农林院校大学数学系列教材

线性代数

学习指导

◆ 主编　李全忠　李仁所

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

农林院校大学数学系列教材

线性代数学习指导

Xianxing Daishu Xuexi Zhidao

主　编　李全忠　李仁所
副主编　陈丽珍　张　凤　张　莉
　　　　梁　颖　时彬彬

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是李仁所等主编《线性代数》的配套辅导书，根据实际教学需求编写而成。每章内容包括：基本内容、基本要求、疑难解析、例题解析、习题解答(含习题与补充题解答)五个部分。本书可供使用主教材的师生参考，也可作为高等农林院校农林类专业学生学习和考研参考之用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导 / 李全忠，李仁所主编. -- 北京 : 高等教育出版社，2013.1
ISBN 978-7-04-036142-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李…②李… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 308359 号

策划编辑 于丽娜　　责任编辑 于丽娜　　封面设计 李卫青　　版式设计 马敬茹
责任校对 刁丽丽　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×960 mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.75	版　　次	2013 年 1 月第 1 版
字　　数	210 千字	印　　次	2013 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	18.80 元

物 料 号　36142-00

前　言

为帮助学生深入理解、全面掌握和融会贯通线性代数的内容，培养学生的数学能力，提高考试、考研应试水平，以高等教育出版社出版的《线性代数》为蓝本，编者精心编写了这本《线性代数学习指导》。本书是山东省教育科学“十二五”规划课题——农林高校大学生高等数学能力培养途径探究(课题编号:2011GG029)的项目成果。

本书按照线性代数内容体系共分4章，每章包括基本内容、基本要求、疑难解析、例题解析、习题解答(含习题与补充题解答)五个部分。其中，疑难解析和例题解析部分，对学生学习过程中容易面临的困惑进行了归纳、分类和详细的剖析，读后有拨云见日之感，有利于开阔学生的视野与思路；习题与补充题解答部分，对读者有很好的指导、启发和示范作用，使他们能从中感受到思维逻辑与解题艺术交织的魅力。相信这些对于培养学生的创新能力和思维品质会起到一定的帮助作用。

由于编者水平及时间所限，书中缺点与错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2012年8月

目　录

第1章　行　列　式

1.1　基本内容

行列式的概念和基本性质，行列式按行(列)展开定理，克拉默法则．

1.2　基本要求

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.
3. 会用克拉默法则解低阶线性方程组.

1.3　疑难解析

1. 逆序数的计算

直接利用定义进行求解比较繁琐而且容易出错，具体计算时，可运用"向前看"法，即在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，若比 $j_k(k=1,2,\cdots,n)$ 大且排在 j_k 前面的数有 t_k 个，则这个排列的逆序数为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

2. 行列式的概念

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，它由 $n!$ 项组成，其中带正号与带负号的项各占一半，这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

3. 上(下)三角形行列式与副对角线行列式的计算

由行列式的定义可得，上(下)三角形行列式等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

关于副对角线行列式，其计算公式为

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. 范德蒙德(Vandermonde)行列式的特点与计算

满足以下2个条件的 n 阶行列式称为范德蒙德行列式:

(1) 第一行元素全部为1;

(2) 每一列元素必为等比数列，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j),$$

其中

$$\begin{aligned} \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \\ (a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2) \\ \cdots \\ (a_n-a_{n-1}). \end{aligned}$$

5. 求解行列式的基本方法

(1) 对角线法. 仅对2阶、3阶行列式适合.

(2) 定义法. 对一般行列式可利用定义进行求解，利用该方法对行列式进行计算通常会比较麻烦.

(3) 公式法. 对一些行列式可利用性质将其转化为上(下)三角形行列式、范德蒙德行列式等特殊行列式，利用公式进行计算.

(4) 降阶法. 利用按行(列)展开定理，把高阶行列式转化为低阶行列式进行计算.

(5) 递推法. 对规律性强且元素多的行列式，可用按行(列)展开公式建立递推关系式求解行列式的值.

1.4 例题解析

例 1 已知 $a_{15}a_{23}a_{31}a_{ij}a_{56}a_{64}$ 是 6 阶行列式中的一项，试确定 i, j 的值及此项所带符号.

解 根据行列式定义，它是不同行不同列元素乘积的代数和. 因此，行指标 $1,2,3,i,5,6$ 应取自 1 到 6 的一个排列，故 $i=4$；同理可知 $j=2$.

此项所带的符号为 $(-1)^{\tau(531264)}=(-1)^{0+1+2+2+0+2}=-1$.

注 要正确把握排列定义中有序、无重复的特点，逆序数的具体算法及行列式定义的内涵.

例 2 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$ 之值.

解 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}$，故

$$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$$

因 $|\boldsymbol{A}|$ 中，a^4 的系数是 $+1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

注 利用公式计算行列式是常用技巧之一，另外还要注意行列式结果的唯一性的特点.

例 3 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$ 的值.

解 法一 把行列式的第 $n-1$ 行的 (-1) 倍加到第 n 行，第 $n-2$ 行的 (-1) 倍加到第 $n-1$ 行，…，第 1 行的 (-1) 倍加到第 2 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix},$$

而后按照第 2 行展开得

$$D_n=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}$$

$$=-2(n-2)!.$$

法二 把行列式的第 2 行的 (-1) 倍分别加到第 $3,\cdots,n$ 行，把第 1 行的 (-2) 倍加到第 2 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\0&-2&-2&\cdots&-2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}$$

$$=-2(n-2)!.$$

注 计算行列式值的最基本方法是利用按行(列)展开定理，另外常用的技巧有在行列式恒等变形时，逐行(列)相加，把某行的倍数加至其余各行，使其出现较多零，或使其成为三角形行列式等.

例 4 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$ 的值.

解 把各列加至第 1 列后提取公因子 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，再将第 1 行的 (-1) 倍分别加至其他各行，可得到上三角形行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\
b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b
\end{vmatrix}
$$

$$
=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}
1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\
1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b
\end{vmatrix}
$$

$$
=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}
1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
0 & b & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & b & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b
\end{vmatrix}
$$

$$
=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).
$$

注 行列式恒等变形时，把每行(列)均加至同一行(列)是重要技巧之一.

例 5 证明：
$$
D_n=\begin{vmatrix}
2a & 1 & & & & \\
a^2 & 2a & 1 & & & \\
 & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a^2 & 2a & 1 \\
 & & & & a^2 & 2a
\end{vmatrix}=(n+1)a^n.
$$

证 **法一** 递推法. 按第一列展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2},$$

即

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2}),$$

进而

$$D_n - aD_{n-1} = a^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n,$$

即 $D_n = a^n + aD_{n-1}$，而 $D_{n-1} = a^{n-1} + aD_{n-2}$，所以有

$$D_n = 2a^n + a^2 D_{n-2},$$

$$\cdots$$

$$D_n = (n-2)a^n + a^{n-2}D_2 = (n-2)a^n + 3a^n = (n+1)a^n.$$

法二 归纳法.

当 $n=1$ 时，$D_1 = 2a$，命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确；当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$，命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确.

设 $n<k$ 时，命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确，对 D_k 按第一列展开得

$$D_k = 2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} + a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$= 2aD_{k-1} - a^2 D_{k-2},$$

按归纳假设，$D_{k-1} = ka^{k-1}$，$D_{k-2} = (k-1)a^{k-2}$，从而，

$$D_k = 2a(ka^{k-1}) - a^2(k-1)a^{k-2} = (k+1)a^k,$$

所以对于任意的 n，命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确.

注 对一些貌似比较复杂，但极其有规律的行列式，要考虑用递推、归纳的方法，这样往往能事半功倍.

例 6 已知 $\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix} = 0$. 求 λ 的值.

解 $$\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 0 & 18-\lambda & \lambda-18 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-17 & -5 & -7 \\ 2 & \lambda-10 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-18 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-18)\begin{vmatrix} \lambda-17 & -5 \\ 2 & \lambda-10 \end{vmatrix} = (\lambda-18)(\lambda-12)(\lambda-15) = 0,$$

所以 $\lambda = 12, 15, 18$.

注 对这一类行列式，通常是将某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，以期出现 λ 的一次因式，提出 λ 的这个一次因式(也就求出了 λ 的一个根)，再处理剩下的 2 阶行列式，可求出 λ 的另外两个根. 尽量避免直接分解关于 λ 的三次多项式的做法.

例 7 证明：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^3&x_2^3&x_3^3\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)$.

证 构造范德蒙德行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&y\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&y^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&y^3\end{vmatrix},$$

一方面，对行列式 D_1 按第 4 列展开，有

$$D_1=1\cdot A_{14}+y\cdot A_{24}+y^2\cdot A_{34}+y^3\cdot A_{44},$$

y^2 的系数是 A_{34}，而

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^3&x_2^3&x_3^3\end{vmatrix}=-D,$$

另一方面，对范德蒙德行列式 D_1，有

$$D_1=(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j),$$

在这里，易见 y^2 的系数即为 D，即

$$D=(x_1+x_2+x_3)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j).$$

注 对这类问题，补充使其成为范德蒙德行列式是解题的关键，而后利用计算范德蒙德行列式的公式使得问题得以求解.

例 8 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+(1-\lambda)x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

可能有非零解？

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1-\lambda\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\0&1-\lambda&\lambda-1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 4\\0 & 0 & \lambda-1\\1 & 2-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}(\lambda-1)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3).$$

当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$，方程组可能有非零解.

例 9 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x & 1 & 2 & 4\\1 & 2-x & 2 & 4\\2 & 0 & 1 & 2-x\\1 & x & x+3 & x+6\end{vmatrix}$，证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

证 因为

$$f(0)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 4\\1 & 2 & 2 & 4\\2 & 0 & 1 & 2\\1 & 0 & 3 & 6\end{vmatrix}=0,\ f(1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 4\\2 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 4 & 7\end{vmatrix}=0,$$

又知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(x)=0$，即 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

例 10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$ __2__ (2005 年数一).

分析 将 $\boldsymbol{B}$ 写成 $\boldsymbol{A}$ 乘另一矩阵的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

解 由题设，有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 4 & 9\end{pmatrix},$$

则

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 4 & 9\end{vmatrix}=1\times2=2.$$

注 本题的思想方法是把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，关键是将其转化为用矩阵乘积形式表示. 一般地，若

$$\boldsymbol{\beta}_1 = k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\beta}_m = k_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{m1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 11 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}| = \underline{\frac{1}{2}}$(2003 年数二).

分析 先化简分解出矩阵 $\boldsymbol{B}$，再取行列式即可.

解 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，可知 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}.$$

易知矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，于是有

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},$$

再两边取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$，所以，$|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{2}$.

注 本题综合运用可逆矩阵和行列式的相关性质进行计算，此类问题一般都应先化简再计算.

1.5 习 题 解 答

1.5.1 习题 1 解答

1-1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;

解 **法一** 由三阶行列式定义得

$$\begin{vmatrix}3&6&1\\1&0&5\\3&1&7\end{vmatrix}=3\times0\times7+6\times5\times3+1\times1\times1-1\times0\times3-3\times5\times1-6\times1\times7$$

$$=0+90+1-0-15-42=34.$$

法二 $$\begin{vmatrix}3&6&1\\1&0&5\\3&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&0&5\\3&6&1\\3&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-r_3}-\begin{vmatrix}1&0&5\\0&5&-6\\0&1&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&0&5\\0&1&-8\\0&5&-6\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-5r_2}\begin{vmatrix}1&0&5\\0&1&-8\\0&0&34\end{vmatrix}=34.$$

(2) $\begin{vmatrix}102&99&202\\200&201&397\\302&301&602\end{vmatrix}$;

解 $$\begin{vmatrix}102&99&202\\200&201&397\\302&301&602\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-2c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}102&-3&-2\\200&1&-3\\302&-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-3&-2\\0&1&-3\\2&-1&-2\end{vmatrix}+100\times\begin{vmatrix}1&-3&-2\\2&1&-3\\3&-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-3&-2\\0&1&-3\\0&2&0\end{vmatrix}+100\times\begin{vmatrix}1&-3&-2\\0&7&1\\0&8&4\end{vmatrix}=12+2\ 000=2\ 012.$$

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$;

解 $$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_2}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-3.$$