

高职高专规划教材

GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI



微积分应用基础

WEIJIFEN YINGYONG JICHU

王振吉 谷俊刚 主编



化学工业出版社

高职高专规划教材

微积分应用基础

	王振吉	谷俊刚	主 编
张 军	宗慧敏	王月华	副主编
		张文英	主 审



化学工业出版社

· 北 京 ·

本书依据教育部制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》，充分考虑高职高专工科类各专业人才培养计划标准，结合编写人员课程改革与建设研究成果，吸收多所院校数学课程教学改革成功经验，经过教材编写组成员几年来深入研讨编写而成。

本书主要包括：函数与极限、导数与微分及其应用、积分及其应用、微分方程及其应用、数学实验 5 个模块。书中每节附有练习题，每章附有内容小结和复习题。结合现代化教学要求，配备了相应的教学课件。为便于考核评价的科学性，配备了相应的试题库。

本书可作为高职高专工科类各专业数学教材，也可作为专接本的学习参考教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分应用基础/王振吉, 谷俊刚主编. —北京: 化学工业出版社, 2010. 9

高职高专规划教材

ISBN 978-7-122-09153-6

I. 微… II. ①王…②谷… III. 微积分-高等学校: 技术学院-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 136170 号

责任编辑: 张建茹

文字编辑: 高霞

责任校对: 边涛

装帧设计: 刘丽华

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印刷: 北京市振南印刷有限责任公司

装订: 三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 12 字数 311 千字 2011 年 9 月北京第 1 版第 2 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 22.00 元

版权所有 违者必究

高等职业技术教育承担着为生产、管理、服务一线培养专科层次高素质技能型人才,以及培养将来成为生产一线发现问题、解决问题的技术能手和生产组织管理人员的主要任务。本教材充分考虑高职特点、专业需求标准、学生生源状况、数学学习认知规律等重要因素,以实现数学课程在高职高专工科类人才培养计划中的功能和价值。微积分应用基础是高职高专工科类各专业的一门主干课程,是工科类各专业人才培养的基础,是对学生进行能力培养和素质教育的主要教学内容。

本教材项目编写组在充分研究目前我国高职教育理论和高职教育现状、分析总结高职高专工科类数学课程教学研究成果的基础上,力争准确把握基础知识和基本理论,切实实现以“必须、够用”为度、以应用为目的和能力培养为本位的教学原则;激发学生学习兴趣,激励学生主动参与教学过程,充分体现学生为主体、教师为主导的数学课程主要教育教学理念,突出高职高专工科特色。确立编写思路,构建课程体系,选取教学内容,配置教学资源。

本教材在努力贯彻高职高专公共基础课程教学原则、落实高职高专数学课程基本教育理念、充分考虑教与学各种因素基础上,在编写过程中,将以下几方面作为主要着力点:

- 用模块体系整合内容,用数学模型体现应用。教材结构分为函数与极限、导数与微分及其应用、积分及其应用、微分方程及其应用、数学实验五个模块。各模块内容选择可根据专业人才培养计划需求及学生实际水平进行调整或在教学过程中有所侧重;便于根据教学目的,将各模块划分为基本要求、一般要求、较高要求分层考核;同时模块化结构便于显示一元微积分的核心内容,如极限思想、瞬时变化率问题——导数模型、不断变化的函数在某区间的积累问题——定积分模型等。

- 以问题为中心,围绕问题进行教学,突出知识产生的具体过程,教学过程中重视数学思想方法和数学能力培养。教材中设置了一定量的“思考”训练,旨在改变教师灌输式的讲解,在教师引导下形成师生共同参与的问题探索 and 解决过程,使学生亲身体验到自己发现的乐趣,激发其求知欲和创造欲。

- 在以知识够用为平台的基础上确立以应用能力培养为主要教学目标,强化实际问题“数学化”的分析过程和方法。数学主要概念的引入和提出,尽量通过学生能够接受的实际问题作为引例,在此前提下,使问题回归自然和本源,寓概念形成于实例的分析解决过程之中;同时,在概念、定理、公式等内容形成相对完整的知识体系之后,落脚点放在解决实际问题的应用上。

- 强调知识的来龙去脉,淡化知识的逻辑体系,减少不必要的理论证明;加强“直观”教学,将抽象的理论尽量利用几何图形观察或数值分析使问题直观化、简单化,让学生易于理解和接受,避免对能力培养和数学应用价值不大的理论知识和不必要的解析推导;避免繁杂而实用价值不大的数学运算,改变题型为中心的数学教学观,例题及练习题以理解概念和数学应用为主要目的。

- 随着计算机的广泛应用,考虑数学现代发展趋势,本教材设置了较简单的数学实验内容。

- 考虑数学与专业需求和应用相吻合,既重视数学知识与专业需求相衔接,同时兼顾

数学思想方法在专业能力培养中的目的和价值。

本书由王振吉、谷俊刚任主编；张文英任主审。本书第1、2、3章及习题由张军、宗慧敏、王月华编写；第4、5、6、7、8章及习题由王振吉、谷俊刚编写；全书的编写大纲、体系结构、统稿由王振吉、谷俊刚完成。多媒体电子课件由宗慧敏、王月华制作，试题库建设由本编写组完成，选用本书作为教材的院校教师可联系：hbwangzhenji@163.com 免费提供使用。

由于编者水平所限，书中若有不妥之处，敬请同仁和读者批评指正。

编者

2010年5月

目 录

第 1 章 函数 1

1.1 函数概念 1

习题 1-1 6

1.2 初等函数 6

习题 1-2 8

1.3 函数模型 8

习题 1-3 11

本章小结 11

复习题一 12

第 2 章 极限与连续 15

2.1 函数的极限 15

习题 2-1 20

2.2 极限的运算 21

习题 2-2 25

2.3 无穷小与无穷大 26

习题 2-3 28

2.4 函数的连续性 29

习题 2-4 34

本章小结 35

复习题二 36

第 3 章 导数与微分 38

3.1 导数的概念 38

习题 3-1 43

3.2 四则运算求导法则 44

习题 3-2 45

3.3 复合函数求导法则 46

习题 3-3 48

3.4 隐函数及参数方程所确定的函数的导数 48

习题 3-4 51

3.5 高阶导数 52

习题 3-5 53

3.6 微分 53

习题 3-6 57

本章小结 58

复习题三 59

第 4 章 导数的应用 62

4.1 中值定理及函数单调性的判定 62

习题 4-1 65

4.2 函数的极值与最值 66

习题 4-2 70

4.3 函数图形的描绘 71

习题 4-3 77

4.4 洛必达法则 77

习题 4-4 80

* 4.5 曲线的弧微分及曲率 80

习题 4-5 84

本章小结 85

复习题四 85

第 5 章 不定积分 88

5.1 不定积分的概念与性质 88

习题 5-1 92

5.2 换元积分法 93

习题 5-2 99

5.3 分部积分法 100

习题 5-3 102

本章小结 102

复习题五 104

第 6 章 定积分及其应用 107

6.1 定积分的概念 107

习题 6-1 111

6.2 定积分的性质 111

习题 6-2 113

6.3 定积分的计算 113

习题 6-3 118

6.4 定积分的应用 118

习题 6-4 127

* 6.5 广义积分	128	7.7 常微分方程的应用举例	155
习题 6-5	131	习题 7-7	159
本章小结	131	本章小结	160
复习题六	133	复习题七	161
第 7 章 常微分方程	136	第 8 章 数学实验	164
7.1 微分方程的基本概念	136	数学实验 1	164
习题 7-1	138	数学实验 2	165
7.2 一阶微分方程及其解法	139	数学实验 3	166
习题 7-2	144	数学实验 4	168
7.3 几种可降阶的高阶微分 方程	145	数学实验 5	169
习题 7-3	148	数学实验 6	170
7.4 二阶线性微分方程解的 结构	148	附录一 基本初等函数的图像 及其性质	171
习题 7-4	149	附录二 习题参考答案	174
7.5 二阶常系数线性齐次方程的 解法	149	参考文献	185
习题 7-5	151		
7.6 二阶常系数线性非齐次方程 的解法	151		
习题 7-6	155		

第1章 函 数

微积分学是在实数范围内、以函数为主要研究对象的基础学科. 在解决实际问题的过程中, 首先需要把问题中的条件和数量关系抽象概括为函数模型, 然后才能运用数学思想方法讨论和解决具体问题. 因此, 熟悉函数的结构和特性, 形成初步的建立数学模型的能力, 是学习微积分的关键任务之一. 本章将在大家对函数概念原有的认识基础上, 从应用目的出发进一步介绍函数的相关概念和性质, 并结合具体问题展示建立简单的数学模型的思想方法, 为微积分的学习和应用奠定基础.

1.1 函数概念

1.1.1 函数定义

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中, 人们会碰到许多用来表示不同事物的量, 通常可将它们分为两类: 一类是在某个问题的研究过程中保持不变的量, 称之为常量; 一类是在某个问题的研究过程中会出现变化, 即可以取不同值的量, 称之为变量.

例如, 学校的体育馆的面积是保持不变的, 是常量; 而每天来体育馆打球的人数是不尽相同的, 因而是变量.

又如, 将一密闭的容器中的气体进行加热, 在加热过程中, 容器中气体的体积、分子数保持不变, 是常量; 而气体的温度、容器内的气压在不断变化, 是变量.

在研究某实际问题的过程中, 常常发现有两个变量同时变化, 并且发现它们在变化过程中, 不仅是相互联系的, 而且彼此间还遵循一定的变化规律. 下面举例加以说明.

【引例 1-1】 在自由落体运动中, 设物体下落的时间为 t , 下落的距离为 s , 如果开始下落的时刻 $t=0$, 那么 s 和 t 之间的依赖关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \text{ 为重力加速度})$$

表示, 若物体到达地面的时刻 $t=T$, 则在时间区间 $[0, T]$ 上任取一个数值时, 由上面的公式都可以确定出 s 的对应值.

【引例 1-2】 某容器中装有质量为 M 的浓硫酸, 由于盖子没有盖好发生泄漏, 硫酸的挥发量与时间 t 成正比, 则经过时间 t 之后容器中剩余的硫酸质量为 $m = M - kt$ ($t > 0$).

上面两个例子的实际意义虽然不同, 但就数学角度而言, 每个例子所描述的变化过程都有两个变量, 当其中一个变量在某取值范围内取定一个数值时, 按照某种对应规律, 另一变量有确定的数值与之对应, 两个变量之间的这种对应关系, 称之为函数关系.

定义 1 设有两个变量 x 和 y , 当变量 x 在实数集 D 内取某一数值时, 如果依照某种对应法则 f , 变量 y 都有确定的数值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫做自变量, y 叫做函数或因变量, 数集 D 叫做函数的定义域, 当 x 取遍 D 的各个

数值时, 对应的函数值全体组成的数集 M 叫做函数的值域.

如果对于 D 中的每个 x 的取值, y 有唯一的值与之对应, 称这样的函数为单值函数; 如果对于 D 中的每个 x 的取值, y 有两个或两个以上不同的值与之对应, 称这样的函数为多值函数. 本教材主要讨论单值函数.

在函数定义中, 并未要求对于自变量不同的取值函数的对应值一定不同. 比如 $y=c$, 当 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取任意值时, y 都有确定的值 c 与之对应, 符合函数定义, 称这样的函数为常函数.

由函数定义可以看出, 两个函数当它们的定义域和对应法则其中之一不同时, 这两个函数就是不同的. 只有当两个函数的定义域和对应法则均相同时, 它们才是相同的函数. 例

如, 函数 $y=\frac{x^2+x-2}{x-1}$ 与函数 $y=x+2$ 的定义域不同, 它们是不同的函数; 而函数 $y=$

$|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域和对应法则都相同, 它们是相同的函数.

思考: 定义域、值域、对应法则哪个对确定函数有决定作用? 两个函数相等的充要条件是什么?

1.1.2 函数的表示法

表示函数的方法, 常用的有公式法、图像法和表格法三种.

(1) 公式法

用数学解析式表示两个变量之间对应关系的方法称为公式法 (解析法), 如

$$y=\frac{\sqrt{x+2}}{x}, x^2+y^2=1 \text{ 等.}$$

在用公式法表示函数关系时, 称形如 $y=f(x)$ 表示的函数叫显函数; 如果因变量 y 与自变量 x 的对应关系是由一个含有 x 和 y 的二元方程的形式 $F(x, y)=0$ 所确定, 这样的函数叫做隐函数. 比如方程 $x^2+y^2=1$ 表示的函数为隐函数.

有些函数在整个定义域范围内可以用一个数学式子来表示, 但有些函数在其定义域的不同部分用不同数学式子才能表示, 这类函数称之为分段函数. 值得注意的是, 分段函数是定义域上的一个函数, 不是多个函数, 分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集, 求分段函数值时, 应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如, 函数 $y=\begin{cases} x^2, & -1\leq x\leq 0 \\ x+1, & 0<x\leq 1 \end{cases}$, 是一个分段函数, 其定义域为 $\{x|-1\leq x\leq 1\}$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$;

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

其图形为图 1-1.

(2) 图像法

在直角坐标系中用图形来表示两个变量之间对应关系的方法称为图像法. 如股市走向图 (图 1-2)、一天中的气温记录显示图、与心脏有关的电流随时间变动的心电图等.

(3) 表格法

将自变量的值与对应的函数值列成表格的表示方法称为表格法. 如银行利息表、企业月份与产量表等.

1995~2000 年我国城镇居民恩格尔系数变化情况:

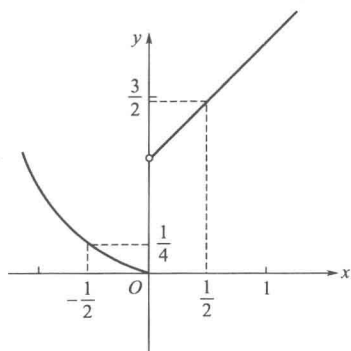


图 1-1

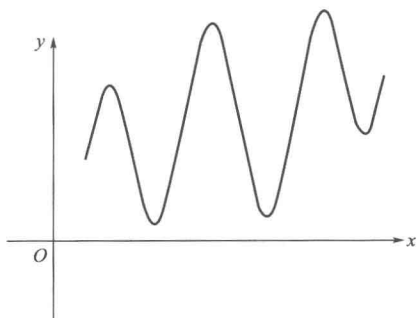


图 1-2

时间/年	1995	1996	1997	1998	1999	2000
恩格尔系数/%	49.9	48.6	46.4	44.5	41.9	39.2

三种表示方法各有特点,有时一个问题只能用某一种方法表示,有时可以用三种表达方式,有时为解决问题又可以从一种形式转化成另一种形式.

思考:某种笔记本的单价是5元,买 x ($x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$)个笔记本需要 y 元.试用函数的三种表示法表示函数 $y = f(x)$.

1.1.3 函数定义域的确定

由于函数的定义域是函数的两要素之一,所以在研究函数关系时,一定要考虑自变量的允许取值范围,即函数的定义域.以下分两种情况来讨论定义域的确定方法.

对于用数学式子给出的函数, x 的取值范围必须使数学式子有意义.为此要求:

- ① 分母不能为零;
- ② 偶次根号下非负;
- ③ 对数的真数为正;
- ④ 正切符号下的式子不等于 $K\pi + \frac{\pi}{2}$;
- ⑤ 余切符号下的式子不等于 $K\pi$;
- ⑥ 反正弦、反余弦符号下式子的绝对值小于等于1.

【例 1-1】 求下列函数的定义域:

$$\textcircled{1} y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}; \quad \textcircled{2} y = \lg(x^2 - x - 2);$$

$$\textcircled{3} y = \arccos \frac{2x-1}{3}.$$

解 ①在函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 中, 因为 $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geq -1, \\ x \neq 2, \end{cases}$

所以函数的定义域为 $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

② 在函数 $y = \lg(x^2 - x - 2)$ 中, 因为 $(x^2 - x - 2) > 0$, 即 $(x+1)(x-2) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$.

所以函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

③ 在函数 $y = \arccos \frac{2x-1}{3}$ 中, 因为 $-1 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 1$, 即 $-2 \leq 2x \leq 4$, 解得 $-1 \leq$

$$x \leq 2.$$

所以函数的定义域为 $[-1, 2]$.

对于由实际问题得到的函数, 其定义域需要由问题本身的意义来确定.

【例 1-2】 将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木料 (图 1-3), 求矩形截面两条边之间的函数关系和定义域.

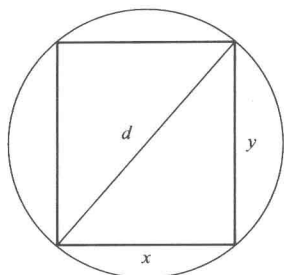


图 1-3

解 设矩形截面的两条边长分别为 x 、 y ,

由

$$x^2 + y^2 = d^2,$$

解得

$$y = \pm \sqrt{d^2 - x^2},$$

根据问题本身的意义可知, 两边长之间的函数关系为 $y = \sqrt{d^2 - x^2}$, 其定义域为 $(0, d)$.

【例 1-3】 某化肥厂现有尿素 1500t, 每吨定价为 1200 元, 总销售量在 1000t 以内时, 按原定价出售, 超过 1000t 时, 超过部分打 9 折出售, 求销售总收入与总销售量的函数关系并指出定义域.

解 设销售总收入为 y 元, 销售总量为 x t, 依题意可得

$$y = \begin{cases} 1200x, & 0 \leq x \leq 1000, \\ 1200 \times 1000 + 1200 \times 0.9 \times (x - 1000), & 1000 < x \leq 1500. \end{cases}$$

其定义域为 $(0, 1500]$.

1.1.4 函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, 函数 $y = x^2$, $y = \cos x$ 是偶函数, $y = \frac{1}{x}$, $y = \tan x$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称 (图 1-4); 奇函数的图形关于原点对称 (图 1-5).

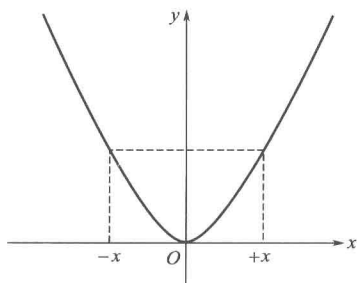


图 1-4

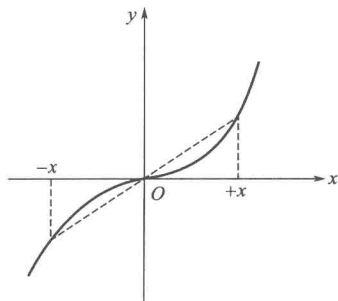


图 1-5

【例 1-4】 判断函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -f(x)$, 所以该函数是奇函数.

(2) 函数的单调性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加, (a,b) 叫函数 $f(x)$ 的单调增加区间; 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少, (a,b) 叫函数 $f(x)$ 的单调减少区间.

在区间 (a,b) 内单调增加和单调减少的函数统称为单调函数, (a,b) 叫做这个函数的单调区间.

例如, 函数 $y=2^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加; 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向而上升 (图 1-6), 单调减少函数的图像沿 x 轴正向而下降 (图 1-7).

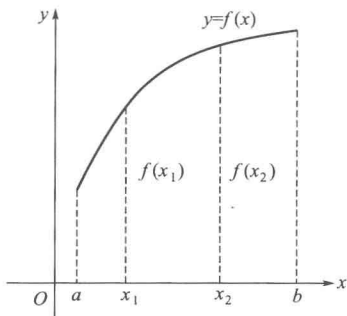


图 1-6

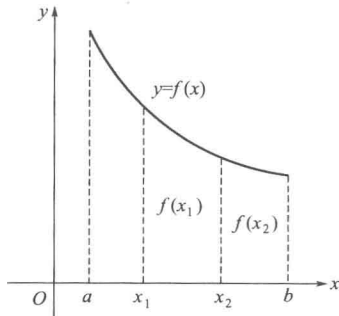


图 1-7

【例 1-5】 证明 $f(x)=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

证 在 $(0, +\infty)$ 内任取两点 x_1, x_2 , 并且设 $x_1 < x_2$, 因为

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

又 $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$,

所以 $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$,

于是, $f(x)=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

思考: 如何证明 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少?

用单调性的定义确定函数的单调区间一般比较困难, 更有效的判断方法将在之后的学习中介绍.

(3) 函数的周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数. T 称为 $f(x)$ 的周期. 其中的最小正数 T 称为周期函数的最小正周期. 通常所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的函数; 函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

周期函数图形的特点是自变量增加或减少距离 T 后, 图形重复出现.

(4) 函数的有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于任一 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 D 内无界.

例如, 函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 函数 $y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有界; 而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, $y=\tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无界.

思考: 具有下列特性的函数, 其图像有什么特征?

- ① 单调性; ② 奇偶性; ③ 有界性; ④ 周期性.

习题 1-1

1. 下列各题中所给的函数是否相同? 为什么?

(1) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$ 与 $y=x-2$; (2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;
 (3) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$; (4) $y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$;
 (5) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

2. 已知 $f(x)=|x-4|-4$, 求 $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$.

3. 已知 $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{a})$, $f(x+h)$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3-2x}$; (2) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$; (3) $y=\lg \frac{1+x}{1-x}$;
 (4) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$; (5) $y=\arcsin(1-3x)$; (6) $y=\frac{x}{\tan x}$.

5. 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $f(\lg x)$ 的定义域.

6. 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些是非奇非偶函数?

(1) $f(x)=x-\sin x$; (2) $f(x)=x^2+\cos x$;
 (3) $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$; (4) $f(x)=\tan x-x^2$;
 (5) $f(x)=\lg \frac{1-x}{1+x}$; (6) $f(x)=\sin(\lg x)$.

7. 下列函数中哪些是周期函数? 如果是周期函数, 指出其最小正周期.

(1) $y=3\sin(2x-\pi)$; (2) $y=x^2+1$;
 (3) $y=\tan(x-1)$; (4) $y=|\sin x|$.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

下面六类函数:

常函数 $y=C$ (C 为常数);

幂函数 $y=x^a$ (a 是常数);

指数函数 $y=a^x$ (a 是常数, $a>0, a \neq 1$);

对数函数 $y=\log_a x$ (a 是常数, $a>0, a \neq 1$);

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x,$

$y=\tan x, y=\cot x,$

$$y = \sec x, y = \csc x;$$

$$\text{反三角函数 } y = \arcsin x, y = \arccos x,$$

$$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x;$$

统称为基本初等函数. 微积分中的函数多由这些函数构成.

基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见附录 I.

1.2.2 反函数

在函数中, 自变量与因变量的地位是相对的, 任意一个变量都可根据需要作自变量, 例如, 在函数 $y = x - 4$ 中, x 是自变量, y 是因变量, 根据这个式子, 可以解出 $x = y + 4$, 这里 y 是自变量, x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间的地位的相对性, 称它们互为反函数.

定义 6 设有函数 $y = f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于 M 中的每一个 y 值 ($y \in M$), 都可以从关系式 $y = f(x)$ 确定唯一的 x 值 ($x \in D$) 与之对应, 那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数, 它的定义域为 M , 值域为 D .

习惯上, 函数的自变量都以 x 表示, 所以, 反函数通常表示为 $y = f^{-1}(x)$.

由反函数的定义可知, 在定义区间上是单调函数的必存在反函数.

例如, 函数 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $x = f^{-1}(y) = \arcsin y, y \in [-1, 1]$, 故 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数是 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$.

若把函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像画在同一平面直角坐标系内, 那么这两个图形关于直线 $y = x$ 对称.

一般要求 $y = f(x)$ 的反函数, 只需先从 $y = f(x)$ 中解出 x 的表达式, 当该表达式也是一个函数时, 再将其中的字母 x, y 进行交换即可.

【例 1-6】 求函数 $y = \frac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由函数 $y = \frac{x}{1+x}$, 解得 $x = \frac{y}{1-y}$, 改变变量记号, 即得到所求反函数为 $y = \frac{x}{1-x}$.

【例 1-7】 求函数 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 的值域.

解 由函数 $y = \frac{x+2}{x-2}$, 解得 $x = \frac{2(y+1)}{y-1}$, 给出函数的反函数为 $y = \frac{2(x+1)}{x-1}$. 由于反函数的定义域就是直接函数的值域, 因此直接函数 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 的值域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

1.2.3 复合函数

思考: 向一个球体中充气, 已知球的体积 V 是半径 r 的函数 $V = V(r)$, 而半径又是充气时间 t 的函数 $r = r(t)$, 试将体积 V 表示成时间 t 的函数.

定义 7 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 其定义域为 A . 如果在数集 A 或 A 的子集上, 对于 x 的每一个值所对应的 u 值, 都能使函数 $y = f(u)$ 有定义, 那么 y 就是 x 的函数. 这个函数叫做由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中 u 叫做中间变量.

例如, 函数 $y=\lg(x+1)$ 是由 $y=\lg u$ 与 $u=x+1$ 复合而成的函数; 函数 $y=\lg^2(x+1)$ 可看成是由 $y=u^2$ 、 $u=\lg v$ 及 $v=x+1$ 复合而成的函数.

思考: 任意两个函数都可以复合成一个新的函数吗? 试举例说明.

【例 1-8】 指出下列各复合函数的复合过程.

$$\textcircled{1} y=e^{\sqrt{x}}; \quad \textcircled{2} y=\ln(\sin x^5); \quad \textcircled{3} y=2\sin \sqrt{1-x^2}.$$

解 $\textcircled{1} y=e^{\sqrt{x}}$ 是由 $y=e^u$, $u=\sqrt{x}$ 复合而成.

$\textcircled{2} y=\ln(\sin x^5)$ 是由 $y=\ln u$, $u=\sin v$, $v=x^5$ 复合而成.

$\textcircled{3} y=2\sin \sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=2\sin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=1-x^2$ 复合而成.

思考: 复合函数如何分解? 分解出的每个函数是什么形式才符合要求?

1.2.4 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算、有限次的复合步骤所构成的, 并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.

例如, $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), $y=x\sin x$, $y=\arcsin(2^x-x^2)$ 等都是初等函数; 而函数 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$, $y=\begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 等为非初等函数.

习题 1-2

1. 求下列函数的反函数, 并写出反函数的定义域:

$$(1) y=x^2-4x(x>2);$$

$$(2) y=10^{x+1};$$

$$(3) y=\frac{1-x}{1+x};$$

$$(4) y=\frac{2^x}{2^x+1}.$$

2. 指出下列各函数是由哪些函数复合而成的:

$$(1) y=\sqrt{\arcsin x};$$

$$(2) y=\cos^2(2-3x);$$

$$(3) y=\ln[\ln(\ln x)];$$

$$(4) y=(x+\lg x)^3.$$

3. 设 $f(x)=\lg x$, $g(x)=2^x$, 求: $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $f[f(x)]$.

4. 下列函数能否复合为复合函数, 若能, 写出其解析式、定义域、值域.

$$(1) y=f(u)=\sqrt{u}, u=g(x)=x-x^2;$$

$$(2) y=f(u)=\ln u, u=g(x)=\sin x-1.$$

1.3 函数模型

函数关系是一种变量相依关系的数学模型. 函数模型方法是处理科学理论问题的一种经典方法, 也是处理各类实际问题的一般方法. 掌握函数模型方法是非常必要的.

函数模型是针对所考察的问题构造出相应的函数模型——函数关系, 通过对函数模型的研究, 使问题得以解决的一种数学方法.

研究函数模型, 建立函数模型, 进而借鉴函数模型, 对提高解决实际问题的能力以及提高数学素养是十分重要的. 建立函数模型的步骤可分为:

① 分析问题中哪些是变量, 哪些是常量, 分别用字母表示;

② 根据所给条件, 运用数学、物理或其他知识, 确定等量关系;

③ 具体写出解析式 $y=f(x)$ ，并指明定义域.

【例 1-9】 某单位要建造一个容积为 V 的长方形水池，它的底为正方形，如果池底的单位面积造价为侧面单位面积造价的 2 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解 设底面边长为 x ，则水池的高为 $\frac{V}{x^2}$ ，总造价为 y 元，侧面单位面积单位造价为 a 元，池底的单位面积造价为 $2a$ 元，可得

$$\begin{aligned} y &= x^2 2a + 4x \frac{V}{x^2} a \\ &= 2ax^2 + \frac{4Va}{x} \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

【例 1-10】 一块石子抛入湖中产生了圆形的波纹，问以速度 60cm/s 向外扩展，试把这个圆形波纹所围成的面积 A 表达成时间 t 的函数.

解 因为波纹是圆形，假设波纹的半径是 r ，则波纹的面积 $A=\pi r^2$ ，而 r 又是关于时间 t 的函数 $r=60t$ ，据题意可得

$$\begin{aligned} A &= \pi(60t)^2 \\ &= 3600\pi t^2 \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

【例 1-11】 某牧场要建造占地 100m^2 的矩形围墙，现有一排长 20m 的旧墙可供利用，为了节约投资，矩形围墙的一边直接用旧墙修，另外三边尽量用拆去的旧墙改建，不足部分用购置的新砖新建. 已知整修 1m 旧墙需 24 元，拆去 1m 旧墙改建成 1m 新墙需 100 元，建 1m 新墙需 200 元，设旧墙所保留的部分用 $x\text{m}$ 表示，整个投资用 y 元来表示，将 y 表示为 x 的函数.

解 整个投资包括三部分费用：整修旧墙的费用；拆旧改新的费用；建造新墙的费用. 由此可得

$$y = x \times 24 + (20 - x) \times 100 + \left[2 \left(\frac{100}{x} + x \right) - 20 \right] \times 200$$

化简得
$$y = 324x + \frac{40000}{x} - 2000 \quad x \in (0, 20]$$

【例 1-12】 某工厂生产电视机年产量为 x 台，每台售价为 1200 元，当年产量在 500 台以内，可以全部售出，经广告宣传后又可以再多出 300 台，每台平均广告费为 40 元，若生产再多，本年就销售不出去了. 试建立本年的销售总收入 y 与年产量 x 的关系.

解 因为产量超过 500 台时会增加广告费，又超过 800 台（即 500 台 + 300 台）时，多余部分销售不出去，从而超出部分无收益. 因此，要把产量分三个阶段来考虑. 依题意有

$$y = \begin{cases} 1200x, & 0 \leq x \leq 500, \\ 1200 \times 500 + 1160(x - 500), & 500 < x \leq 800, \\ 1200 \times 500 + 1160 \times 300, & x > 800, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1200x, & 0 \leq x \leq 500, \\ 600000 + 1160(x - 500), & 500 < x \leq 800, \\ 948000, & x > 800. \end{cases}$$

【例 1-13】 为研究某国标准普通信件（重量不超过 50g ）的邮资与时间的关系，得到如下数据：

年份/年	1978	1981	1984	1985	1987	1991	1995	1997	2001	2005	2008
邮资/分	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33

试构建一个邮资作为时间函数的数学模型, 在检验了这个模型是“合理”的之后, 用这个模型来预测一下 2012 年的邮资.

解 ① 先将实际问题量化, 确定自变量 x 和因变量 y . 为方便计算, 设起始年 1978 年为 0, 并用 x 表示, 用 y (单位: 分) 表示相应年份的信件的邮资, 得到下表:

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33

② 作散点图 (图 1-8), 确定变量之间的近似函数关系.

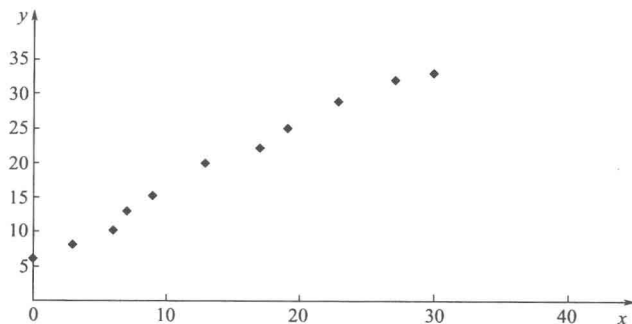


图 1-8

观察得到的散点图可知, 邮资与时间大致呈线性关系. 设 y 与 x 之间的函数关系为 $y = ax + b$, 其中 a, b 为待定常数.

③ 求待定常数 a, b , 通过 Excel 相关功能的计算或通过公式

$$\begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x}, \\ b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}, \end{cases}$$

分别得到 a, b 的值为

$$a = 0.9618, b = 5.898,$$

从而得到回归直线为

$$y = 5.898 + 0.9618x.$$

④ 在散点图中添加上述回归直线 $y = 5.898 + 0.9618x$, 得到邮资-时间散点图与直线的拟合图 (图 1-9):

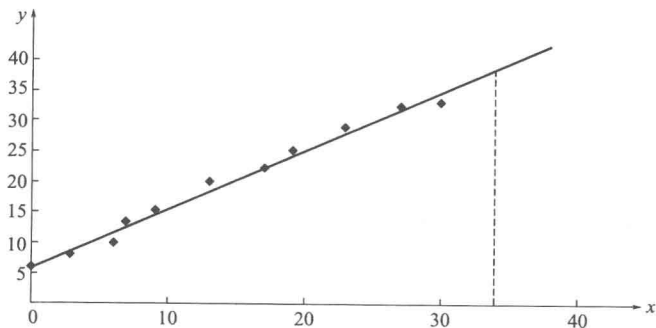


图 1-9