高等学校教材

文科高等数学

欧阳光中 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

文科高等数学

Wenke Gaodeng Shuxue

欧阳光中　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书面向文科大学生编写，采用自然朴素的叙述方式，重视从直观中提炼、分析问题，形成基本概念和理论。

主要内容包括集合、微积分、线性代数、概率和统计。其中集合不是中学数学中讲授的内容，而是叙述现代集合论中最基本、最有趣的重要概念和理论；微积分是从分析曲线的直观几何特性出发，逐步展开；线性代数以解线性方程组为主，将矩阵作为工具；在概率和统计中，通过实例直接给出统计学的应用，而不拘泥于统计量的论述。

本书可作为高等学校文科类专业的教材，也可供相关科技工作者参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

文科高等数学 / 欧阳光中编. -- 北京 ：高等教育出版社，2012.5
ISBN 978-7-04-034839-2

Ⅰ. ①文… Ⅱ. ①欧… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第045685号

策划编辑 于丽娜　　责任编辑 李晓鹏　　封面设计 王 睢　　版式设计 余 杨
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 胡美萍　　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市密东印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 13
字　　数 240千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2012年5月第1版
印　　次 2012年5月第1次印刷
定　　价 19.50元

物 料 号　34839-00

前　言

这是一本写给文科大学生的数学教材，主要内容有集合、微积分、线性代数、概率和统计，涵盖大学数学中最基本也是最重要的内容。

数学是一个有用的工具，是一种表达事物的科学语言，同时还是一项思维的体操。

数学是有用的工具，从探索宇宙起源到研究微观粒子，数学都起到关键作用。现实生活中的很多问题与数学密不可分。例如在你的前方挂一盏灯，灯要挂多高，才能使你的座位上的亮度最大？又如班上有50名同学，他们年龄未必全相同，问他们当中至少有两人是同一天生日的可能性有多大？凭想象，这种可能性一定很小，但如果告诉你这种可能性高达97%，你一定会很惊讶。再如，从一批数万粒精密钢珠中任意抽取40粒，测量它们的直径，求得这40粒钢珠的直径的平均值为6.25 mm，能不能就此认为这批钢珠的直径的平均值也是6.25 mm？这些问题只能依靠数学工具计算出来。本书将会回答许多这样的问题，体现数学是有用的工具。

数学是一种语言。一个运动的质点，如果它不是匀速运动，它的速度随时在变化，质点的运动有时快有时慢，何谓质点在某一时刻的速度(瞬时速度)？又如，何谓圆的面积，何谓球的体积，何谓正弦曲线 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的面积？这些问题只有通过数学才能表述清楚。再如，人们对周围的事物进行分类，对学生按性别或年龄分类等，但何谓分类？再说前面提到的一批钢珠的直径，从中抽取40粒，求得直径的平均值为6.25 mm，经验表明：大概可以认为这批钢珠的直径的平均值差不多也是6.25 mm。何谓“大概可以认为”和“差不多也是”？这些问题如果脱离数学，是说不清楚的，只有依靠数学才能获得科学的说法。

数学还是思维的体操，它训练人们的思维，使人变得更聪明。如果对100位成功的企业家作调查，他们都具有大学商学院(管理学院)的学历。调查的第一个问题是，在你的实际工作中用不用大学里学到的数学？估计绝大多数人会回答说，不仅大学的数学用不上，就连中学的三角、几何、代数都用不上。接着问第二个问题，是不是在商学院就不用学数学？所有的人会回答说，不行，应该学数学。为什么呢？因为数学能够培养人的逻辑思维能力，培养从实

际背景中概括和抽象的能力、从现象中抓住本质提出问题的能力、运用经抽象后的概念和理论分析问题和解决问题的能力、在科学的基础上合理判断和演绎的能力。这些能力的培养和提高不仅对理工科大学生很必要，对文科大学生也同样很必要。

本书是一本数学书，必然和许多数学书一样，要讲述很多定义、定理和它们的运用，怎样讲述众多的定义和定理呢？本书采取的是自然朴素的叙述方法，尽量符合人的认识过程，边讲边议。

第一章是集合，讲的是现代集合论。从研究“无限”开始，例如全体正整数有无限多个，全体正偶数也有无限多个，能否比较它们两者哪个更多，哪个更少，甚至是一样多？为了讨论这一问题，先从如何比较两个班级的学生谁多谁少的方法入手，引进可列集和不可列集的概念，从而打开通往现代集合的一扇大门。在这章的写作中，编者重视培养学生的逻辑思维能力，从贴近生活的实际背景中概括和抽象出现代数学中的一些重要概念，如基数、可列和不可列、等价关系、事物分类、商集等，这些都是非常有趣和有用的概念。

第二章讲授微积分。微积分的诞生来源于实际需要，一是研究质点运动的速度和加速度，二是讨论曲线的几何特性。本章采取的是从几何直观出发，将曲线的上升(增加)和下降(减少)以及曲线的极大值和极小值、曲线的凸凹性等，与曲线的切线紧密联系，给出微分学的最重要概念的若干重要应用和重要定理。这样做虽然不算严密，但却把一条正确的思路清晰而自然地展示出来，然后再上升到理论高度，建立必要的定义和定理，并给予适度的证明。让读者学习从几何现象中抓住本质提出问题，给予抽象，并运用经抽象后的概念和理论分析问题和解决问题。

第三章讲授线性代数。当代许多科学技术问题的数值求解往往化为求解线性代数方程组，在计算机上求解线性代数方程组多用消去法。本章就以解线性代数方程组为主线展开，重点讲述消去法。讲解时从不同的实例开始，一步步顺畅地将例题解下去，很自然地得到结果，然后再提升为若干定理。从实际解题的过程升华为理论，会使读者有一种亲切感，比较容易学习到有关知识和思考方法。

第四章讲授概率和统计，这是应用性较强的内容。在概率的讲授中，通过较多有趣的实例讲授概率的基本概念和解题方法。在统计的讲授中，以应用为主，结合具体的应用实例，重点讲解区间估计和假设检验的步骤，使读者容易掌握。本章对区间估计和假设检验的理论依据仅作合理的解释，既使读者知其所以然，又避免枯燥的严格的论证。

希望本书选取的内容、表述的特点和风格以及文字表达能够让文科大学生

喜欢读，使教师容易教，能够使读者获得收益，同时也希望本书能告诉学生许多数学理论是怎样发现的，又是如何从直观的现象中逐步形成理论和方法，将这个过程一步步地展现在学生面前，培养学生的创造力。

最后，欢迎广大学生和教师对本书提出宝贵意见和建议。

欧阳光中

2012年2月

目　录

第一章　集合

第 1 节　集合的基数、可列集和不可列集

1.1　有限集和无限集

何谓集合，用直观的语言来说，一些指定的事物的全体，就组成一个集合. 例如一家超市内的所有商品组成一个集合，每一件商品是这个集合中的一个元素；同样，货架上的所有鞋子也组成一个集合，每一双鞋子是这个集合中的一个元素；又如，指定三个符号#、*、@，这三个符号也组成一个集合，每一个符号都是此集合中的一个元素. 可以说，我们周围存在着许许多多各式各样的集合. 然而，任意一群事物的全体未必构成一个集合，例如所有聪明的小狗不构成一个集合，这是因为无法判定哪一条狗是聪明的，哪一条狗是不聪明的，也无法判定什么样的狗算小狗，什么样的狗不算小狗.

集合可以分为两类：一类是有限集，它含有有限多个元素，例如超市所有商品组成的集合就是一个有限集；另一类是无限集，它含有无限多个元素，例如由所有正整数组成的集合是一个无限集. 本章主要讨论无限集，但往往要从有限集说起.

考察由所有正整数组成的集合 $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

由所有正奇数组成的集合 O

$$O=\{1,3,5,\cdots,2n+1,\cdots\},$$

以及由所有正偶数组成的集合 E

$$E=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\},$$

这三个集合都是无限集. 它们具有下列关系：正奇数集合 O 和正偶数集合 E 之

间没有共同的元素，或者说它们不相交，也可以说它们的交集是空集. 用数学符号写出来是

$$O\cap E=\varnothing(\cap\text{是集合的交},\varnothing\text{是空集}),$$

正整数集合 N 是正奇数集合 O 和正偶数集合 E 的并集，用数学符号写出来是

$$\mathbf{N}=O\cup E(\cup\text{是集合的并}).$$

这三个集合都是无限集，它们含有的元素都是无限多. 这里便出现了三个无限多，现在要问：在这三个无限多之间能不能比出一个高低，例如三者相比，哪一个集合的元素更多，它的无限多比其他集合的无限多更多，再如哪些集合的元素的数目相同，它们的无限多是同样的大小.

从直观上看，正奇数集 O 是正整数集 N 的一个部分，$O\subset\mathbf{N}$($\subset$是集合的包含,$O\subset\mathbf{N}$ 表示集合 N 包含集合 O). 同样，正偶数集 E 也是正整数集 N 的一个部分，$E\subset\mathbf{N}$. 按照整体大于局部的原理，似乎可以断言集合 N 的无限多一定大于集合 O 的无限多，同样也大于集合 E 的无限多. 进一步再问究竟大多少呢，是否可以这样设想，正奇数集 O 在正整数集 N 中占有半壁江山，正偶数集 E 也在正整数集 N 中占有半壁江山，两个半壁江山正好并成一个正整数集：$O\cup E=\mathbf{N}$. 直觉似乎表明：如果记正整数集 N 的无限多是 β，那么半壁江山的正奇数集 O 和半壁江山的正偶数集 E 的无限多似乎应该都是 $\beta/2$，这一直觉的看法究竟是否正确呢?

要留意的是，直觉有时是正确的，有时是错误的. 例如，就上面所说的问题而言，从整体大于局部的直觉角度来看，似乎关于 β 和 $\frac{\beta}{2}$ 的论断是正确的. 然而进一步问：这个 β 是什么呢，它和有限数有没有本质差别，这个 $\frac{\beta}{2}$ 又是什么呢，必须仔细推敲. 如何推敲，还是要从人们的直觉认识出发，去发现新的概念和建立新的理论，这也是贯穿本章的一个基本思想.

1.2 可列集

再来研究正整数集 N 和正偶数集 E(或者正奇数集 O)，考察这两个无限集，哪一个无限多更多，甚至有没有可能两者一样多.

为此，回过头来重新考虑两个有限集，看看如何比较它们的元素哪个多哪个少，或者两者一样多，再从两个有限集的比较中能不能获得一种思考问题的方法来深入研究无限集. 例如有一班和二班两个班级，它们各自的学生组成两个不同的集合，为了比较两个集合中的学生数哪个多哪个少或者一样多，通常

可采用两种方法：

第一种方法是报数. 这是一种最常用也是最有效的方法，让每一个班级的学生都报数，一直报到最后一名学生，就知道每一个班级确切的学生数，通过比较数的大小自然也就知道哪一个班级的学生数多，哪一个学生数少，或者两个班级的学生数相等. 但这种方法只对有限集有用，对无限集却不适用，因为无限集用报数的方法将永远没有最后的一名学生.

第二种方法是配对. 在一班中选取出一名学生，在二班中也选取出一名学生，将这两个学生配成一对，配好之后不准他们再与其他学生配对，然后在剩下的尚未配对学生中再配对，配好后同样不准他们再与其他学生配对，如此继续配下去，一对一对的配好. 如果两个班级的学生全部都能够一对一的配对，一个不多一个不少，那么就知道这两个班级的学生数是相同的. 如果一个班级的学生全部配完，而另一个班级的学生还有剩余，就知道还有剩余学生的班级的学生数多，已经配完的班级的学生数少. 这种配对的想法可以运用于无限集.

将配对的想法抽象出来，便得到下面的定义：

一一对应的定义　设两个集合 A 和 B，如果在它们的所有元素之间能够一对一的配对，就称这两个集合 A 和 B 之间存在一一对应关系，或者称这两个集合一一对应.

有了一一对应的定义，就可以给出何谓集合的等势.

集合等势的定义　两个集合 A 和 B，如果它们之间存在一一对应关系，则称这两个集合是等势的. 用直观的话说，集合 A 与集合 B 等势，表示它们中的所有元素都可以一对一的配对，这就意味着这两个集合中所包含的元素是一样多.

例如集合 $A=\{a,b,c\}$ 和集合 $B=\{\%,\&,@\}$ 之间可以作如下的一一对应（记号$\longleftrightarrow$表示左右的两个元素配对，亦即左右两元素对应）：

$$a\longleftrightarrow\%,\ b\longleftrightarrow\&,\ c\longleftrightarrow @,$$

所以集合 A 和集合 B 是等势的. 对任何两个有限集，如果它们的元素个数相同，那么它们一定等势；反之，两个有限集若等势，它们的元素个数必相同. 所以，对有限集引进等势的概念是多余的，但对无限集这却非同小可.

再考察以下三个无限集合：

正整数集 $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$，

正偶数集 $E=\{2,4,6,8,\cdots\}$，

正奇数集 $O=\{1,3,5,7,\cdots\}$.

运用一一对应（配对）的思想来分析这三个集合中哪个集合的元素更多，有下

面出乎意料的结果.

定理 1 正整数集 N、正偶数集 E 以及正奇数集 O 这三个集合中任何两个集合都是等势的. 直观地说，这三个集合中的元素一样多.

证明 只要证明正整数集 N 和正偶数集 E 是等势的，其余集合是等势的证明完全相仿. 要证明集合 N 和集合 E 等势，只要证明这两个集合是一一对应的.

建立集合 N 和集合 E 的一一对应如下(其中符号 $\updownarrow$ 表示元素间的配对)：

正整数集 N：	1	2	3	4	$\cdots n\cdots$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
正偶数集 E：	2	4	6	8	$\cdots 2n\cdots$

集合 N 和集合 E 中所有元素都能够一对一的配对，在 N 中或者在 E 中，没有哪一个元素会多出来，这表明正整数集 N 与正偶数集 E 一一对应，即证明了 N 和 E 是等势的.

同样可以证明集合 N 与集合 O 等势，集合 E 与集合 O 也等势.

定理 1 告诉人们这样一个看来很奇怪的事实，虽然正偶数集(或正奇数集)只是正整数集的一个局部，然而它们所含有的元素却一样多. “整体大于局部”作为一种数量关系而言，只在有限集时才正确，在无限集时可能不正确，这正是有限和无限的一个重大差别.

可列集和可列无限多的定义 如果一个集合 S，与正整数集等势，就称集合 S 是一个可列集. 可列集中的元素显然是无限多，称它是可列无限多.

定理 1 表明正整数集 N、正奇数集 O 和正偶数集 E 都是可列集，它们的元素都是可列无限多.

下面给出集合论中一个重要的概念：基数. 基数是有限集中元素个数的拓广. 对有限集，例如集合 $\{a,b,c\}$，它与集合$\{\%,\&,@\}$等势，又与集合$\{15,10,20\}$等势. 所有与$\{a,b,c\}$等势的集合，或者与$\{15,10,20\}$等势的集合，不管它们所含的具体元素是什么，也不管这些元素在集合中如何排列，它们有一个共同特性：所含元素一样多. 记这一共同特性为“3”，这就是一个基数. 当然，对有限集可以直接了当地说元素的个数，而不用借助基数. 但对无限集，基数就有重要意义了. 例如所有与正整数集等势的集合是可列集，不管它们所含的具体元素是什么，也不管这些元素在集合中如何排列，它们有一个共同特性：集合中所含元素是可列无限多，记它为 $\aleph_0$(读作:阿列夫,零)，这就是可列集的基数. 除 $\aleph_0$ 外，还有 $\aleph_1$(读作:阿列夫,1)、$\aleph_2$(读作:阿列夫,2)等等基数，它们一个比一个大，我们将在以后再来讨论.

由定理 1 知道，正整数集 N 和正偶数集 E 以及正奇数集 O 都是可列集，

它们的基数都是 $\aleph_0$. 由于它们是等势的，可以讲述一个有趣的数学故事.

在一个旅游景点的附近有一家宾馆，宾馆内设有 100 间客房，假定每一间客房只能住一个人. 现在已经住满 100 个人，这时又来了一位旅客要求住宿，宾馆经理一定会婉言谢绝. 但如果这家宾馆的客房有可列无限多个，客房号码可以按 1，2，3，…排列出来，标明为 1 号房、2 号房、3 号房，等等. 每一间客房都住了人，全部客房都住满，这时来了一位旅客要求住宿，是不是也无法安排呢？不是，聪明的经理会欢迎这位旅客，经理将重新安排客房，他请 1 号房的客人搬到 2 号房，请 2 号房的客人搬到 3 号房，请 3 号房的客人搬到 4 号房，…，请 n 号房的客人搬到 $n+1$ 号房，等等. 原有的旅客全都安排妥当，没有一个客人会没房间住，而 1 号房已空出来，经理就请新来的旅客住进去. 不久又来了可列无限多个旅客，来客的数目与宾馆的客房数一样多，而宾馆客房都已住满. 聪明的经理仍旧欢迎这批旅客的来临，他马上调整原有旅客的房间，他请 1 号房的客人搬到 2 号房，请 2 号房的客人搬到 4 号房，请 3 号房的客人搬到 6 号房，…，请 n 号房的客人搬到 $2n$ 号房，等等. 原有旅客全部搬到偶号房居住，由于正整数集与正偶数集等势，所有旅客都能住进偶号房，无一人遗漏，而奇数号的客房全部空了出来. 新来客人的人数是可列无限多. 所有空出的奇数号的客房也是可列无限多. 这样，新来的可列无限多的客人都能够全部安排住进奇数号客房. 从这里可以看到有限和无限的一个巨大差别.

任何一个可列集 S，由于它与正整数集等势，所以它的元素可以按照第一个（它与正整数中的 1 配对）、第二个（它与正整数中的 2 配对）、第三个（它与正整数中的 3 配对）、…的次序排列出来，表示如下：

$$S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\},$$

亦即

$$\begin{array}{cccccc} S: & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\cdots & a_n\cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbf{N}: & 1 & 2 & 3 & 4\cdots & n\cdots \end{array}$$

由此可见，可列集 S 中的元素可以按照第一个、第二个、第三个、…的次序一个接一个排列出来，这就是可列集名称的由来. 反过来，如果一个集合的元素可以如此排列出来，那么它必定是一个可列集.

例如所有整数（包括正整数、负整数和 0）组成的集合是一个可列集，这是因为它的元素可以排列为

$$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n,\cdots\},$$

上述排列当然不是按数字的大小来排列，但只要能够按照第一、第二、第

三、…的次序排列出来就行了. 可见整数集是一个可列集，它的元素和正整数集的元素一样多，也和正偶数集(或正奇数集)的元素一样多，都是可列无限多.

按照上面的说法，只要集合中的元素能够按照第一、第二、第三、…的次序排列出来，就是一个可列集. 如此说来，任何一个无限集岂不都是一个可列集? 因为在任何一个无限集中，总可以取出第 1 个元素记为 a_1，再取出第 2 个元素记为 a_2，取出第 3 个元素记为 a_3，等等，这不成为可列集了吗? 似乎所有无限集都是可列集，其基数都是 $\aleph_0$. 事实上并非如此，后面(定理 5)将会给出一个重要的不可列集的例子.

定理 2 有限多个可列集的并集仍旧是一个可列集.

证明 这里只证明两个可列集的情形. 多个可列集的情形作为习题留给读者.

设集合 A 和 B 是两个可列集，并且认为它们之间没有共同的元素，亦即它们的交集是空集. 记集合 C 是这两个集合的并集，$C=A\cup B$. 因为集合 A 与 B 都是可列集，所以它们的元素可排列为

$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots\},$$
$$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,\cdots,b_n,\cdots\},$$

将集合 C 的元素按下面的方式排列

$$C=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4,\cdots,a_n,b_n,\cdots\},$$

便证明了集合 C 也是一个可列集.

再考虑无限多个集合的并集. 给出一列无限多个集合

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots,$$

假定这一列集合可以按 1，2，3，…的次序排列出来，排成 A_1，A_2，A_3，…，所以它们是可列无限多个集合. 再假定其中每一个集合 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$都是一个可列集，作它们的并集 S

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots,$$

S 是可列无限多个可列集的并集，问 S 是否仍旧是一个可列集，有下面的定理.

定理 3 可列无限多个可列集的并集仍旧是可列集.

定理 3 的证明留给读者去完成. 这里给出一个提示，证明的方法可以从下面的某一个定理的证明中找到.

1.3 有理数集

实数包括有理数和无理数. 有理数是指形如$\dfrac{p}{q}$的数(其中分母 q 是正整数，

$q=1,2,3,\cdots$，分子 p 是整数，$p=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$，并且 p 与 q 之间无公因子），所有有理数组成有理数集. 可见，有理数集包含所有整数和所有分数.

在实数轴上，所有整数是一系列离散的点，也称它是实数轴上的一个离散点集，点集中任何两个相邻点之间的距离都是 1(实数轴上的一个单位). 但对有理数集而言，它在实数轴上不是离散的，而是一个稠密集，稠密集的概念如下.

稠密集的定义　设集合 S 是实数轴上的一个点集，如果对任何一个开区间（不论这个开区间的长度有多长或多短），在此开区间内必包含有 S 中的点，则称集合 S 在实数轴上是稠密的，或者称 S 是实数轴上的一个稠密集.

在实数轴上，所有整数组成的点集显然不是稠密集，因为在开区间 $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ 内不含有整数. 而有理数集是稠密的，因为在任何开区间内都含有有理数，所有有理数是密密麻麻地分布在整个实数轴上. 初看起来有理数集的元素应该比整数集的元素多得多，但下面的定理 4 使人们大开眼界.

定理 4　有理数集是一个可列集. 直观言之，有理数集的元素与整数集的元素一样多.

证明　要证明的是所有有理数可以按第一个、第二个、第三个、…的次序排列出来，当然不是按大小次序排列.

有理数是形如 $\frac{p}{q}$ 的数（其中分母 q 是正整数，分子 p 是整数，并且 p 与 q 之间无公因子），将分母为 1 的所有有理数写出来就是：$0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots$，将分母为 2 的所有有理数写出来就是：$\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\cdots$，将分母为 3 的所有有理数写出来就是：$\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\cdots$，等等. 现在列出下面的表，暂时不去理会表中的箭头表示什么.

分母为 1 的有理数	0	1	-1	2	-2	3	…
分母为 2 的有理数	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	…
分母为 3 的有理数	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	…
分母为 4 的有理数	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	…
分母为 5 的有理数	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	…

…………

所有有理数都已经列在表中，无一遗漏. 然后，按箭头所示将所有有理数排列如下：

$$0,1,\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},2,\frac{3}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-2,-\frac{3}{2},\cdots,$$

到此便证明了有理数集是一个可列集.

这是一个多么奇怪的结果，有理数集(它是直线上的稠密集)的元素竟然和整数集(它是直线上的离散集)的元素一样多. 整数集、偶数集、奇数集、有理数集都是等势的集，它们的基数都是 $\aleph_0$，它们的元素都是可列无限多. 有没有不可列的无限集呢？它的元素不能用 1 号、2 号、3 号、… 排列出来. 下面将给出回答.

1.4 实数集、一个不可列集的例子

所有实数组成实数集，它包含所有有理数和所有无理数.

定理 5 区间[0,1]内的所有实数是不可列的.

证明 采用反证法. 假设区间[0,1]内的所有实数是可列的，将这些实数排列为

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots,$$

区间[0,1]内的所有实数都在 $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$ 内. 现在要证明的是，在[0,1]内还存在一个实数，它不在 $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$ 内，这就得出矛盾，从而否定反证法的假设.

将上述每一个 $x_n(n=1,2,3,\cdots)$ 都用小数表示出来

$$x_1=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}a_4^{(1)}\cdots,$$
$$x_2=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}a_4^{(2)}\cdots,$$
$$x_3=0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}a_4^{(3)}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}a_4^{(n)}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中每一个 $a_j^{(i)}(i=1,2,3,\cdots;j=1,2,3,\cdots)$ 都是 0 到 9 之间的一个整数. $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$ 内每一个实数都用小数表示出来. 但这样的表示有可能出现同一个实数会有两种不同的表示. 例如 0.35000… 和 0.349999… 表示同一个数，这里约定只用 0.35000… 表示，不用 0.34999… 表示；再如 0.874000…，不把它表示为 0.8739999…，等等. 但[0,1]内只有一个实数 1.000…，把它表示为 0.9999…. 按照反证法的假设，[0,1]内的所有实数都在 $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,$