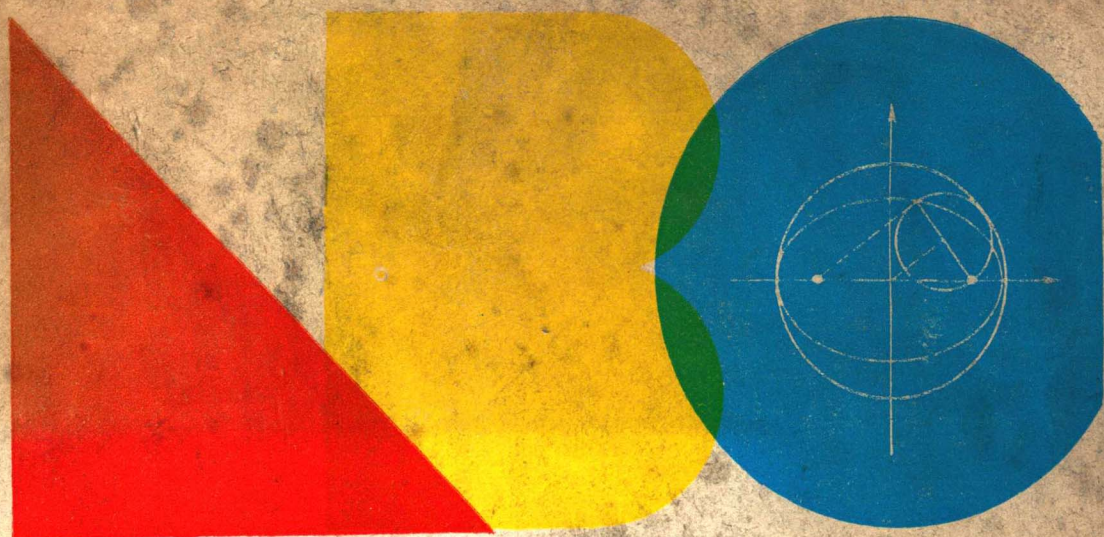




中学学科自测 ABC

立体几何

第三版

华东师大二附中编

上海科学技术出版社

5

重庆师院图书馆

206726

样

G634.6

02=3

中学学科自测 ABC

华东师大二附中 编

立 体 几 何

·第三版·



CS262023

1-2

上海科学技术出版社

中学学科自测 ABC

立 体 几 何

• 第三版 •

华东师大二附中 编

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

在沪各大书店发行所经销

常熟第七印刷厂印刷

开本 737×1092 1/16 印张 5.75 字数 132,000

1990 年 2 月第 1 版

1994 年 6 月第 3 版 1994 年 6 月第 12 次印刷

印数: 257,501—272,500

ISBN 7-5323-3503-2/G·667

定价: 3.40 元

(沪)新登字 108 号

前 言

根据现行各科教学大纲和初、高中语文、英语、数学、物理、化学等课本内容,结合我校各学科教师多年的教学实践,编写成这套《中学学科自测 ABC》自学参考书。全套书共 33 册。

本丛书第一版于 1990 年 2 月问世,四年来再版重印多次。这次第三版修订时,根据当前教学改革的实际情况,对有关内容作了必要的修改。其中,从起始年级开始,各册内容将逐年按新教材作相应的变动。丛书中对 A、B、C 三级的含义作了如下调整:

A 级——教学大纲要求学生必须掌握的基础知识。

B 级——在全面掌握基础知识的同时,着重提高知识综合应用的能力。

C 级——对学有余力的学生进一步开拓知识面,加强灵活解题的技巧和能力,配有适量的竞赛类题目。

本丛书每个年级一册,书后附有参考答案。学生可根据本校实际情况和自己的需求,选择相应的练习或试卷进行自我测试。

本书由唐清成老师编写。有疏漏之处,请读者批评指正。

华东师大二附中

1994 年 1 月

目 录

怎样学好立体几何	1
第一章 直线和平面	3
知识要点与学习水平	3
一、平面	4
课堂练习(A 级)	4
单元自测题(B 级)	5
二、空间两条直线	6
课堂练习(A 级)	6
单元自测题(B 级)	7
三、空间直线和平面	9
课堂练习一(A 级)	9
课堂练习二(A 级)	9
阶段自测试卷	11
A 级(120 分钟)	11
B 级(120 分钟)	11
C 级(120 分钟)	13
课堂练习三(A 级)	14
单元自测题(B 级)	16
四、空间两个平面	17
课堂练习一(A 级)	17
课堂练习二(A 级)	18
课堂练习三(A 级)	19
单元自测题(B 级)	19
第一学期期末自测试卷	21
A 级(120 分钟)	21
B 级(120 分钟)	23
C 级(120 分钟)	23
第二章 多面体和旋转体	26
知识要点与学习水平	26
一、多面体	27
课堂练习一(A 级)	27
课堂练习二(A 级)	28
课堂练习三(A 级)	29
单元自测题(B 级)	30
二、旋转体	31
课堂练习一(A 级)	31

课堂练习二(A级).....	32
单元自测题(B级).....	33
阶段自测试卷	35
A级(120分钟).....	35
B级(120分钟).....	36
C级(120分钟).....	37
三、多面体和旋转体的体积	40
课堂练习一(A级).....	40
课堂练习二(A级).....	40
课堂练习三(A级).....	41
课堂练习四(A级).....	42
单元自测题(B级).....	43
第三章 多面角和正多面体	45
知识要点与学习水平.....	45
课堂练习一(A级).....	45
课堂练习二(A级).....	45
本章自测题(B级).....	46
第二学期期末自测试卷	48
A级(120分钟).....	48
B级(120分钟).....	49
C级(120分钟).....	50
总结性自测试卷	53
A级(120分钟).....	53
B级(120分钟).....	54
C级(120分钟).....	55
参考答案	58

怎样学好立体几何

立体几何是平面几何的发展和继续,中学的立体几何主要有两部分内容:一是直线与平面的位置关系;二是多面体与旋转体的性质、面积及体积的计算。其中第一部分的内容是立体几何的基础,是立体几何的重点和难点,也是学好第二部分的关键,所以我们要特别重视这一部分的学习。而第二部分则是第一部分内容的具体化,也是在工农业生产及科学研究中应用较广泛的内容。

从平面观念过渡到立体观念,这就涉及到一个空间想象力的问题,这里就有一定的难度,为了解决这个难点,在学习中我们要注意下列几个方面:

一、尽量从实际出发。在学习立体几何时,不论是学习概念,还是学习空间图形间的关系,还是学习它们的性质与定理,都可以制作一些简单的模型来增强空间想象能力,加深对概念、性质及定理的理解。模型的制作可以利用铅笔作为直线,纸张或练习本等作为平面,而将纸一折二可以作为相交的两个平面,将这些东西组合起来就可以组合成各种各样的立体几何模型。用它们来帮助我们学习立体几何,可以大大地降低难度,帮助我们尽快地建立空间概念。

二、努力画好立体图。在学习平面几何时,我们已经体会到一幅正确的图形往往能帮助我们思考,从而能较快地找出解题的途径,而在立体几何的学习中则更是如此。但立体图形与平面图形不一样。立体图形只是象征性的,而不是具体的。例如,画一个矩形,在平面几何中只要按照它的长和宽的尺寸画出一个具体的矩形即可;但在立体几何中,水平方向放置的矩形却要画成一个平行四边形,而垂直于视线方向的矩形又仍然要画成一个矩形。所以,画立体图形要比画平面图形困难得多。要能画好立体图形,必须从画简单的图形起就严格按照立体几何的作图方法认真地画,从而努力去掌握画图的要领。如各种位置的直线与平面平行、垂直、斜交,平面与平面的平行、垂直、斜交等的画法。在这基础上,再临摹一些书上各种比较复杂的图形。只要坚持实践,你就一定能画出立体观比较强的立体图了。

在学习立体几何的开始阶段,我们要依靠模型来思考问题;学了一阶段以后,那就要养成离开模型,而只是依靠立体图型来思考;到最后如果你能连立体图型也不需要,而光靠脑子中的图型就能解决问题,则说明你的空间想象力已经很强了。

三、掌握立体几何与平面几何的区别和联系。学习立体几何是在我们学习了平面几何以后进行的,所以学习立体几何要用到很多平面几何的知识,但由于立体几何已将研究的范围扩大到了空间。因而平面几何中的性质与定理,就不能全部搬到立体几何中来,其中有些在空间中仍然是成立的,有些则需要证明后才能认为是成立的,而另有一些则是不成立的,我们在学习中一定要分清,不要轻易地用平面几何定理来解立体几何问题。另外,立体几何是平面几何的发展,所以立体几何中的很多性质与定理,都可以与平面几何的相应性质与定理来进行类比,以加深我们对它们的理解。

最后,为了要正确而迅速地解决立体几何的判断、证明及计算题,一方面要正确地理解立体几何的概念、公理、定理及性质,掌握定理的论证方法,另一方面还要多看一些有关的例题和适当地多做一些习题。每做一个习题,都要有所体会,要能从所做的习题中总结出解题的一般规律。对于计算题,有些计算可能比较复杂,我们要不厌其烦地把题目做完,从而培养我们计算的速度及正确性。

本书是根据《全日制高级中学数学教学大纲》和《全日制高级中学数学课本》(人民教育出版社)编写而成的。本书共分三章,第一章为立体几何,第二章为解析几何,第三章为概率论与统计。本书可作为高中数学教材,也可供从事数学工作的同志参考。本书在编写过程中,参考了有关文献,并得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。本书在编写过程中,得到了许多同志的帮助,在此表示衷心的感谢。

第一章 直线和平面

知识要点与学习水平

单 元	节 次	知 识 要 点	学 习 水 平			
			识 记	理 解	简单应用	综合应用
一、平面	1.1 平面	(1) 平面的无限延展性 (2) 平面的表示法	✓	✓		
	1.2 平面的基本性质	(3) 直线在平面内的判定公理(公理1) (4) 平面相交的公理(公理2) (5) 确定平面的公理(公理3) (6) 确定平面的三个推论 (7) 点, 直线, 平面的表示法及它们间关系的表示法	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	
	1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法	(8) 平面直线形的斜二测画法的规则	✓	✓	✓	
	1.4 两条直线的位置关系	(9) 空间两条直线的位置关系 (10) 异面直线 (11) 反证法	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	
二、空间两条直线	1.5 平行直线	(12) 平行直线的传递性(公理4) (13) 等角定理及推论	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	
	1.6 两条异面直线所成的角	(14) 两条异面直线所成角的定义 (15) 两条异面直线互相垂直 (16) 两条异面直线的公垂线及它们之间的距离	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	
	1.7 直线和平面的位置关系	(17) 直线和平面的三种位置关系	✓	✓	✓	
	1.8 直线和平面平行的判定与性质	(18) 直线和平面平行的判定定理 (19) 直线和平面平行的性质定理	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
三、空间直线和平面	1.9 直线和平面垂直的判定与性质	(20) 直线和平面垂直的定义 (21) 直线和平面垂直的判定定理 (22) 直线和平面垂直的性质定理 (23) 点到平面的距离 (24) 直线和与它平行的平面间的距离	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓ ✓ ✓

(续表)

单 元	节 次	知 识 要 点	学 习 水 平			
			识 记	理 解	简单应用	综合应用
三、空间直线和平面	1.10 斜线在平面上的射影, 直线和平面所成的角	(25) 点在平面上的射影和垂线段	✓	✓		
		(26) 平面的斜线和斜线段	✓	✓		
		(27) 斜线, 斜线段在平面上的射影	✓	✓		
		(28) 斜线长, 射影长定理	✓	✓	✓	
		(29) 直线和平面所成的角	✓	✓	✓	
	1.11 三垂线定理	(30) 三垂线定理 (31) 三垂线定理的逆定理	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
四、空间两个平面	1.12 两个平面的位置关系	(32) 空间两个平面的位置关系	✓	✓		
	1.13 两个平面平行的判定和性质	(33) 两个平面平行的判定定理	✓	✓	✓	✓
		(34) 垂直于同一条直线的两个平面平行	✓	✓	✓	✓
		(35) 两个平面平行, 其中一个平面内的直线必平行于另一个平面	✓	✓	✓	✓
		(36) 两个平面平行的性质定理	✓	✓	✓	✓
		(37) 垂直于两个平行平面中一个的直线, 也垂直于另一个平面	✓	✓	✓	✓
		(38) 两个平行平面的公垂线和距离	✓	✓	✓	
	1.14 二面角	(39) 二面角和二面角的平面角的定义	✓	✓	✓	
	1.15 两个平面垂直的判定和性质	(40) 两个平面互相垂直的定义	✓	✓	✓	
		(41) 两个平面垂直的判定定理	✓	✓	✓	✓
		(42) 两个平面垂直的性质定理	✓	✓	✓	✓
		(43) 如果两个平面互相垂直, 那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线, 在第一个平面内	✓	✓	✓	✓
		(44) 异面直线上两点的距离公式	✓	✓	✓	

一、平 面

课堂练习(A 级)

一、判断题(正确的用“✓”表示, 错误的用“×”表示)

1. 四边形一定是平面图形. ()
2. 一个面内有两条相交直线, 则这个面是平面. ()
3. 若四个点不共面, 则它们中任何三点都不在一直线上. ()
4. 三条直线两两相交, 则这三条直线一定在一个平面内. ()

5. 如果二个平面有三个公共点,则这二个平面一定重合. ()
6. 线段 AB 在平面 α 内,直线 AB 上的点不一定全在平面 α 内. ()
7. 平面 α 和平面 β 有可能只有一个公共点. ()
8. 两个平面公有 A, B 两点,则这两个平面一定公有线段 AB . ()
9. 所有的梯形都是平面图形. ()
10. 过空间一点作三条直线,这三条直线只能确定一个平面. ()
11. 空间三条直线两两平行,且不在一个平面内,则可确定三个平面. ()
12. 过一条直线的平面有无数多个. ()

二、试用符号表示下列空间关系,并画出直观图

1. 点 A 属于平面 α ,直线 b 交平面 α 于点 B ,点 A 与点 B 不重合.
2. 直线 a 和 b 相交于点 M , M 属于平面 α ,且 a 在 α 内, b 不在 α 内.
3. 直线 a 和平面 α 相交于点 M ,平面 α 与平面 β 相交于直线 b ,并且 b 不通过点 M .

三、写出下列符号所表示的关系,并画出它们所表示的直观图

1. 直线 $l \cap$ 平面 $\alpha = A$;
2. 直线 $a \cap b = A$, $b \subset$ 平面 α , $a \not\subset \alpha$;
3. 平面 $\alpha \cap \beta = a$, 直线 $b \cap \alpha = A$, $b \cap \beta = B$.

四、画出下列平面图形在水平位置时的直观图

1. 边长分别为 5 cm 、 6 cm 、 7 cm 的三角形.
2. 边长为 3 cm 的正六边形.
3. 上、下底边分别为 2 cm 、 5 cm ,腰长为 3 cm 的等腰梯形.
4. 半径为 4 cm 的圆内接正五边形.

五、求证:一个平面和不在这个平面内的一条直线最多只能有一个公共点.

六、三角形有两个顶点属于平面 α ,如果已知平面 α 还包含三角形的内心,那么这个三角形的第三个顶点是否属于平面 α ?为什么?如果包含的是三角形的外心或是垂心又会怎样?

七、已知 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 四边 AB, BC, CD, DA 上的四个点,且 $EFGH$ 是平面四边形,若 HG, EF 不平行.求证: HG, EF, AC 三直线相交于同一点.

八*、已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 a , E, F, G 分别是棱 AA_1, DD_1, D_1C_1 上的点,且 $A_1E = DF = C_1G = \frac{1}{3}a$,画出过 E, F, G 三点的正方体的截面,并说出这个截面是什么图形.

单元自测题(B级)

一、填空题(每小题3分,共30分)

1. 如果一条直线上的_____在一个平面内,那么_____都在这个平面内.
2. 如果两个平面有_____,那么它们_____通过这个_____的公共直线.
3. 经过_____的三点,_____一个平面.
4. 四条线段依次首尾相接得到一个四边形,当且仅当它的_____,它才是一个平面图形.
5. 空间一直线及不在这直线上的两点,如果连接这两点的直线与已知直线_____,则它们在同一平面内.

6. 在一个面上任取两点, 连接这两点的直线上所有的点都在_____, 则这个面一定是平面, 平面是可向四方_____扩展的.

7. 设点 A 及直线 l , 当_____时, 它们不能确定平面. 设直线 a 和 b , 当 $a \not\parallel b$ 且 $a \cap b = \emptyset$, 则它们_____同一个平面内.

8. 过直线外的一点 A , 引直线 l_1, l_2, l_3 和 l_4 分别与直线 l 相交于点 P_1, P_2, P_3 及 P_4 , 则这五条直线组成的图形_____图形.

9. 空间一个平面把空间分成_____部分, 两个平面最多把空间分成_____部分, 三个平面最多把空间分成_____部分.

10. 不在一直线上的空间四个点, 可确定_____个平面, 空间两两相交的三条直线, 可确定_____个平面.

二、(本题 8 分) 根据下列符号所表示的关系, 画出直观图.

平面 $\alpha \cap \beta = l$, 直线 $a \subset \alpha$, $a \cap l = A$, 直线 $b \subset \beta$, $b \cap l = B$, $c \parallel b$ 且 $c \cap a = O$.

三、(本题 8 分) 已知 $\triangle ABC$ 中 $AC \cap$ 平面 $\alpha = E$, $BC \cap \alpha = F$, 点 A, B 在 α 的同侧, $AB \not\subset \alpha$, 试画出直线 AB 与平面 α 的交点.

四、(本题 10 分) 已知平面 α, β 与 γ 两两相交, 且它们的交线两两互相垂直, $A, B \in \gamma$, $O \in \beta$. 试画出过 A, B, O 三点的平面与平面 α, β, γ 的交线.

五、(本题 8 分) 如果一个平面与两条平行直线中的一条直线有一个公共点, 那么这个平面和另一条直线也有一个公共点.

六、(本题 8 分) 求证: 三个平面两两相交, 得到三条直线, 如果其中有两条相交于一点, 那么第三条也经过这个点.

七、(本题 10 分) 已知直线 l 上有 A, B, C 三个点, 过这三个点分别作三条互相平行的直线 a, b, c . 求证: l, a, b, c 四直线共面.

八、(本题 10 分) 已知五条直线中的任意三条都在一个平面内, 求证: 这五条直线共面.

九* (本题 10 分) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 E, F, G 分别是棱 AB, BC, D_1C_1 的中点, 画出过 E, F, G 的正方体的截面, 并判断截面是什么图形.

二、空间两条直线

课堂练习(A 级)

一、选择题

下列各题给出了 A、B、C、D 四个供选择的答案, 其中只有一个是正确的, 把正确答案的代号填入括号内.

1. 两条异面直线是指 []

A. 分别位于两个不同平面内的两条直线; B. 在空间不相交的两条直线;

C. 不同在任何一个平面内的两条直线;

D. 某一平面内的一条直线和与这个平面相交的一条直线.

2. 正方体的一个面上的一条对角线与正方体的棱可以组成的异面直线有 []

A. 2 对; B. 4 对; C. 6 对; D. 8 对.

3. 三条不相交直线 a, b, c , 其中 a, b 为异面直线, 则这三条直线所能确定的平面有 []

A. 0 个或 1 个; B. 1 个或 2 个; C. 0 个或 2 个; D. 3 个.

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 BC_1 与 AC 所具有的关系为 []

A. 相交且垂直; B. 相交但不垂直; C. 异面且垂直; D. 异面但不垂直.

5. 设 a, c 是异面直线, b, c 也是异面直线, 则 a 与 b 的位置关系一定是 []

A. 异面直线; B. 平行直线; C. 相交或异面; D. 平行或相交或异面.

6. 设 a, b, c 是空间三条直线, $a \parallel b$, c 与 a 相交, 则 c 与 b 的位置关系一定是 []

A. 一定相交; B. 一定异面; C. 相交或异面; D. 平行或相交或异面.

7. 直线 a, b, c 是两两互相垂直的异面直线, 直线 d 是 b 和 c 的公垂线, 那么 d 和 a 的位置关系是 []

A. 一定相交;

B. 互不垂直的异面直线;

C. 一定平行;

D. 互相垂直的异面直线.

8. 设 AB, BC, CD 是不在同一平面内的三条线段, P, Q, R 分别是 AB, BC, CD 的中点, $PQ=2, QR=\sqrt{5}, PR=3$, 则 AC 与 BD 所成的角是 []

A. 30° ; B. 45° ; C. 60° ; D. 90° .

二、填空题

在边长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中:

1. 直线 AB 与 CC_1 是____直线, 它们所成的角等于____, 它们之间的距离等于____.

2. 直线 AB_1 与 DC_1 是____直线, 它们所成的角等于____, 它们之间的距离等于____.

3. 直线 AB_1 与 AC 是____直线, 它们所成的角等于____, 它们之间的距离等于____.

4. 直线 AB_1 与 BC 是____直线, 它们所成的角等于____, 它们之间的距离等于____.

5. 直线 AB_1 与 DB 是____直线, 它们所成的角等于____.

三、画出两两互为异面直线的三条直线.

四、已知平面 α, β, γ , 有 $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \gamma \cap \alpha = c$, 且有 $a \parallel b$. 用反证法证明: $a \parallel c, b \parallel c$.

五、已知 a, b 是异面直线, A, B 是直线 a 上的两个点, C, D 是直线 b 上的二个点. 求证: AC, BD 也是异面直线.

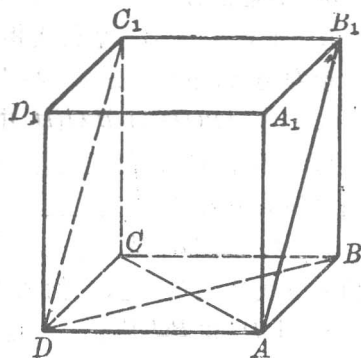
六、已知在空间四边形 $ABCD$ 中, 对角线 $AC=BD$, 且 E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点. 求证: EG 与 FH 互相垂直平分.

七、已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=1, AD=2, AB=3$, 求异面直线 AB_1 和 BC_1 所成角的余弦.

八、已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G, H 分别是 B_1B, B_1C_1, D_1D, DA 的中点, 求证: $EFGH$ 是平行四边形.

单元自测题(B 级)

一、选择题(每小题 3 分, 共 15 分)



下列各题给出了 A、B、C、D 四个供选择的答案, 其中只有一个是正确的, 把正确答案的代号填入括号内.

1. a, b 是异面直线, A, B 与 C, D 分别是 a, b 上的不重合的 4 个点, 则 AC 与 BD 的位置关系是 []

A. 相交; B. 平行; C. 异面; D. 异面或相交.

2. 异面直线的公垂线是指 []

A. 和两条异面直线都垂直的线段; B. 和两条异面直线都垂直相交的线段;
C. 和两条异面直线都垂直的直线; D. 和两条异面直线都垂直相交的直线.

3. 正方体的十二条棱中, 组成异面直线的对数有 []

A. 16 对; B. 24 对; C. 32 对; D. 48 对.

4. 一条直线和两条异面直线中的一条平行, 则它与另一条直线的位置关系是 []

A. 平行; B. 相交; C. 异面; D. 相交或异面.

5. 不重合的两条直线与直线 l 都相交成等角, 则这两条直线的位置关系是 []

A. 平行; B. 平行或相交; C. 平行、相交或异面; D. 异面.

二、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1=1, AD=2, AB=3$.

1. AD 和 BB_1 是_____直线, 它们所成的角等于_____, 它们的公垂线是_____它们之间的距离等于_____.

2. DC 和 AB_1 是_____直线, 它们所成的角等于_____ (用反三角函数表示), 它们的公垂线是_____, 它们之间的距离等于_____.

3. A_1D_1 和 BC 是_____直线, 它们所成的角等于_____, 它们之间的距离等于_____.

4. A_1B 和 DC_1 是_____直线, 它们所成的角等于_____. (用反三角函数表示)

5. BD 和 B_1C 是_____直线, 它们所成的角等于_____. (用反三角函数表示)

三、(本题 8 分) 已知点 A, B, C 是直线 l 上的三点, E, F 是直线 l 外的二点, 且有 $AE=AF, BE=BF$. 求证 $CE=CF$.

四、(本题 9 分) 已知空间三条线段 AB, BC, CD 的中点分别为 E, F, G , 且 $EF=3, FG=\sqrt{7}, EG=4$, 求 AC, BD 所成的角.

五、(本题 9 分) 已知在空间四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 且 E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点, 求证: $EG=FH$.

六、(本题 9 分) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 a , 且 C_1D_1, A_1D_1 的中点为 E, F . 求证: $EFAC$ 为等腰梯形, 并求它的面积.

七、(本题 10 分) 设空间六个点 A, B, C, D, E, F 不共面, 并且 $AB \perp CD, AB \perp EF$, 且 AB, CD, EF 方向相同. 求证:

(1) C, D, E, F 四点共面; (2) $CE \perp DF$; (3) $\angle ACE = \angle BDF$.

八、(本题 10 分) 已知平面 $\alpha \cap \beta = l$, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta$, 且 $a \cap l = A, b \cap l = B, A, B$ 不重合. 求证: a, b 是异面直线.

九、(本题 10 分) 在三棱柱中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是边长为 1 的正三角形, $ADFC, ADEB, BEFC$ 都为矩形, 且棱长 $AD = \sqrt{2}$, 求异面直线 AF 与 CE 所成的角.

三、空间直线和平面

课堂练习一(A 级)

一、判断题(正确的用“√”表示,错误的用“×”表示)

1. 平行于同一平面的两直线平行. ()
2. 平行于同一直线的两直线平行. ()
3. 垂直于同一直线的两直线必平行或异面. ()
4. 两平行直线中的一条与一个平面平行,则另一条也与这个平面平行. ()
5. 两平行直线中的一条与一条直线垂直,则另一条也与这条直线垂直. ()
6. 一条直线平行于一个平面,则这条直线平行于这个平面内的所有直线. ()
7. 平面外的一条直线平行于这个平面内的两条直线,则这条直线平行于这个平面. ()
8. 一条直线平行于一个平面,则这条直线与平面内的无数条直线成异面直线. ()
9. 一直线平行于一个平面,则这条直线只与平面内的一条直线平行. ()
10. 一直线平行于一个平面,则这条直线与平面内的所有直线都不垂直. ()

二、证明:若一个平面外的两条平行直线中的一条平行于这个平面,则另一条也平行于这个平面.

三、已知 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的四条边 AB, BC, CD, DA 内的点,且 $EFGH$ 是平行四边形. 求证: $BD \parallel$ 平面 $EFGH, AC \parallel$ 平面 $EFGH$.

四、已知矩形 $ABCD$ 所在平面外有一点 S, E, F 分别是 SB 及 SC 上的点,且 $\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SC}$. 求证: 直线 $EF \parallel$ 平面 SAD .

五、已知 AB 是平面 α 外的一条直线,过 AB 作二个平面 β, γ 分别与平面 α 交于直线 a, b , 如果 $a \parallel b$. 求证: $AB \parallel \alpha$.

六、已知 A, B, C, D 为不共面的四个点,如果 E, F 分别是平面 ABC 及平面 ADC 内的二个点,且 $EF \parallel$ 平面 $ABD, EF \parallel$ 平面 BCD . 求证: B, D, E, F 四个点共面.

七、用直接法证明:三个两两相交的平面有三条交线,如果其中两条交线平行,那么第三条交线必和这两条交线都平行.

八、证明:过已知平面外一已知点,可以作无数条直线和已知平面平行.

九、在立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 AC, BD 与 A_1C_1, B_1D_1 的交点分别是 O 与 O_1 . 求证 $O_1A \parallel$ 平面 DBC_1 .

十、在立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是面对角线 BC_1 及 B_1D_1 内的点,且有 $B_1N = BM$. 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1CDD_1 .

课堂练习二(A 级)

一、判断题(正确的用“√”表示,错误的用“×”表示)

1. 垂直于同一直线的两条直线平行. ()
2. 垂直于同一平面的两条直线平行. ()

3. 垂直于同一直线的一条直线与一个平面必平行 ()
4. 一直线与一平面平行, 则垂直于这条直线的直线也与这个平面垂直 ()
5. 一条直线上有两个点到一个平面的距离相等, 则这条直线与这个平面平行. ()
6. 一条直线与一个平面内的无数条直线垂直, 则这条直线垂直于这个平面. ()
7. 过直线外一点和这条直线垂直的直线有且只有一条. ()
8. 过直线外一点和这条直线垂直的平面有且只有一个. ()

二、已知在空间三个点 A, B, C 中, $C \in$ 直线 l , 且 $AC \perp l$, $BC \perp l$. 求证: $AB \perp l$.

三、已知空间中等腰三角形 ABC 与 DBC 有共同的底边 BC , 求证: $AD \perp BC$.

四、有一个四面体形的木块 $ABCD$, 在 $\triangle ABC$ 的面内有一点 P , 要经过 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内画一条直线和 AD 垂直, 应怎么画法? (只能在四面体的面上画线)

五、 P 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面外的一点, O 为 AC 与 BD 的交点, 如果 $PA = PC$, $PB = PD$. 求证: $PO \perp AB$, $PO \perp BC$.

六、长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1 = 3$, $AD = 4$, $AB = 5$, $AH \perp BD$, H 为垂足.

(1) 求证: $A_1H \perp BD$; (2) 求点 D_1 到 CB_1 的距离.

七*、边长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是 AC 与 BD 的交点, 求异面直线 D_1O 与 A_1C_1 间的距离.

八、已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点在平面 α 的同侧, E 是 AB 的中点, 点 C, E, A 到平面 α 的距离分别是: 5, 8, 9.

(1) 求 B 到平面 α 的距离; (2) $\triangle ABC$ 的重心 G 到平面 α 的距离;

(3) 如果 F 是 AC 的中点, 求证: $BF \parallel$ 平面 α .

九*、证明: 过已知直线上的一点一定可以作一个, 而且只能作一个平面与已作直线垂直.

十*、利用上题的结论证明: 过已知平面内的一点一定可以作一条, 而且只能作一条直线与已知平面垂直.

阶段自测试卷

A 级(120 分钟)

一、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. 如果两个角的两边分别平行,则这两个角_____.
2. 两条异面直线所成的角 α 的范围是_____.
3. _____,叫做两条异面直线的距离.
4. _____,叫做这点到这个平面的距离.
5. 空间四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别为 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上的中点,若 $AC=BD$,则四边形 $EFGH$ 是_____形.
6. O 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, P 为平面 $ABCD$ 外的一点,且有 $PA=PC$, $PB=PD$,则 PO 与平面 $ABCD$ 的关系是_____.
7. 直线 $a \parallel$ 平面 α ,直线 $b \subset \alpha$,则 a , b 的关系是_____.
8. 直线 $a \parallel b$, a 与 c 是异面直线,则 b 、 c 之间的关系是_____.
9. 长方形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $AC=6$,线段 $AP \perp$ 平面 $ABCD$,且 $AP=4$,则 P 到 BC 的距离等于_____, P 到 CD 的距离等于_____.
10. 平行四边形 $ABCD$ 中,顶点 A 、 B 在平面 α 的一侧, C 、 D 在平面 α 的另一侧,如 A 、 B 、 C 三点到平面 α 的距离分别为 4、6、10,则 D 点到平面 α 的距离等于_____.

二、(本题 10 分)求证:不过同一点而两两相交的四条直线在同一平面内.

三、(本题 10 分)相交于一点的四条直线,过其中每两条直线作一个平面,共可作多少个平面(分情况讨论),并画图.

四、(本题 10 分)已知在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, CD 在平面 α 内, $AB:CD=4:6$, AB 到 α 的距离为 10 cm,求梯形对角线的交点 O 到 α 的距离.

五、(本题 10 分)已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为下底面 $ABCD$ 对角线的交点, $B_1H \perp D_1O$, H 为垂足. 求证: $B_1H \perp AD_1$.

六、(本题 10 分)已知直线 $a \perp b$, $b \perp$ 平面 α , a 不在平面 α 内. 求证: $a \parallel \alpha$.

七、(本题 10 分)已知平面 $\alpha \cap \beta = l$,且 $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $C, D \in l$, $AC \perp l$, $BD \perp l$, $AB=5$, $CD=3$,求 AB 与 l 所成角的余弦.

八、(本题 10 分)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O_1 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 对角线的交点, Q 为侧面 AA_1B_1B 对角线的交点. 求证: $O_1Q \perp$ 平面 A_1B_1CD .

B 级(120 分钟)

一、选择题(每小题 3 分,共 30 分)

下列各题给出了 A、B、C、D 四个供选择的答案,其中只有一个是正确的,把正确答案的代号填入括号内.