、差、积仍然是整数,然而用一个整数除以另一个非零整数所得的商却不一定是整数.

定义1　设 a,b 是两个整数,且 $b\neq0$.如果存在一个整数 q,使等式

$$a=bq$$

成立,那么我们就称 a 能被 b 整除,或称 b 整除 a,记作 $b|a$,并称 b 为 a 的因素(或约数),a 为 b 的倍数.如果不存在 q,就说 b 不整除 a,记作 $b\nmid a$.

由定义我们不难证明下面的定理.

定理1　设 $b\neq0,c\neq0$,我们有

(1)若 $b|a,a\neq0$,则 $|b|\leqslant|a|$;

(2)若 $b|a,a|b,a\neq0$,则 $a=b$ 或 $a=-b$;

(3)若 $c|b,b|a$,则 $c|a$;

(4)若 $b|a$,则 $cb|ca$;

(5)若 $c|a,c|b$,则 $c|ma+nb$,这里 $m,n\in\mathbf{Z}$

因为 a 与 $|a|$ 有相同的约数,因此我们讨论约数时就可以只就正整数来讨论.

下面是整除的基本定理(带余除法).

学习心得

定理 2　对于任意整数 $a,b(b\neq 0)$,存在唯一的一对整数 q,r,使得

$$a=qb+r,\quad 0\leqslant r<|b|.$$

其中 q 和 r 分别称为 b 除 a 的商和余数.

证　因为 a 必在数列

$\cdots,-2|b|,-|b|,0,|b|,2|b|,\cdots$

中相邻两数之间,我们不妨设

$$q|b|\leqslant a<(q+1)|b|,$$

于是 $a-q|b|\geqslant 0, a-q|b|<|b|$. 令 $a-q|b|=r$,则 $0\leqslant r<|b|$. 因此,当 $b>0$ 时,有 $a=qb+r$;当 $b<0$ 时,有 $a=(-q)b+r$. 这样,我们就证明了 q,r 的存在性. 下面我们来证明它们的唯一性.

假设 $a=q_1b+r_1, 0\leqslant r_1<|b|$,则

$(q-q_1)b=r_1-r, 0\leqslant|r_1-r|<|b|$,

即 $|q-q_1|\cdot|b|<|b|$,因此,$|q-q_1|<1$,但 q,q_1 都是整数,所以 $q=q_1$. 于是 $r=r_1$,这就证明了 q,r 的唯一性. 至此定理得证.

带余除法有如下等价形式.

定理 3　对任意整数 $a,b(b\neq 0)$,存在唯一的一对整数 s,t 使得

$a=sb-t, 0\leqslant t<|b|$.

证　当 $b|a$ 时,结论显然成立.

当 $b\nmid a$ 时,由定理 2 知,存在整数 q,r 使得

$a=qb+r, 0<r<|b|$.

令 $r=|b|-t$,则 $0<t<|b|$,且

$a=(q\pm 1)b-t$.

取 $s=q\pm 1$,则有 $a=sb-t$. 由 q,r 的唯一性知,s,t 也唯一. 证毕.

注　1°. 当 $a\geqslant b>0$ 时,$s\geqslant 1$. 其中 $s=1$ 当且仅当 $a=b$.

2°. 当 $a>b>0$ 时,$t=b-r, s=q(b|a)$ 或 $s=q+1\geqslant 2(b\nmid a)$.

下面的结论在解题时常用到:

(1) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\quad n\in\mathbf{N}$.

(2) 对正奇数 n,有

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^k a^k b^{n-k-1}+\cdots+b^{n-1})$.

(3) $a^m-1\mid a^{mn}-1, m\in\mathbf{N}, n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

(4) 二项式定理. 设 $n\in\mathbf{N}$,有

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k.$$

其中 $C_n^k(0\leqslant k\leqslant n)$ 是整数.

(5) 由 C_n^k 是整数知,任意 k 个连续自然数的乘积一定能被 $k!$ 整除.

学习心得

例 1　设 $n\in\mathbf{N}, f(n)=n(n^2-1)(n^2-5n+26)$,求证:

$120 \mid f(n)$.

证　显然，$f(1)=0, f(2)=120, f(3)=480$，故结论对 $n=1,2,3$ 成立. 当 $n \geqslant 4$ 时，

$$f(n)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n-2)(n-3)+20(n-1)\cdot n\cdot(n+1).$$

$\because$　$5!=120$，$\therefore$　$120 \mid (n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n-2)(n-3)$，

又　$3!=6$，$\therefore$　$6 \mid (n-1)\cdot n\cdot(n+1)$，$\therefore 120 \mid 20(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$，从而 $120 \mid f(n)$.

例 2　设 p 为奇质数，证明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}=\frac{a}{b}$$的分子 a 是 p 的倍数.

证　由条件等式有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-3}+\cdots+1=\frac{a}{b}.$$

两式相加得

$$\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2(p-2)}+\cdots+\frac{p}{p-1}=\frac{2a}{b},$$

$\therefore$　$2a\cdot(p-1)!=p\cdot M$（M 是正整数）.

但 p 为奇质数，所以 $(p,2(p-1)!)=1$，故 $p \mid a$.

注　进一步我们可证明 $p^2 \mid a$.

例 3　设 p,q 均为正整数，使得

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

试证：$1979 \mid p$.

分析　本题是第 21 届 IMO 试题. 我们来证明更一般的结论：

设 m 是形如 $6k-1$ 的质数，$n=\frac{1}{3}(m-2)$，若

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\ (p,q\in\mathbf{N}),$$

则　$m \mid p$.

证　令 $m=6k-1, k\in\mathbf{N}$，则 $n=2k-1$，于是

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2k}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2k-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k+1}\right)$$

$$=\frac{2n+2k+1}{(n+1)(n+2k)}+\frac{2n+2k+1}{(n+2)(n+2k-1)}+\cdots+\frac{2n+2k+1}{(n+k)(n+k+1)}.$$

$\therefore\quad p\cdot(2n+1)!=(2n+2k+1)q\cdot M=(6k-1)q\cdot M,$

即 $\quad p\cdot(4k-1)!=m\cdot q\cdot M.$

$\because\quad m$ 为 $6k-1$ 的奇质数，$\therefore(m,(4k-1)!)=1,$

$\therefore\quad m\mid p.$

当 $k=330$ 时，$m=6k-1=1979$，为质数，$2n+1=1319$，故原题结论成立.

例 4 试证：对于任意不小于 2 的整数 n，

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\text{不是整数.}$$

证 令 m 是满足 $2^m\leqslant n$ 的最大整数(显然 $m\geqslant1$)，M 是所有不大于 n 的正奇数之积.

对于任一不大于 n 的正整数 k，可以写成

$$k=2^{m_k}\cdot t_k\text{(}m_k\text{ 为非负整数，}t_k\text{ 为正奇数).}$$

由 $2^{m_k}\cdot t_k\leqslant n$，有 $t_k\leqslant n$，$2^{m_k}\leqslant n$，再由 m 的定义有 $m_k\leqslant m$. 因此除 $2^m=k$ 外，对于其他 k 均有 $m_k\leqslant m-1$. 此时 $2^{m_k}\cdot t_k\mid 2^{m-1}\cdot M$，所以有

$$\begin{aligned}A\cdot2^{m-1}\cdot M&=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{m_k}\cdot t_k}\Big)\cdot2^{m-1}\cdot M\\&=l+\frac{M}{2}\text{(}l\text{ 为正整数).}\end{aligned}$$

又因为 M 为奇数，所以$\frac{M}{2}$不是整数，从而 $2^{m-1}\cdot M\cdot A$ 不是整数，故 A 不是整数.

注 本题所涉及的知识不多，但方法与技巧性是比较特别的. 下面的题目也可以考虑用类似的办法.

(1)设 $m,n\in\mathbf{N}$，证明

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1},$$

$$C=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+m}\text{均不是整数.}$$

(2)设 $m>n\geqslant1$，$a_1<a_2<\cdots<a_s$ 是不超过 m 且与 n 互质的全部正整数. 记

$$S_m^n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_s},$$

则 S_m^n 不是整数. 由此可直接推出

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}(n\geqslant0)$$

不是整数.

学习心得

例 5 对于正整数 n 与 k,定义

$$F(n,k)=\sum_{r=1}^{n}r^{2k-1},\text{求证}:F(n,1)\mid F(n,k).$$

分析 本题是 1986 年加拿大赛题. 注意到 $F(n,1)=\frac{1}{2}n(n+1)$,要证明$F(n,1)\mid F(n,k)$,只要证明 $n(n+1)\mid 2F(n,k)$. 而$(n,n+1)=1$,所以只须证明 $n\mid 2F(n,k)$,$(n+1)\mid 2F(n,k)$.

证 $\because F(n,k)=\sum_{r=1}^{n}r^{2k-1}=\sum_{r=1}^{n}(n+1-r)^{2k-1}$,

$\therefore\ 2F(n,k)=\sum_{r=1}^{n}[r^{2k-1}+(n+1-r)^{2k-1}]$.

又因为 $r^{2k-1}+(n+1-r)^{2k-1}$有约数 $r+(n+1-r)=n+1$,所以有 $n+1\mid 2F(n,k)$.

又$\because F(n,k)=\sum_{r=0}^{n}r^{2k-1}=\sum_{r=0}^{n}(n-r)^{2k-1}$,

$\therefore\ 2F(n,k)=\sum_{r=0}^{n}[r^{2k-1}+(n-r)^{2k-1}]$.

而 $r+(n-r)=n\mid r^{2k-1}+(n-r)^{2k-1}$,$\therefore\ n\mid 2F(n,k)$.

综上所述,$F(n,1)\mid F(n,k)$.

例 6 求同时满足下列条件的一组整数 a,b.

(1)$ab(a+b)$不能被 7 整除;

(2)$(a+b)^7-a^7-b^7$ 能被 7^7 整除.

分析 本题是第 25 届 IMO 试题,解题中需用到二项式定理.

解 由二项式定理有

$$\begin{aligned}(a+b)^7-a^7-b^7&=\sum_{k=1}^{6}C_7^k a^{7-k}b^k\\&=7ab(a+b)(a^2+b^2+ab)^2.\end{aligned}$$

由题设条件(1)、(2)知,$7^6\mid(a^2+b^2+ab)^2$,即 $7^3\mid a^2+b^2\mp ab$.

令 $a^2+b^2+ab=7^3$,即$(a+b)^2-ab=343$,

取 $a+b=19$,则 $ab=19^2-343=18$,从而 $a=18,b=1$.

易验证:$a=18,b=1$ 符合要求.

例 7 是否存在 1000000 个连续整数,使得每一个都含有重复的质因子,即都能被某个质数的平方所整除?

分析 本题是第 15 届美国普特南数学竞赛试题. 显然该题是一个一般性命题的特例,该一般性命题是:对任何的正整数 m,存在 m 个连续的整数,使得每个整数都含有重复的质因子. 因此,我们只须证明这个一般性命题是正确的. 显然可用数学归纳法.

证 当 $m=1$ 时,显然成立,这只需取一个质数的平方.

假设当 $m=k$ 时命题成立,即有 k 个连续整数 $n+1,n+2,\cdots,n+k$,

它们分别含有重复的质因子 $p_1,p_2,\cdots,p_k$.任取一个与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 都不同的质数 p_{k+1},当 $t=1,2,\cdots,p_{k+1}^2$ 时,$t\cdot p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+(k+1)$ 这 p_{k+1}^2 个数中任两个数的差是形如 $\alpha p_1^2p_2^2\cdots p_k^2(1\leqslant\alpha\leqslant p_{k+1}^2-1)$ 的数,不能被 p_{k+1}^2 整除,故这 p_{k+1}^2 个数除以 p_{k+1}^2 后,余数两两不同.但除以 p_{k+1}^2 后的余数只有 $0,1,\cdots,p_{k+1}^2-1$ 这 p_{k+1}^2 个,从而恰有一个数 $t_0(1\leqslant t_0\leqslant p_{k+1}^2)$,使 $t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+(k+1)$ 能被 p_{k+1}^2 整除,这时,$k+1$ 个连续整数:

$$t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+1,t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+2,\cdots,$$
$$t_0p_2^1p_2^2\cdots p_k^2+n+k,t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+(k+1)$$

分别能被 $p_1^2,p_2^2,\cdots p_k^2,p_{k+1}^2$ 整除,即 $m=k+1$ 时命题成立,故命题对一切自然数 m 均成立.

注　本题采用的是加强命题证题法.在使用数学归纳法时,常采取此方法.

例 8　设 $a,b\in\mathbf{N},a\geqslant b$,则

$$\left[\frac{a^2+b^2}{ab+1}\right]=\begin{cases}\left[\frac{a}{b}\right],当\ b\mid a\ 时;\\ \left[\frac{a}{b}\right]+1,当\ b\nmid a\ 时.\end{cases}$$

此处$[x]$为不超过 x 的最大整数.

证　当 $b\mid a$ 时,设 $a=qb,q\in\mathbf{N}$,则只须证明

$$q-1<\frac{a^2+b^2}{ab+1}<q+1. \tag{①}$$

事实上,注意到 $a\geqslant b$ 有

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}<\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant q+1,$$

故①式右边成立.

又　$q-1<\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\dfrac{(q^2+1)b^2}{qb^2+1}\quad\Leftrightarrow$

$(q-1)(qb^2+1)<q^2b^2+b^2\quad\Leftrightarrow$

$q-1<(1+q)b^2$ 成立.

故①式左边成立.综上所述,①得证.

当 $b\nmid a$ 时,设 $a=qb+r,0<r<b$,则只须证明

$$q<\frac{a^2+b^2}{ab+1}<q+2. \tag{②}$$

事实上,注意到 $a\geqslant b$ 有

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}<\frac{a^2+b^2}{ab}\leqslant\frac{a}{b}+1=q+1+\frac{r}{b}<q+2,$$

故②式右边成立.

学习心得