高等学校教材

概率论与数理统计讲义

天津大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计讲义

Gailülun yu Shuli Tongji Jiangyi

天津大学数学系　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本讲义由天津大学数学系概率统计课程组全体教师共同编写而成，是长期教学实践的总结。讲义着眼于介绍概率论和数理统计中的基本概念、原理和方法，强调理论描述与直观含义相结合，理论计算方法和计算机计算方法相结合，配以丰富新颖的例题，使得学生更容易对理论做到融会贯通。同时，力求用尽可能少的数学知识阐述概率统计理论，注重概率统计方法及其在各个领域中的应用。

本讲义共10章，主要包括随机事件与概率、随机变量及分布、多维随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析以及 MATLAB 在概率统计中的应用简介。各章均配有大量习题，并在书后附有部分习题参考答案。

本讲义具有广泛的适用性，既可作为高等学校工科、理科（非数学）各专业的本科生教材，又可作为实际工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计讲义/天津大学数学系编. -- 北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-034849-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①天… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 179081 号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　封面设计 赵 阳　版式设计 杜微言
插图绘制 郝 林　责任校对 金 辉　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 化学工业出版社印刷厂
开 本 787mm × 960mm 1/16
印 张 22.75
字 数 410 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2012 年 8 月第 1 版
印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷
定 价 26.40 元

物 料 号 34849-00

前　言

随着科学技术的发展，人们对世界的认识能力越来越高。然而世界对于人类而言，仍然是神秘的，其所包含的大量未知因素依旧影响着我们对世界的认识和改造活动。概率论和数理统计是用定量的方法研究随机现象内在规律性的重要工具。当前，概率统计方法在金融、保险、生物、医学、经济、管理和工程技术等领域得到了广泛应用。可以想象，随着计算机技术的进一步发展，人们观测数据、存储数据和分析数据的能力将得到更大提升，这无疑又为概率论和数理统计的应用提供了更广阔的前景。有鉴于此，掌握一定的概率统计知识已成为理工科学生进行实际工作和学习深造的必备。

在长期的教学实践中我们体会到，要让学生能够用概率统计的方法解决遇到的实际问题，单纯讲授数学理论是不够的，为此，我们在讲义编写中，力图体现如下几个原则：

1. 理论描述与直观含义相结合

力求用精炼、准确的数学语言描述基本概念和理论，并注重概念和理论的直观解释，使学生能够更形象化地理解数学描述的含义。

2. 例题丰富新颖

搜集了来自多个领域的比较新颖的例题，这些题目既具有启发性，又具有广泛的应用性。

3. 理论应用与计算机技术相结合

结合当前各学科应用最为广泛的 MATLAB 软件，将统计方法和 MATLAB 统计工具箱相结合，给出了概率统计计算方法的程序编写模式。

本讲义分为概率论、数理统计、MATLAB 与统计计算三部分。其中，概率论部分包括随机事件与概率、随机变量及分布、多维随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。统计部分包括数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析。最后一部分是 MATLAB 在概率统计中的应用。各章均配有大量习题，并在书后附有部分习题参考答案。

参加本讲义编写的成员有：胡玉梅、王勇、马丽霞、陈云兰、关静、杨玲

玲、赵志华、胡飞。最后由梁冯珍和孙晓晨统稿。

不足之处，恳请同行和读者批评指正。

天津大学数学系概率统计课程组

2012.4

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

现实世界中存在着多种多样的现象. 其中，有一类现象在一定条件下必然发生，如抛出的石子必然会下落、同性电荷必然相互排斥等. 我们称这类现象为确定性现象. 还有一类现象，在一定条件下，某种结果可能出现也可能不出现. 如在相同条件下抛同一枚质地均匀的硬币，其结果可能正面朝上，也可能反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么，但重复多次得到正面朝上的次数大致有一半；用同一门炮向同一目标射击，每次弹着点不尽相同，在每一次射击之前无法预测弹着点的确切位置，但重复多次其弹着点按照一定规律分布等. 我们称这类现象为随机现象. 它的主要特征是：在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，但并不能事先预知会确切出现哪个结果，然而所有可能出现的结果是确定的，且每个结果的出现又具有一定的规律性.

概率论（probability theory）与数理统计（mathematical statistics）是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科. 概率论主要研究常见随机模型的性质；数理统计则以概率论为基础，利用对随机现象的观测所取得的数据资料建立随机模型，然后研究其统计规律性.

1.1　随机事件及运算

1.1.1　随机试验与样本空间

为了研究随机现象内部存在的数量规律性，必须对随机现象进行观察或试验，今后统称为试验.

如果一个试验满足下面 3 个条件：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，并且所有可能结果是预先知道的；

(3) 在进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称该试验为**随机试验**（random experiment），在不引起混淆的情况下，我们也简称随机试验为试验，记为 E.

例 1.1　E_1：抛掷一枚质地均匀的硬币，观察是正面朝上还是反面朝上；

E_2：抛掷一颗质地均匀的正六面体的骰子，观察出现的点数；

E_3：射手对某目标进行射击，直到命中目标为止，记录射击的次数；

E_4：在相同生产条件下生产的一批电子元件，任意抽取一件测试其寿命.

在研究随机试验时，首先必须弄清楚这个试验所有可能出现的结果. 我们称试验的每一个可能的结果为**样本点**（sample point），通常用字母 ω 表示. 全体样本点构成的集合称为**样本空间**（sample space），用 Ω 表示.

例 1.2 试写出例 1.1 中随机试验的样本空间.

解 （1）若以 ω_1 表示正面朝上，ω_2 表示反面朝上，则随机试验 E_1 的样本空间为 $\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2\}$.

（2）若以 ω_i 表示抛掷的骰子出现 i 点，$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$，则随机试验 E_2 的样本空间为 $\Omega_2=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

（3）若以 i 表示直到命中目标时射击的次数，则随机试验 E_3 的样本空间为 $\Omega_3=\{1, 2, 3, \cdots\}$.

（4）若以 t 表示电子元件的使用时间，则随机试验 E_4 的样本空间为 $\Omega_4=\{t : t\geqslant 0\}$.

需要注意的是，样本空间所包含的样本点数可以是有限的，也可以是无限的，譬如上述样本空间 Ω_1 和 Ω_2 中的样本点个数均有限，而 Ω_3 和 Ω_4 中的样本点个数均无限. 但 Ω_3 中的样本点能够一一列举出来，称其样本点个数为可列个. Ω_4 中样本点充满了一个区间，不能一一列举出来，称其样本点个数为不可列个.

1.1.2 随机事件与随机变量

在随机试验中，称可能发生也可能不发生的事件为**随机事件**（random event），简称事件，常用大写字母 A，B，C，…表示. 如在掷骰子试验中，$A=\{$出现奇数点$\}$ 是一个随机事件，即 $A=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. 可见任一事件 A 是样本空间的子集，当其中的某个样本点出现了，就说事件 A 发生了，或者说事件 A 发生当且仅当 A 中的某个样本点出现. 由样本空间 Ω 中的单个样本点组成的事件称为**基本事件**（elementary event）.

称随机试验中一定发生的事件为**必然事件**（certain event），用 Ω 表示. 显然它包含了样本空间中所有的样本点. 称随机试验中一定不发生的事件为**不可能事件**（impossible event），用 $\varnothing$ 表示. 事实上，$\varnothing$ 中不包含任何样本点. 为研究问题方便，今后将必然事件和不可能事件也作为随机事件来处理.

例 1.3 在例 1.1 中，随机试验 E_2 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

事件 $A=\{$出现 1 点$\}$，它由 Ω 的单个样本点“ω_1”组成，是一个基本事件.

事件 $B=\{$出现奇数点$\}$，它由 Ω 的三个样本点“ω_1，ω_3，ω_5”组成.

事件 $C=\{$出现的点数小于 7$\}$，它由 Ω 的全部样本点“ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5，ω_6”组成，是必然事件 Ω.

事件 $D=\{$出现的点数大于 7$\}$，它不包含 Ω 的任何样本点，是不可能事件$\varnothing$.

在随机试验中，我们常常将试验结果用一个变量表示，这种变量随着试验结果的不同而发生变化. 在试验之前，由于不能预测将要出现哪种结果，因而无法预测该变量的取值；但在试验之后结果已经确定，该变量所取的数值也就确定. 直观上讲，我们将这种用来表示随机试验结果的变量称为随机变量，常用大写字母 X，Y，Z，…表示.

例 1.4 在例 1.3 中，若以 X 表示掷骰子出现的点数，则 X 是一个随机变量. 事件“出现 3 点”可用集合 $\{\omega_3\}$ 表示，也可用 $\{X=3\}$ 表示. 事件“出现的点数不小于 3 点”可用集合 $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 表示，也可用 $\{X\geqslant 3\}$ 表示.

例 1.5 电话总机在一段时间内接到的呼唤次数 Y 是一个随机变量. $\{Y=7\}$ 表示“恰好接到 7 次呼唤”，$\{6<Y\leqslant 10\}$ 表示“接到的呼唤次数超过 6 次而不超过 10 次”.

例 1.6 电视机的寿命 T 是一个随机变量，则事件“寿命超过 4 000 小时”可用 $\{T>4\,000\}$ 表示，而 $\{T\leqslant 4\,000\}$ 表示事件“寿命不超过 4 000 小时”.

例 1.7 抛掷一枚硬币，我们可以定义随机变量 Z，以 $\{Z=1\}$ 表示出现正面，$\{Z=0\}$ 表示出现反面.

更一般地，对于任意事件，我们都可以用一个随机变量来描述它. 例如，对任意事件 A，令

$$I_A=\begin{cases}0, & \text{若事件 } A \text{ 不发生},\\ 1, & \text{若事件 } A \text{ 发生},\end{cases}$$

则 I_A 是与事件 A 相对应的随机变量，称为事件 A 的**指示变量**（indicator variable）.

利用随机变量，我们可以更方便地研究随机现象. 关于随机变量的研究，我们将在第二章展开.

1.1.3 随机事件的关系与运算

事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系与运算同集合之间的关系与

运算完全一致. 下面给出事件间关系的定义.

1. 包含

若事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则称事件 B 包含（contain）事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$（如图 1.1）.

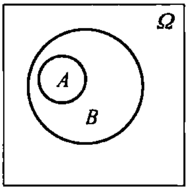

图 1.1 事件的包含

2. 相等

若事件 A 包含事件 B 且事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等（equivalent），记为 $A=B$.

3. 并

事件 A 与事件 B 的**并**（union）**事件**，记为 $A\cup B$，表示事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，它是由 A 与 B 中所有样本点组成的集合（如图 1.2）.

4. 交

事件 A 与事件 B 的**交**（intersection）**事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB，表示事件 A 与事件 B 同时发生的事件，它是由 A 与 B 的公共样本点组成的集合. 事件 A 与事件 B 的交事件，也称为事件 A 与事件 B 的积（如图 1.3）.

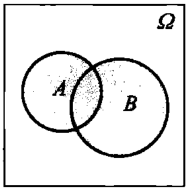

图 1.2 事件的并

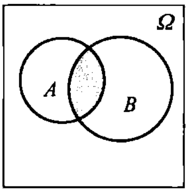

图 1.3 事件的交

事件的并与积都可以推广到有限个事件的情形. 如

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$$

表示事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生；

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n$$

表示事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生.

事件的并与积也可以推广到可列多个事件的情形. 如

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

表示事件 A_1，A_2，…，A_n，…至少有一个发生；

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$$

表示事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生.

5. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即所有包含在 A 中的样本点与包含在 B 中的样本点全不相同，则称事件 A 与事件 B **互不相容**（exclusive），也称事件 A 与事件 B 互斥（如图 1.4）. 在这种情况下，$AB=\varnothing$. 此时，事件 A 与事件 B 的并也称为事件 A 与 B 的和，记为 $A+B$.

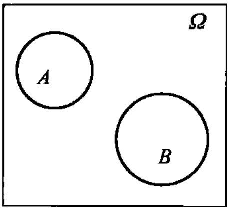

图 1.4 事件的互不相容

6. 对立

事件 A 的**对立**（complementary）事件，记为$\overline{A}$，表示事件 A 不发生的事件，它是由样本空间 Ω 中所有不包含在 A 中的样本点组成的集合（如图 1.5）. 对立事件有时也称为逆事件.

7. 差

事件 A 与事件 B 的差（difference），记为 $A-B$，表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，它是由所有包含在 A 中但不包含在 B 中的样本点组成的集合（如图 1.6）.

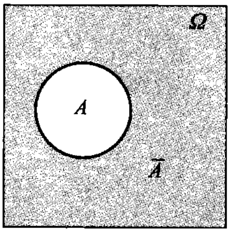

图 1.5 事件的对立

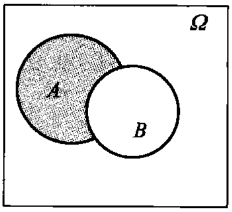

图 1.6 事件的差

事件运算的性质：

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

（3）分配律 $(A\cup B)\cap C=(AC)\cup(BC)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律也称德摩根（De Morgan）定律. 对 n 个事件以至可列个事件，对偶律也成立.

例 1.8 某工人加工了四个零件，用 A_i 表示事件“第 i 个零件是合格品”（$i=1$，2，3，4），试用事件 A_i，$i=1$，2，3，4 表示下列事件：

（1）$B_1=\{$四个零件全是合格品$\}$；

(2) $B_2=\{$四个零件中恰有一个是次品$\}$;

(3) $B_3=\{$四个零件中至少有一个是合格品$\}$;

(4) $B_4=\{$四个零件不全是合格品$\}$;

(5) $B_5=\{$四个零件全是次品$\}$.

解 (1) $B_1=A_1A_2A_3A_4$;

(2) $B_2=\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4$;

(3) $B_3=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$;

(4) $B_4=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3\cup\overline{A}_4$ 或 $B_4=\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

(5) $B_5=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$.

1.2 概率及性质

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如袋子中有 10 只乒乓球，其中有 8 只黄的，2 只白的，现从中任取一球. 显然取出黄球的可能性要比取出白球的可能性大. 为了定量地分析和研究这种可能性的大小，首先引入频率的概念，它初步描述了事件发生的频繁程度.

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中发生的**频率** (frequency).

易见频率具有如下性质:

(1) 对任意事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$, $f_n(\varnothing)=0$;

(3) 若事件 A 与 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地，对任意有限多个两两互不相容的事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $A_iA_j=\varnothing$ ($i\neq j$; i, $j=1$, 2, $\cdots$, n)，则有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数和试验次数之比，其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生就越频繁，一定程度上，这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大. 反之亦然. 因而，一种直观