

21 世纪高校教材

概率论与数理统计

*Probability Theory &
Mathematical Statistics*

- 主 编 阮宏顺
- 副主编 黄清龙 吴春青 石澄贤

◆ 苏州大学出版社

概率论与数理统计

主 编 阮宏顺

副主编 黄清龙 吴春青 石澄贤

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 阮宏顺主编. — 苏州: 苏州
大学出版社, 2012. 6
ISBN 978-7-5672-0092-0

I. ①概… II. ①阮… III. ①概率论-高等学校-教
材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 142853 号

内容简介

本书系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容,包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析.本书侧重于基本概念、基本理论引入的方式,尽量做到内容叙述详细,语言表达通俗易懂.通过具体而有趣的实例讲述概率统计的基本概念,以及用概率统计方法分析和解决问题的思路,激发学生的学习兴趣,培养学生分析问题和解决问题的能力.本书书末还介绍了 MATLAB 的统计功能与应用.

本书可作为高等学校工科、理科(非数学类)及经济管理类各专业的教材、教学参考书或考研参考资料,也可供工程技术人员、管理人员和自学者参考.

概率论与数理统计

阮宏顺 主编

责任编辑 李娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市十梓街1号 邮编:215006)

宜兴市盛世文化印刷有限公司印装

(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路58号 邮编:214217)

开本 787×960 1/16 印张 13.5 字数 257 千

2012年6月第1版 2012年6月第1次印刷

ISBN 978-7-5672-0092-0 定价:27.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020
苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前 言

清华大学出版社
地址：北京市海淀区中关村大街25号
邮编：100084
电话：(010) 62770175
网址：http://www.tup.tsinghua.edu.cn

本书是参照教育部颁布的高等工科院校本科概率论与数理统计课程教学基本要求和近年来全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写的。

本书着重介绍概率论的基本概念、基本理论,以及常用的数理统计方法.在编写时,编者力求做到取材适当、概念清晰,注重理论联系实际,注意前后知识的衔接.考虑到目前工科数学教学内容过分强调运用而忽视一些基本定义、定理引入的背景,编者尽量通过实例引入一些基本概念,显得自然,也便于理解.为提高学生运用数理统计方法的能力,编者在例题中,先分析题意,通过分析将具体例题归结为相应的概率统计问题,尽量避免机械地套用公式.通过这样的训练,旨在使学生了解并逐渐掌握用概率统计的理论和方法解题的思路和步骤,以培养学生分析问题、解决问题的能力.同时在保证理论系统性的基础上,尽可能通过解决实际问题的例子,提高学生的学习兴趣,激发学生的求知欲望,培养学生的创新能力.

本书第1章至第4章,主要讨论随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量、随机变量的数字特征;第5章起到承前启后的作用,主要讨论大数定律与中心极限定理;第6章至第9章,主要讨论抽样和抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析.面对高校扩招后高等教育大众化的趋势,编者在书中侧重于基本概念、基本理论和基本方法的介绍,尽量做到内容叙述详细,语言表达通俗易懂,不刻意追求解题技巧.本书中例题、习题较多,书末附有习题参考答案或提示,便于学生自学.

面对计算机应用和数学软件的普及,本书将 MATLAB 引入概率统计教学. MATLAB 是集计算、可视化和编程等功能于一体的最流行的科学和工程计算软件之一.本书在书末初步介绍了 MATLAB 的统计功能与应用,目的是希望把计算

机应用与概率统计教学有机地结合起来,把数学软件与运用概率统计方法解决实际问题结合起来.

本书由阮宏顺、黄清龙、吴春青、石澄贤、王强、王琼编写,最后由阮宏顺统稿.本书在编写过程中得到了徐明华教授及其他教师的许多鼓励和帮助,并得到常州大学教学改革基金的资助,在此一并表示感谢.

由于编者水平有限,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2012年6月

目 录

第 1 章 概率论的基本概念

§ 1.1 随机试验	(1)
§ 1.2 样本空间、随机事件	(2)
§ 1.3 频率与概率	(6)
§ 1.4 古典概型	(9)
§ 1.5 几何概型	(12)
§ 1.6 条件概率	(13)
§ 1.7 事件的独立性	(18)
习题 1	(23)

第 2 章 随机变量及其分布

§ 2.1 随机变量的概念	(29)
§ 2.2 离散型随机变量	(30)
§ 2.3 连续型随机变量	(34)
§ 2.4 分布函数	(38)
§ 2.5 随机变量函数的分布	(45)
习题 2	(49)

第 3 章 多维随机变量

§ 3.1 二维随机变量的分布	(56)
§ 3.2 边缘分布与随机变量的独立性	(61)
§ 3.3 两个随机变量的函数的分布	(69)
§ 3.4 二维随机变量的条件分布	(75)
习题 3	(77)

第 4 章 随机变量的数字特征

§ 4.1 数学期望	(83)
------------------	------

§ 4.2 方差	(93)
§ 4.3 矩、协方差和相关系数	(96)
习题 4	(101)

第 5 章 大数定律与中心极限定理

§ 5.1 大数定律	(105)
§ 5.2 中心极限定理	(108)
习题 5	(111)

第 6 章 数理统计的基本概念

§ 6.1 总体与样本	(113)
§ 6.2 直方图和经验分布函数	(114)
§ 6.3 统计量	(119)
§ 6.4 抽样分布	(120)
习题 6	(124)

第 7 章 参数估计

§ 7.1 参数的点估计	(127)
§ 7.2 估计量的评价标准	(136)
§ 7.3 区间估计	(139)
习题 7	(148)

第 8 章 假设检验

§ 8.1 假设检验的基本概念	(152)
§ 8.2 正态总体均值的假设检验	(154)
§ 8.3 正态总体的方差的假设检验	(157)
§ 8.4 正态总体均值的单侧假设检验	(160)
习题 8	(161)

第 9 章 方差分析及回归分析

§ 9.1 一元方差分析	(164)
§ 9.2 一元线性回归	(169)
§ 9.3 一元线性回归中的假设检验和预测	(173)
习题 9	(176)

附录 A 排列与组合	(179)
附录 B MATLAB 在概率统计中的应用	(182)
附录 C 常用统计数表	(189)
附表 1 标准正态分布表	(189)
附表 2 χ^2 分布表	(191)
附表 3 t 分布表	(194)
附表 4 F 分布表	(196)
习题参考答案	(200)
参考文献	(208)

第1章 概率论的基本概念

概率论和数理统计是研究随机现象的统计规律性的一门学科. 人们在实践中经常会遇到各种随机现象. 例如, 抛一枚硬币, 可能是正面朝上也可能是反面朝上, 事先无法断言; 观察某机床加工出来的零件, 可能是正品也可能是次品, 在观察之前无法肯定哪个结果会出现; 医院中的产妇可能生男孩也可能生女孩. 称这一类现象为随机现象. 尽管我们在每次试验(或观察)之前无法断言将得到哪一种结果, 但是, 如果进行大量重复的试验(或观察), 我们会发现其出现的结果还是有一定的规律可循的. 例如, 抛硬币问题, 若硬币质地均匀, 则当抛掷的次数较大时, 就会发现大约有一半的次数出现正面. 又如, 测量某物体的长度, 测量多次, 一般来说测量值会在某一数值附近较为集中, 而离该数值较远的数据往往较少. 我们将这种规律称为统计规律性.

随着人类社会的进步和科学技术的不断发展, 随机现象受到人们越来越多的重视. 概率论和数理统计的理论与方法在自然科学、社会科学、工农业生产实践、工程技术、公用事业、经济管理和军事等领域有着广泛的应用. 概率论和数理统计是各类专业技术人员和管理工作者的必不可少的专业基础知识.

§ 1.1 随机试验

对某一随机现象所进行的试验或观察, 叫做**随机试验**, 简称为**试验**. 因此, 随机试验是一个较为广泛的概念, 它包含了各种科学试验. 随机试验通常用字母 E 表示.

随机试验具有以下几个特点:

- (1) 试验具有明确的目的;
- (2) 在相同的条件下可以重复进行;
- (3) 在试验之前已知试验的所有可能结果, 但无法断言会出现哪个结果.

例 1 下列试验都是随机试验:

E_1 : 掷一颗骰子, 观察所出现的点数;

E_2 : 在一批产品中, 任取一件, 观察是正品还是次品;

E_3 : 射击一目标, 直到击中为止, 记录射击的次数;

E_4 : 从一批灯泡中任取一只, 观察其寿命;

E_5 : 掷甲、乙两颗骰子, 观察所出现的点数的情况;

E_6 : 掷甲、乙两颗骰子, 观察所出现的点数之和的大小.

§ 1.2 样本空间、随机事件

(一) 样本空间

样本空间是概率论中的重要概念. 在随机试验 E 中, 每一种可能结果都称为一个样本点.

样本点的全体称为样本空间, 记作 Ω . 因此, 样本空间 Ω 是样本点的集合. 在每个随机试验中, 确定样本空间至关重要. 由于对所讨论的问题的兴趣不同, 同一随机试验可以有不同的样本空间, 讨论问题前必须先确定样本空间.

例 1 写出 § 1.1 的例 1 中随机试验的样本空间.

解 $E_1: \Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$E_2: \Omega_2 = \{\text{正品}, \text{次品}\}$;

$E_3: \Omega_3 = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$;

$E_4: \Omega_4 = \{t | t \geq 0\}$;

$E_5: \Omega_5 = \{(x, y) | x=1, 2, \dots, 6; y=1, 2, \dots, 6\}$;

$E_6: \Omega_6 = \{x | x=2, 3, 4, \dots, 12\}$.

值得注意的是, 试验 E_5 和 E_6 的条件相同, 但对所讨论的问题的兴趣不同, 从而有不同的样本空间.

样本空间有以下三种类型:

- (1) 有限集合: 样本空间中的样本点数是有限的, 如例 1 中的 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_5, \Omega_6$;
- (2) 无限可列集合: 样本空间中的样本点数是无限的, 但可列, 如例 1 中的 Ω_3 ;
- (3) 无限不可列集合: 样本空间中的样本点数是无限的, 又不可列, 如例 1 中的 Ω_4 .

(二) 随机事件

有了样本空间的概念, 我们就可以定义随机事件. 先看下面的例子.

例2 将一颗骰子掷一次,所有可能出现的结果为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$.把这6个可能结果作为样本点,其全体构成了样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.在理想情况下,每做一次试验,这6个样本点中必有一个出现且只有一个出现.在许多场合,我们常常对 Ω 的某些子集感兴趣,并称这些子集为事件.例如,事件 A :“出现奇数点”可表示为 $A = \{1, 3, 5\}$,事件 B :“出现的点数不超过3”可表示为 $B = \{1, 2, 3\}$.显然, A 是样本空间 Ω 的子集.在此试验中,若出现样本点1或2或3,就意味着事件 $B = \{1, 2, 3\}$ 发生.

一般地,我们称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为**随机事件**,简称**事件**.事件用大写字母 A, B, C 等表示.在一次试验中,当某事件所包含的任何一个样本点出现时,则称该事件发生.

特别地,仅由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称 Ω 为**必然事件**.空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,它也是 Ω 的子集,它在每次试验中总不发生,称 $\emptyset$ 为**不可能事件**.

(三) 事件间的关系和运算

1. 事件间的关系

(1) 包含关系:设有事件 A, B ,若 B 发生必然导致 A 发生,则称 A 包含 B (或称 B 包含于 A),记作 $A \supset B$ (或 $B \subset A$)(见图1-1).

(2) 相等关系:若事件 A, B 满足: $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 是相等事件,记作 $A = B$.

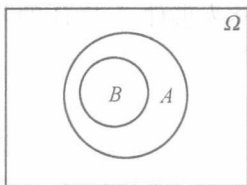


图 1-1

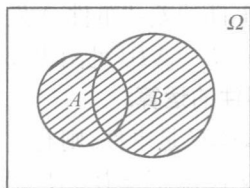


图 1-2

(3) 事件的和:“事件 A, B 中至少有一个发生”称为事件 A, B 的和,记作 $A + B$ (见图1-2中的阴影部分).类似地, n 个事件的和记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n =$

$\sum_{i=1}^n A_i$,无穷可列个事件的和记作 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 事件的积:“事件 A, B 都发生”称为事件 A, B 的积,记作 AB (见图1-3中

的阴影部分). 类似地, n 个事件的积记作 $A_1 A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^n A_i$, 无穷可列个事件的积记作 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

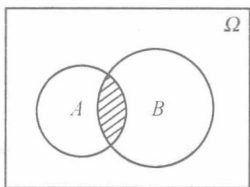


图 1-3

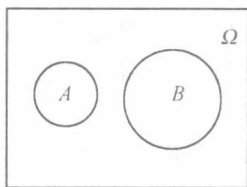


图 1-4

(5) 互不相容(互斥)事件: 若事件 A, B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称 A, B 为互不相容事件(见图 1-4).

(6) 对立事件: 若事件 A, B 满足: $AB = \emptyset$ 且 $A + B = \Omega$, 则称 A, B 互为对立事件, 记作 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$ (见图 1-5 中的阴影部分).

由于 $A, \bar{A}$ 互为对立事件, 所以有 $\bar{\bar{A}} = A$.

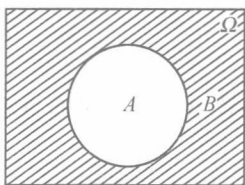


图 1-5

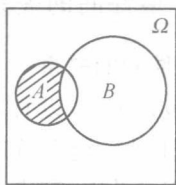


图 1-6

(7) 事件的差: “事件 A 发生且事件 B 不发生”称为事件 A 与 B 的差, 记作 $A - B$, 即 $A - B = A\bar{B}$ (见图 1-6 中的阴影部分).

2. 事件的运算.

设 A, B, C 是事件, 则有

- (1) 交换律: $A + B = B + A, AB = BA$;
- (2) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C, (AB)C = A(BC) = ABC$;
- (3) 分配律: $(A + B)C = AC + BC, AB + C = (A + C)(B + C)$;
- (4) 德·摩根(De Morgan)律: $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$.

对于 n 个事件 $A_i (i=1, 2, \cdots, n)$, 有

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n,$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots + \bar{A}_n.$$

例 3 向指定的目标射击两枪, 以事件 A_1, A_2 分别表示第一枪、第二枪击中目

标,试用 A_1, A_2 及它们的逆事件表示以下各事件:

- (1) 两枪都击中目标;
- (2) 两枪都没有击中目标;
- (3) 恰有一枪击中目标;
- (4) 至少有一枪击中目标.

解 (1) 事件“两枪都击中目标”可表为 $A_1 A_2$.

(2) 事件“两枪都没击中目标”可表为 $\bar{A}_1 \bar{A}_2$.

(3) 事件“恰有一枪击中目标”可表为 $A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$.

(4) 事件“至少有一枪击中目标”可表为 $A_1 + A_2$.

例4 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回),事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$). 试用事件的运算表示下列事件:

- (1) 三次都取到了合格品;
- (2) 三次中至少有一次取到合格品;
- (3) 三次中恰有两次取到合格品;
- (4) 三次中最多有一次取到合格品.

解 (1) 事件“三次都取到合格品”可表为 $A_1 A_2 A_3$.

(2) 事件“三次中至少有一次取到合格品”可表为 $A_1 + A_2 + A_3$.

(3) 事件“三次中恰有两次取到合格品”可表为 $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$.

(4) 事件“三次中最多有一次取到合格品”可表为 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_3 + \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

例5 设事件 A, B 满足条件: $AB = \bar{A} \bar{B}$, 问 A 和 B 是什么关系?

解 由德·摩根律知, $\bar{A} \bar{B} = \overline{A+B}$, 又已知 $AB = \bar{A} \bar{B}$, 所以 $AB = \overline{A+B}$, 从而有

$$\overline{AB} = \overline{\overline{A+B}} = A+B. \quad (1.2.1)$$

由于

$$A+B \supset AB, \quad (1.2.2)$$

于是由(1.2.1)及(1.2.2)式得

$$\overline{AB} \supset AB.$$

由此得出

$$AB = \emptyset. \quad (1.2.3)$$

由(1.2.1)及(1.2.3)式得

$$A+B = \Omega. \quad (1.2.4)$$

由(1.2.3)及(1.2.4)式知 A, B 是对立事件, 即 $A = \bar{B}$.

§ 1.3 频率与概率

概率论研究的是随机现象的量的规律性. 因此, 仅仅知道试验中可能发生哪些事件是不够的, 还必须对事件发生的可能性大小进行量的描述. 而刻画随机事件发生可能性大小的量, 就是本节要研究的概率. 为了引出概率的定义, 先给出频率的定义.

(一) 频率

定义 1.1 设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m ($0 \leq m \leq n$) 次, 则称 m 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数, 称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率, 记作 $f_n(A) = \frac{m}{n}$.

由定义可知, 频率 $f_n(A)$ 有如下性质:

$$(1) 0 \leq f_n(A) \leq 1; \quad (1.3.1)$$

$$(2) f_n(\Omega) = 1; \quad (1.3.2)$$

(3) 若事件 A 与 B 互不相容, 则

$$f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B). \quad (1.3.3)$$

证 性质(1)、性质(2)显然成立. 现在我们来证明性质(3). 设 m 表示在 n 次重复试验中事件 $A+B$ 发生的次数, 设 m_A, m_B 分别表示在这 n 次重复试验中事件 A, B 发生的次数, 因 A, B 互不相容, 故必有 $m = m_A + m_B$, 从而有

$$f_n(A+B) = \frac{m}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = f_n(A) + f_n(B).$$

历史上有人做过掷硬币的试验, 现将试验的一些结果列于表 1-1 中.

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 $\frac{m}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

再看下面的例子.

将一枚硬币抛 20 次、200 次、2000 次,各做 10 遍,得到如表 1-2 所示的数据 (其中 n_A 表示正面出现的次数).

表 1-2

试验序号	$n=20$		$n=200$		$n=2000$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	14	0.70	104	0.520	1010	0.5050
2	11	0.55	91	0.455	990	0.4950
3	13	0.65	99	0.495	1012	0.5060
4	7	0.35	96	0.480	986	0.4930
5	14	0.70	99	0.495	991	0.4955
6	10	0.50	108	0.540	988	0.4940
7	11	0.55	101	0.505	1004	0.5020
8	6	0.30	101	0.505	1002	0.5010
9	9	0.45	101	0.505	976	0.4880
10	9	0.45	110	0.550	1018	0.5090

由表 1-1 和表 1-2 中的数据可以看出如下两点:

- (1) 频率具有波动性,其波动的幅度随着试验次数 n 的增大而减小;
- (2) 频率具有稳定性,随着试验次数 n 增大而逐渐稳定于 0.5.

显然,我们用上表中的某一频率作为正面出现的概率(即描述可能性的量)都不尽合理,而用 0.5 来表示更为合理些,因为所有的频率都稳定于 0.5.

一般地,对于任一随机事件 A 的频率,当试验次数 n 逐渐增大时,它逐渐稳定于某个常数的附近.这是随机现象固有的性质,即频率的稳定性,也就是我们所说的随机现象的统计规律性.由于事件的频率反映了它在一定的条件下发生的频繁程度,即反映了事件发生的可能性的_{大小},虽然事件的频率可能随着试验次数 n 的变化而变化,但是随着 n 的无限增大,事件的频率将逐渐稳定于某一常数.这个常数不依赖于实验的次数 n ,它是客观存在的一个数.对于每一个随机事件 A 都有一个这样的客观存在的常数与之相对应.因此,我们很自然地想到,应该用这个数来衡量事件 A 发生的可能性的_{大小},并称之为事件 A 的概率.但是,在实际问题中,若对每个随机事件都要通过大量的试验而得到频率的稳定值,并由此获得其概率是不现实的.于是,受频率的性质的启发,以及为了理论研究的需要,我们给出如下

度量事件发生可能性大小的量——概率的定义.

(二) 概率

定义 1.2 设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A , 赋予一个实数 $P(A)$, 如果满足

$$(1) 0 \leq P(A) \leq 1, \quad (1.3.4)$$

$$(2) P(\Omega) = 1, \quad (1.3.5)$$

(3) 对于任何两两互不相容事件 $A_i (i=1, 2, \dots)$, 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad (1.3.6)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(1.3.6) 式称为概率的可列可加性.

在第五章中将证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 频率 $f_n(A)$ 在一定的意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实, 我们有理由用概率 $P(A)$ 来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性的, 同时概率具有与频率相类似的性质.

从概率的定义可以导出概率的另外一些重要性质:

性质 1 $P(\emptyset) = 0$.

性质 2 概率具有有限可加性, 即若事件 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 两两互不相容, 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

性质 3 设 A, B 是两个事件, 则

$$P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

性质 4 对于任一事件 A , 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

性质 5 对于任意两个事件 A, B , 有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 5 可以推广到多于两个事件的和事件的情形. 例如, 对于任意三个事件 A, B, C , 有

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

例 1 设事件 A, B 的概率分别是 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{3}$, 根据下列条件分别求 $P(B-A)$.

$$(1) A \subset B; \quad (2) P(AB) = \frac{1}{6}.$$

解 (1) 当 $A \subset B$ 时, $P(B-A) = P(B) - P(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

(2) 当 $P(AB) = \frac{1}{6}$ 时, $P(B-A) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

例2 设事件 A, B, C 的概率都为 $\frac{1}{4}$, 且 $P(AC) = \frac{1}{8}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, 求事件 A, B, C 中至少有一个发生的概率.

解 因为 $ABC \subset AB$, 故 $P(ABC) \leq P(AB)$.

由于 $P(AB) = 0$, 所以 $P(ABC) = 0$, 从而所求概率为

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{5}{8}.$$

例3 某企业生产的电子产品分一等品、二等品与废品(即不是合格品)三种, 如果生产一等品的概率为 0.8, 生产二等品的概率为 0.19, 问生产合格品的概率是多少?

解 设 A 表示事件“生产的产品是一等品”, B 表示事件“生产的产品是二等品”, 则 $A+B$ 表示事件“生产的产品是合格品”. 因为 A, B 互斥, 所以

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.8 + 0.19 = 0.99.$$

§ 1.4 古典概型

古典概型也称等可能概型, 是最简单的随机试验模型, 也是很多概率计算的基础, 而且有不少实际应用. 古典概型具有如下两个特征:

(1) 随机试验 E 只有有限个可能结果(即样本点) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 其样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$;

(2) 每个可能结果(即样本点)出现的可能性相等, 即 $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, i=1, 2, \dots, n$.

在古典概型中, 对于随机试验 E , 若其样本空间中的样本点总数为 n , 事件 A 所包含的样本点数为 m (即事件 A 包含了 m 个基本事件), 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.4.1)$$

这就是古典概型的概率定义, 同时也是古典概率的计算公式.

例1 一枚硬币连抛三次作为一次试验, 观察出现正反面的情况.