高等代数讲义

上　册

习题解答

北京大学　邱维声

中央广播电视大学教务处编

说　明

本材料为王萼芳、丘维声编《高等代数讲义》上册(北京大学出版社 1983 年版)一书中的全部习题作了解答，许多题目的解法或证法往往不是唯一的，我们仅对每道题给出一种解法或证法，仅供参考。

目　　录

第一章　行列式

§1. 二级和三级行列式

习　题　1.1

1. 计算下列行列式:

① $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$　　④ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

⑤ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$　　⑥ $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

答: ① 13　② 0　③ -49　④ 103

⑤ $a_{11}a_{22}a_{33}$　⑥ $c(a_1b_2-a_2b_1)$

2. 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=10 \\ x_1+4x_2-2x_3=-8 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \end{cases}$$

答: $x_1=2$　$x_2=-1$　$x_3=3$

§2. 排　　列

习　题　1.2

1. 求下列各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

① 315462　　② 365412　　③ 654321

④ 7654321　　⑤ 87654321

⑥ 987654321　　⑦ 123456789

⑧ 518394267　　⑨ 518694237

答： ① 6，偶排列；

② 11，奇排列；

③ 15，奇排列；

④ 21，奇排列；

⑤ 28，偶排列；

⑥ 36，偶排列；

⑦ 0，偶排列；

⑧ 15，奇排列；

⑨ 18，偶排列。

2. 求下列排列的逆序数：

① $23\cdots(n-1)n1$

② $(n-1)(n-2)\cdots21n$

答： ① $n-1$　　② $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

3. 写出把排列 315462 变成 123456 的那些对换。

解： $315462 \xrightarrow{(6,2)} 315426 \xrightarrow{(5,2)} 312456 \xrightarrow{(3,2)} 213456$

$$\xrightarrow{(2,1)} 123456$$

此题答案不唯一，但是所作对换的次数必定是偶数。

4. 讨论排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的奇偶性。

解：$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

当 $n=4k$ 时，

$$\frac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$$

故为偶排列；

当 $n=4k+1$ 时，

$$\frac{(4k+1)4k}{2}=2k(4k+1)$$

故为偶排列；

当 $n=4k+2$ 时

$$\frac{(4k+2)(4k+1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$$

这是奇数，故为奇排列；

当 $n=4k+3$ 时

$$\frac{(4k+3)(4k+2)}{2}=(4k+3)(2k+1)$$

这是奇数，故为奇排列。

§3. n 级行列式的定义

习 题 1.3

计算下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

解：原行列式$=(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

$=(-1)^6 a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

解：原行列式$=(-1)^{\tau(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)}a_{1n}\ a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}\ a_{n1}$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\ a_{2,n-1}\ \cdots\ a_{n-1,2}\ a_{n1}$。

3. $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix}$

解：原行列式$=(-1)^{\tau(23451)}b_1b_2b_3b_4b_{51}$

$=(-1)^4 b_1b_2b_3b_4b_{51}=b_1b_2b_3b_4b_{51}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解: 原行列式$=(-1)^{\tau(234\cdots n\,1)}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)n$

$$=(-1)^{n-1}n!$$

5. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$

解: 原行列式$=(-1)^{\tau(n-1\; n-2\;\cdots\;1\; n)}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)n$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

6. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

解: 原行列式$=(-1)^{\tau(43215)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=5!$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

解: 据行列式性质1，此行列式与第6题的行列式有相同的值: $5!$

§4. 行列式的性质及计算

习　题　1.4(1)

1. 计算行列式:

① $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} -1 & 203 & \frac{1}{3} \\ 3 & 298 & \frac{1}{2} \\ 5 & 399 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ ma_1 & ma_2 & ma_3 & ma_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$

解: ① $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 200-4 & 200+3 & 200-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 200 & 200 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=0+2\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\1 & 1 & 1\\-4 & 3 & -1\end{vmatrix}=2\times4=8$$

② $\begin{vmatrix}1 & \frac{3}{4} & -1\\-3 & \frac{1}{2} & 5\\-1 & 1 & -2\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\-3 & 2 & 5\\-1 & 4 & -2\end{vmatrix}=-11\frac{3}{4}$$

③ $\begin{vmatrix}-1 & 203 & \frac{1}{3}\\3 & 298 & \frac{1}{2}\\5 & 399 & \frac{2}{3}\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & 200+3 & 2\\3 & 300-2 & 3\\5 & 400-1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\begin{vmatrix}-1 & 200 & 2\\3 & 300 & 3\\5 & 400 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\3 & -2 & 3\\5 & -1 & 4\end{vmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{6}(0+28)=4\frac{2}{3}$$

④ 这个行列式的第 1, 3 行成比例，因此它的值等于零。

2. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

证明的提示: 用行列式的性质 3、性质 5 的推论以及性质 4 可以证得结论。

习 题 1.4(2)

1. 计算下列行列式:

① $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

答: 155.

② $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

答: 18.

③ $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 4 & -3 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{4} & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解: ③ $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 4 & -3 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{4} & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -6 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -5 \\ -4 & 12 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①+③\cdot(-1)}\frac{1}{12}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -5 \\ -4 & 12 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -99 \end{vmatrix}$$

$$=49\frac{1}{2}.$$

④ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

$= 160.$

2. 计算下列 n 级行列式:

① $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

② $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$

解: ① $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+(n-1) & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$$

② $$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-b & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n-b)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)(-b)^{n-1}=(-1)^{n-1}b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$$

§5. 行列式按一行(列)展开

习　题　1.5(1)

1. 设

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2 & 5\\ 12 & 7 & 0 & 6\\ -4 & 8 & 11 & 9\\ 16 & 23 & 14 & 19\end{vmatrix}$$

写出D中所有元素的代数余子式。

解:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 0 & 6\\ 8 & 11 & 9\\ 23 & 14 & 19\end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}12 & 0 & 6\\ -4 & 11 & 9\\ 16 & 14 & 19\end{vmatrix}$$

其余元素的代数余子式可类似地写出。

2. 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

分别写出 D_1、D_2 的第 3 行元素的代数余子式，并加以比较。

解： D_1 的第 3 行元素的代数余子式如下：

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

D_2 的第 3 行元素的代数余子式也是上述这些。

3. 设

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$