大學叢書

實用最小二乘式

唐藝菁著

商務印書館發行

大學叢書

實用最小二乘式

唐藝菁著

商務印書館發行

分類號 418.8
登記號 41502

中華民國二十四年四月初版
中華民國三十八年四月三版

(53764平)

大學叢書(教本) 實用最小二乘式一冊

平裝 定價拾元

印刷地點外另加運費

著作者 唐藝菁
發行人 陳懋解 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

(本書校對者胡達聰)

序

本書理論與實用並重,前三章詳論或是率曲線之基本公式,並略及統計學中事物之實證,以示大自然界無不可入數學公式.第七章所論經驗公式,殆各種科學成立之基礎,尤爲社會科學化之媒介.余信千百年後,舉凡人之智愚,世之治亂,莫不有公式以範之.四五六各章,專論最或是值及其精度,實例計算,多憑表解,井然有序,偶有錯誤,能隨時查檢,不致有毫釐千里之失.

本書初稿付印,謬誤在所難免,倘望讀者賜書指正.

中華民國二十二年十月著者識於嶽麓山湖南大學.

目　次

實用最小二乘式

第一章

概論

1. 量及數量. 設有二量,如距離 AB 及 CD. 今研究二者長之關係,若不採用單位,則除 $AB \gtreqless CD$ 外,餘無方法,可資表示.若以尺度之,而設 $AB=10$ 尺,$CD=5$ 尺,則 $AB=\frac{10}{5}CD=2\cdot CD$,卽 AB 之量爲 CD 之量之 2 倍. AB 及 CD 曰量,10 及 5 曰數,10 尺,5 尺曰數量.又如某物質之質量爲 n 磅,n 磅曰某物質之數量.

2. 觀測及觀測值(Observation and observed value). 用各種測器,以以直接或間接方法,求距離之長度,物體之體積,物質之質量,時間之分秒,稱曰觀測.觀測所得之數量曰觀測值.

3. 眞值及最或是值(True value and most probable value). 凡一量祇有一眞值.但就一量返復施行若干次觀測,無論同一測器,同一方法,同一注意,其所得結果,恆一不致.此從事觀測者所共知.因之於各觀測值中,難得量之**眞值**,卽令有之,亦不能決定何者爲是.實際又不能不取一值以代之.不得已,祇

能由平均法求與眞値最近之一值耳.此最近之一值曰最或是值.

4. 精密及精度(Precision and measure of precision). 就同一量而言,若觀測結果有多組觀測值,且各組觀測之情狀,又各互異,則每組將有一最或是值.設對各最或是值不加研究,將不知應取何值以代眞值.是則當先研究各組觀測之精密程度,以比較其優劣,用以研究精密之量曰**精度**.(見後27節).

5. 最小二乘式之目的.

(1) 求最或是值.

(2) 求精度.

(3) 若觀測值有多組,則利用精度以比較各最或是值之優劣.或利用精度,合併各最或是值,以求最後之最或是值,以代眞值.

6. 直接觀測及間接觀測(Direct observation and indirect observation). 觀測方法有二:曰直接觀測,曰間接觀測.

(1) 直接觀測者,就所求量逕行觀測之謂.例如用測尺直接測定一距離之長,用經緯儀直接測定一角之大小.

(2) 間接測量者,不測其應測定之量,而測其有關係之量.即就原量之函數,施行觀測之謂.如求一角之大小,觀測其他諸角之和或差以定之;觀測恆星之高,以定地點之經緯度;調查一國之人口,以算定全國所需糧食之總額.

7. 獨立觀測及規約觀測 (Independent observation and

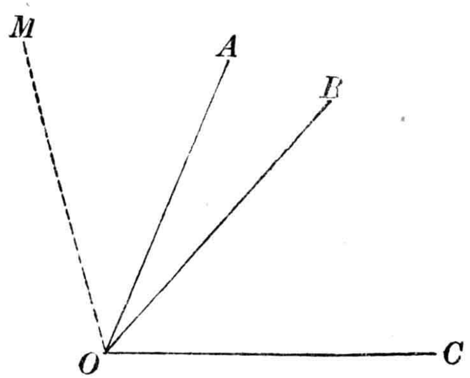
conditioned observation). 觀測種類亦有二:曰獨立觀測,曰規約觀測.

(1) 規約觀測者,不問測法爲直接或間接,惟其結果,須合於理論上嚴密之規約.例如測一平面三角形之各角,其和必爲180°;測一點周圍各角,其和必爲360°.

(2) 獨立觀測者,不拘於嚴格之規約,有時亦分直接間接兩法.例如測一平面三角形,僅測其二角,其餘一角,不施行觀測,則所測二角,彼此毫無關係,是曰**直接獨立觀測**.

又如測一線之長,分爲兩段測之,彼此仍爲獨立.是曰**間接獨立觀測**.

8. 以上諸項觀測之區別,更舉例以明之如下:



(圖 1)

欲測 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 兩角(圖 1),若直置經緯儀於O點而分別測之,其所測二角爲直接獨立觀測.若取他之補助方向OM,測 $\angle MOA$, $\angle MOB$, $\angle MOC$ 三角,由此決定

$$\angle AOB = \angle MOB - \angle MOA,$$

$$\angle BOC = \angle MOC - \angle MOB.$$

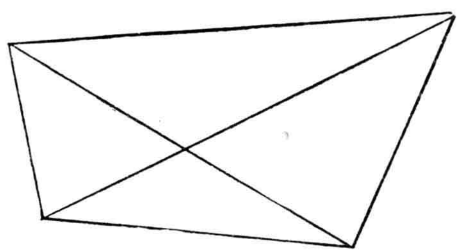
是謂間接獨立觀測.

今於測定 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 外,再測 $\angle AOC$,則三角有一嚴格之規約.

即 $$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC.$$

三角之觀測值,必合乎此規約,方能適用,是謂規約觀測.

又舉例以明之如下:



(圖 2)

欲測定一四邊形(圖2).若僅測各邊各角,則爲直接獨立觀測.若由各邊各角,測定四邊形之面積,則爲間接獨立觀測.

僅測兩邊或兩角,自然各無關係而爲獨立.若測邊角全體,必合乎多數幾何規約,然後依觀測值所製之圖,在紙上方無錯誤,是爲規約觀測.

9. 觀測誤差(Errors of observation). 眞值與觀測值之差,曰觀測誤差.吾人日常欲測定一量,同一測器,同一方法,同一注意,返復觀測 n 次,其 n 個觀測值,將有偶同者,有相異者.召

途人而告之,莫不信以爲然.但一量僅有一值,故異觀測值之觀測誤差因而各異.卽凡觀測值必附有觀測誤差.諸觀測誤差中,是否有一爲零,無從推知.故量之眞值,决難求得.所可求者,誤差最小之近似值耳,是卽最或是值.然此值果與眞值最近與否,仍是疑問,惟勉強利用之,以代眞值而已.

附於觀測值之觀測誤差,其成因不一,玆類別之如下:

(1) 定誤差.

(2) 過失誤差(或曰錯誤).

(3) 不定誤差(或曰不期誤差).

10. 定誤差(Constant error). 凡定誤差,可由精密方法或物理公式改正之.其改正法類別之如下:

理論改正 (Theoretical correction). 如測定基線(base line),測尺因溫度增減而有伸縮,此可據物理公式,由計算改正之.

測器改正 (Instrumental correction). 如測尺刻度不合標準,可求其差數改正之.如水準儀水平時,汽泡不在中點,可返復檢點改正之.

癖差改正 (Personal correction). 如持測尺者,習用大力,或不喜用力,可利用多人互測,彼此消除改正之.如視準者,或習於偏左,或習於偏右,可利用左右眼互易改正之.

上述改正,旣可推知,自可消除,故不屬本書研究之範圍.

11. 過失誤差 (Mistakes). 過失誤差,或因忽略,或未熟練所致,乃觀測者偶不留意所發生之誤差,縱細心而且熟練者,

亦難保其必無.如誤9爲6誤a爲b,測水平者誤樹枝爲標桿,記載者誤記數字,消除此種誤差,不外事先留意,事後檢點,或返復觀測多次,比較其異同.過失誤差,設偶入觀測值內,則全局皆誤,必盡力設法除去之,故亦不屬本書研究之範圍.

12. **不定誤差**(Accidental error). 定誤差及過失誤差,經多方改正,既已盡行除去,而尙存餘於觀測值中之誤差,曰不定誤差.其成因,或由測器之急劇伸縮,或由天氣不正,致折光偶起不規則之變化,或由整理器械,尙欠精密,或由觀測未能適中目的.總之,觀測者無論若何注意,終存於觀測值中,而不能免.果欲去之,非用最小二乘式不爲功.驟觀之,此種誤差,似極不規則,非數學所能研究,然由或是率推之,竟得一意外精密之法.此最小二乘式之所以作也.不定誤差分眞差及眞值減觀測值.

13. **眞值及眞差**(True value and true errors). 設T爲某量之眞值,$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$爲其觀測值,$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$爲其眞差.則

$$T-M_1=x_1,\ T-M_2=x_2,\ T-M_3=x_3, \cdots\cdots T-M_n=x_n.$$

14. **最或是值及舛差**(The most probable value and residuel errors). 最或是值減觀測值之差曰舛差.設z爲某量之最或是值,$M_1, M_2, M_3 \cdots\cdots M_n$爲其觀測值,$v_1, v_2, v_3 \cdots\cdots v_n$爲其舛差,則

$$z-M_1=v_1,\ z-M_2=v_2,\ z-M_3=v_3, \cdots\cdots z-M_n=v_n.$$

觀測次數愈增,z愈近於T.若次數無限增大,視z爲T,當無大誤.同時$v_1 v_2 v_3 \cdots\cdots v_n$將各與$x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n$一致,而無大差別.然

盡吾人之力,殊難達到$n=\infty$之事實.是則z永不能適合於T,僅能謂兩者之差能達到最小可也.

15. 或是率原理 (Principle of probabilitiy). 在數學中,或是率爲小於一之數.即一狀況(way)之或出現之數,或不出現之數,與兩數之和之比

(例一) 擲一銅元,或現表面,或現裏面,其狀況有二.然出現之狀況雖不外表裏二面,究得表面,或得裏面,殊難預知.但可決定其機會相等,各得$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$曰現表面狀況之或是率,同時亦曰現裏面狀況之或是率.就表面而言,出現之數爲1,不出現之數亦爲1,其和爲2.

出現表面之或是率$=\frac{1}{2}$.

不出現表面之或是率$=\frac{1}{2}$.

舛差兩種之差值曰眞差.今設一事出現之或是率曰成率,不出現之或是率曰敗率.

則　出現表面之成率$=\frac{1}{2}$.

出現表面之敗率$=\frac{1}{2}$.

(例二) 擲一骰子,其面有6(卽狀況有6).向上之面,僅6面之一.至於何面應向上,則毫無輕重之別.故各面向上之機會必相等,而各爲$\frac{1}{6}$.

就一點而言,出一點之或是率$=\frac{1}{6}$.

不出一點之或是率$=\frac{5}{6}$.

卽　出一點之成率$=\frac{1}{6}$.

$$出一點之敗率=\tfrac{5}{6}.$$

(例三) 設一事出現狀況之數爲a,不出現狀況之數爲b,則其和爲$a+b$.

$$\therefore \quad 事之成率=\frac{a}{a+b},$$

$$事之敗率=\frac{b}{a+b}.$$

今
$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

即
$$成率+敗率=1.$$

1者,謂事若不論成敗,其遇可必,故曰必率(Certainty). $\frac{a}{a+b}$之值,因a減小而變小.若$a=0$,則$\frac{a}{a+b}=0$者,謂事決不成,而必失敗.

$$\therefore \quad 1>或是率>0.$$

由此推知,或是率無負值.

(例四) 設
$$P=一狀況之成率,$$

$$Q=其狀況之敗率.$$

則
$$P+Q=1.$$

或
$$Q=1-P.$$

(例五) 抽籤博彩,設2000號中有一頭彩,

$$則得頭彩之成率=\frac{1}{2000},$$

$$得頭彩之敗率=1-\frac{1}{2000}=\frac{1999}{2000}.$$

今$\frac{1999}{2000}$幾等於1,即謂得頭彩之希望太小,而必至失敗也.