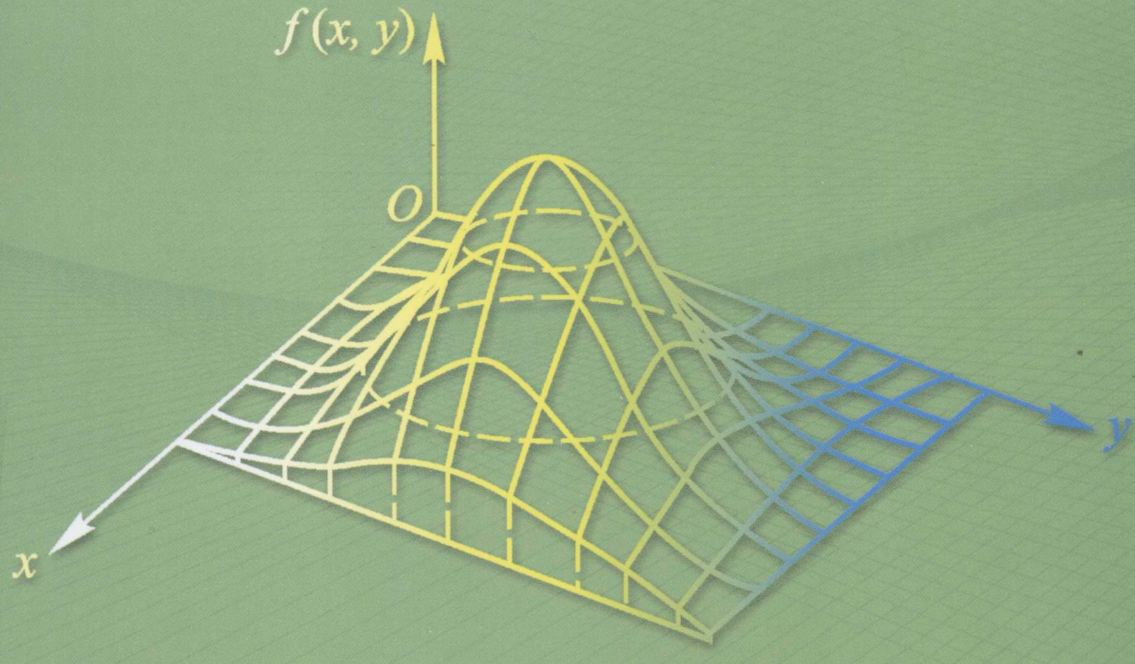
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

医药数理统计方法学习指导与习题解析

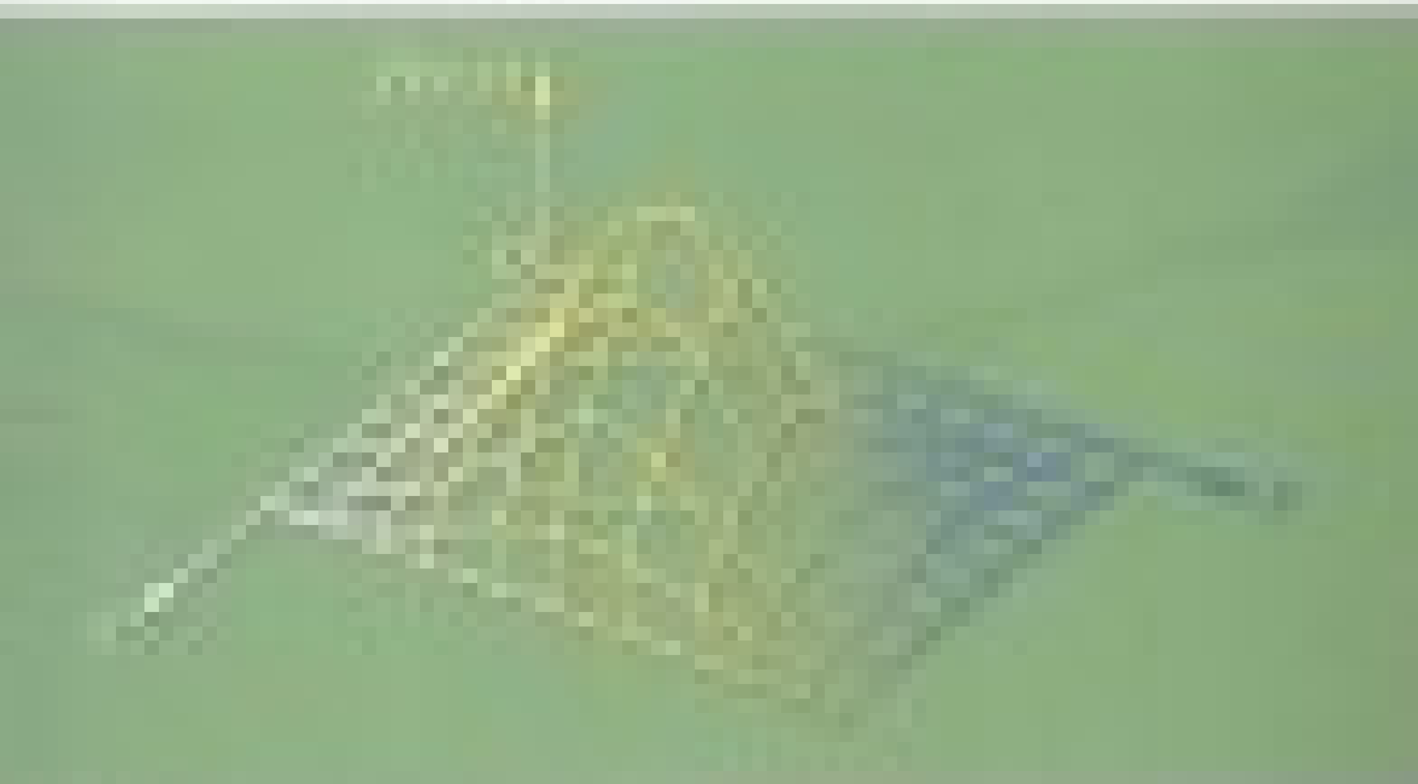
主编 祝国强

副主编 杭国明 杨 洁 滕海英



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

医药数理统计方法
学习指导与习题解析



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配

医药数理统计方法

学习指导与习题解析

Yiyao Shuli Tongji Fangfa
Xuexi Zhidao yu Xiti Jiexi

主　编　祝国强

副主编　杭国明　杨　洁　滕海英

编　者（按所编写的章节顺序排序）
杭国明　复旦大学
庄锦才　广东药学院
陈　琳　新疆医科大学
丁　勇　南京医科大学
杨　洁　北京中医药大学
郭东星　山西医科大学
罗明奎　第三军医大学
祝国强　第二军医大学
滕海英　第二军医大学

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是配合祝国强主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《医药数理统计方法（第二版）》而编写的辅导教材。全书包括随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，随机抽样及抽样分布，抽样估计，假设检验，方差分析，正交试验设计与分析，相关与回归分析等共九章。每章由内容提要、典型例题分析、配套教材习题全解三部分组成。该书完全与教材同步，书中选用的例题覆盖面广，题型多，有一定的典型性、针对性和启发性。在解题前后增加了解题提示和评注，指出了解题思路、值得注意的地方和易犯的错误，旨在帮助读者深入理解基本概念，提高解决较为复杂的综合性问题的能力。书末还备有概率及统计的测试卷和参考答案，可供读者自我测试。

本书可作为高等医药类院校数理统计课程的教学参考书，也可供学生复习参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

医药数理统计方法学习指导与习题解析／祝国强主编．—北京：高等教育出版社，2011.11

ISBN 978-7-04-033553-8

Ⅰ．①医…　Ⅱ．①祝…　Ⅲ．①数理统计－应用－医药学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①R311

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第217526号

策划编辑　张晓丽　　责任编辑　张晓丽　　封面设计　张　楠　　版式设计　杜微言
插图绘制　郝　林　　责任校对　陈旭颖　　责任印制　张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	中青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm × 1168mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.25	版　　次	2011年11月第1版
字　　数	400千字	印　　次	2011年11月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	24.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　33553－00

前　言

“数理统计”课程是高等医药类院校药学、生物技术、中药等专业开设的一门公共基础课程。为了帮助广大读者学好“数理统计”这门课程，扩大课堂教学的信息量，提高学生的解题能力，我们以祝国强主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《医药数理统计方法（第二版）》（该教材被评为2009年度普通高等教育精品教材）为框架，精心编写了这本具有工具书性质的《医药数理统计方法学习指导与习题解析》。本书按照原教材的章节顺序，分为随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，随机抽样及抽样分布，抽样估计，假设检验，方差分析，正交试验设计与分析，相关与回归分析等共九章。每章由三部分组成，即

一、内容提要　总结该章的基本概念、定理、公式等内容，便于读者抓住重点、要点，具有体系完整、逻辑性强的特点。

二、典型例题分析　从相关书籍中，精选了具有代表性、典型性、针对性的例题，配以解题提示和评注，并给出了详尽的分析和解析。例题内容覆盖全面，重点、难点突出，达到开阔视野、融会贯通、举一反三的目的。

三、配套教材习题全解　针对《医药数理统计方法（第二版）》教材中的所有习题，我们给出了详尽的解题过程，以方便读者对照和分析。

在书的最后给出了若干套概率及统计测试卷和参考答案，便于读者自我检测，以达到巩固和复习提高的效果。

本书旨在帮助读者迅速而全面地掌握“数理统计”课程的内容及教材中的重点和难点，达到事半功倍的学习效果。值得提醒的是：解题需要亲自动手，只有通过自身实践，才能逐步积累经验，提高水平。

本书可作为高等医药类院校“数理统计”课程的教学参考书，也可供学生复习参考使用。

第二军医大学黄平和刘沛两位老师参与了全书的整理、校对等工作，谨致谢忱。在编辑出版的过程中，还得到高等教育出版社的热情支持，在此一并致谢。

在编写过程中，本书借鉴了同行们的经验，在此深表谢意。限于编者的学识水平，书中不免有错误或不妥之处，恳请广大读者指正。

编　者

二〇一一年五月

目　录

第一章　随机事件及其概率

一、内容提要

1. 随机事件

(1) 随机试验

若一个试验满足下列条件：

① 试验可在相同条件下重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，并可事先明确知道试验的所有可能结果；

③ 在进行一次试验前不能确定哪一个结果会出现，

则称该试验为**随机试验**，简称为**试验**.

(2) 样本点与样本空间

随机试验中每一个可能出现的直接结果称为**样本点**或**基本事件**，用 e 表示. 随机试验的所有基本事件组成的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示.

(3) 随机事件

由样本空间中的若干个样本点组成的集合（即样本空间的一个子集）称为**随机事件**，简称为**事件**，常用大写英文字母 A, B, C 等表示.

在一次试验中，若随机事件 A 中的某一个样本点出现时，称随机事件 A **发生**.

特别地，在每次试验中一定发生的事件，称为**必然事件**，用 Ω 表示；在每次试验中一定不发生的事件，称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示.

(4) 事件间的关系和运算

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A（或称事件 A **包含于**事件 B），记为 $B \supset A$（或 $A \subset B$）.

若事件 B 包含事件 A，且事件 A 又包含事件 B，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

若事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $A - B$.

若事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**并**（或**和**），记为 $A \cup B$（或 $A + B$），它是由属于事件 A 或事件 B 的样本点组成的集合.

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**并**（或**和**），记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$（或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$）.

若事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**（或**积**），记为 $A \cap B$（或 AB），它是由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合.

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**交**（或**积**），记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$（或 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$）.

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互斥**（或**互不相容**）.

若事件 A 与事件 B 互斥，且在任何一次试验中二者必定有一个发生，即满足 $A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B **互逆**（或**相互对立**），且称事件 B 为事件 A 的**对立事件**（或**逆事件**），记为 $\overline{A}$，即 $B = \overline{A}$.

若一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且它们的和为必然事件，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为**互不相容完备事件组**，简称**完备事件组**（或称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间的一个**剖分**或**分割**）.

事件的运算法则

交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

德摩根原理（对偶原则）$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

德摩根原理还可以推广到有限多个事件间的场合

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

2. 频率和概率的定义

(1) 频率

若随机事件 A 在 n 次重复独立试验中出现了 m 次，则比值 $\dfrac{m}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{m}{n},$$

其中，m 称为**频数**.

一般地，频率随试验次数的变化而变化，然而，当试验次数足够多时，频率又将稳定地在某个常数附近摆动，此性质称为**频率的稳定性**.

(2) 概率的统计定义

设在相同的条件下，进行大量重复的独立试验，若事件 A 出现的频率稳定地在某一确定值 p 的附近摆动，则称此数值 p 为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A)$，即

$$P(A) = p.$$

(3) 概率的公理化定义

设 Ω 是一给定的样本空间，A 为其中的任意一个事件，规定一个实数，记作 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列三条公理：

① 非负性：$P(A) \geqslant 0$;

② 规范性：$P(\Omega) = 1$;

③ 可列可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，即 $A_iA_j = \varnothing \ (i \neq j)$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**.

(4) 概率的古典定义

设试验的样本空间只含有有限个样本点 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，每个样本点 $e_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 出现

的可能性相同，称此类试验的数学模型为**古典概型**.

在古典概型中，若事件 A 包含的样本点个数为 m，样本空间包含的样本点个数为 n，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

（5）概率的几何定义

设试验的样本空间 Ω 是一个几何区域（直线上的区间，平面或立体内的区域），每个试验结果出现的可能性是相同的（即试验结果落在样本空间 Ω 中的任一区域的可能性与该区域的几何测度成正比），称此类试验的数学模型为**几何概型**.

在几何概型中，事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}},$$

其中，几何测度可以是长度、面积或体积等.

3. 概率的基本运算法则

（1）狭义加法公式

若事件 A 与事件 B 互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

（2）$P(A)+P(\overline{A})=1$.

（3）若事件 A 与事件 B 满足 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

（4）广义加法公式

设 A 与 B 为任意两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

（5）三个事件的加法公式

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

4. 条件概率公式

设事件 B 发生的概率 $P(B)>0$，在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的**条件概率**记为 $P(A\mid B)$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

5. 概率的乘法公式

（1）对任意两个事件 A，B，成立

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\quad(\text{若 } P(B)>0),$$

或

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\quad(\text{若 } P(A)>0).$$

（2）对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，成立

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

6. 事件的独立性

（1）两个事件的独立性

对事件 A 与事件 B, 若有

$$P(B|A)=P(B),$$

则称事件 B **独立**于事件 A, 两个事件的独立性总是相互的.

(2) 事件 A 与事件 B 相互独立的充要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

(3) 四对事件 A,B; $\overline{A},B$; $A,\overline{B}$; $\overline{A},\overline{B}$ 只要有一对事件相互独立,则其余三对事件必定相互独立.

(4) n 个事件的独立性

对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 如果其中任意 k 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ ($i=1,2,\cdots,n$; $k=2,3,\cdots,n$) 满足关系式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**.

(5) 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,则成立

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

7. 全概率公式

设事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个完备事件组,且 $P(A_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 则对 Ω 中的任一事件 B, 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

8. 逆概率公式(或贝叶斯(Bayes)公式)

设事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个完备事件组,则对 Ω 中的任意事件 B $(P(B)>0)$, 有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

二、典型例题分析

例 1 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 在 1,2,3,4 四个数字中可重复地取两个数字;

(2) 记录一个有 n 个人的班级的一次数学测验的平均成绩.

解题提示 (1) 根据题意,按照一定规律写出样本空间中的所有样本点.

(2) 先考虑总成绩,再求平均成绩.

解 (1) 用 (i,j) 表示试验结果,其中 i 表示取出的第一个数字, j 表示取出的第二个数字 $(i,j=1,2,3,4)$. 样本空间为

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\end{matrix}\right\}.$$

(2) 班级数学测验的总分为

$$\{0,1,2,\cdots,100n-1,100n\},$$

故样本空间为

$$\Omega=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{100n-1}{n},100\right\}.$$

例 2 从一箱药品中每次取出一盒药品进行检验(每次取出的药品不放回),一共取三次,用 A_i 表示第 i 次 $(i=1,2,3)$ 取到合格品这一事件. 试用事件的运算符号表示下列事件:

(1) 三次都取到合格品;

(2) 三次中至少有一次取到合格品;

(3) 三次中恰有两次取到合格品;

(4) 三次中至少两次取到合格品;

(5) 三次中最多有一次取到合格品;

(6) 三次取到的都是不合格品.

解题提示 弄清事件之间的关系和运算.

解 (1) $A_1A_2A_3$;

(2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$ 或 $A_1\cup A_2\cup A_3$;

(3) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$;

(4) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$ 或 $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$;

(5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$;

(6) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

例 3 掷一颗骰子的试验,观察出现的点数. 用 A 表示出现的点数是奇数点,用 B 表示出现的点数小于 5,用 C 表示出现的点数是小于 5 的偶数点. 写出下列事件 A, B, C, $A-B$, $B-A$, $A-C$, AB, AC, $A\cup B$ 以及 $\overline{A}\cup B$ 包含的样本点.

解题提示 弄清事件所含的样本点.

解 由题意可知

$$A=\{1,3,5\},B=\{1,2,3,4\},C=\{2,4\},A-B=\{5\},B-A=\{2,4\},$$
$$A-C=\{1,3,5\},AB=\{1,3\},AC=\varnothing,A\cup B=\{1,2,3,4,5\},\overline{A}\cup B=\{1,2,3,4,6\}.$$

例 4 甲、乙两人向某一目标射击,用事件 A 表示甲击中目标,事件 B 表示乙击中目标,试叙述下列事件 $A\cup B$ 以及 $\overline{AB}$ 的含义.

解题提示 弄清事件之间的相互关系.

解 $A\cup B$ 表示甲、乙两人中至少有一个人击中目标,或者说甲、乙两人没有同时不击中目标.

$\overline{AB}$ 即为 $\overline{A}\cup\overline{B}$, 它表示甲、乙两人没有同时击中目标,或者说是甲、乙两人中至少有一个人没有击中目标.

例 5 为获得某地区男孩、女孩出生的概率,现对该地区最大的一个妇产科医院 6 年中出生的婴儿进行统计,6 年中出生的新生男孩共 16 146 人,新生女孩共 15 248 人,试计算该地区男孩、女孩出生的概率.

解题提示 先计算频率,再根据频率的稳定性估算概率.

解 设 A 表示出生的婴儿为男孩, B 表示出生的婴儿为女孩. 新生男、女孩共有 16 146 + 15 248 = 31 394 人,则

$$f_n(A)=\frac{16\ 146}{31\ 394}\approx 0.514\ 3,\quad f_n(B)=\frac{15\ 248}{31\ 394}\approx 0.485\ 7.$$

根据频率的稳定性,可将该地区男孩、女孩出生的频率近似代替该地区男孩、女孩出生的概率,所以该地区男孩、女孩出生的概率分别为 0.514 3 和 0.485 7.

例 6 将一枚均匀的硬币投掷三次,求正面出现两次的概率.

解题提示 写出样本空间及所求事件包含的样本点.

解 由题意,投掷一枚硬币有两种不同结果,投掷三枚硬币有 $2^3=8$ 种不同结果,故样本空间 $\Omega=\{$(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)$\}$,而所求事件 $A=\{$(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正)$\}$,所以有

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

例 7(随机取数问题) 从 0,1,2,…,9 十个数字中任意取一个数,设每个数都等可能地被取到.现做有放回地取数,共取五个数.求下列事件的概率:

(1) $A_1=\{$五个数全部不相同$\}$;

(2) $A_2=\{$不含 4 与 7$\}$;

(3) $A_3=\{$两个奇数三个偶数$\}$(将 0 看作偶数).

解题提示 利用排列组合计算出样本空间包含的样本点个数及有利事件包含的样本点个数.

解 (1) 本例的样本空间所含样本点数为 10^5. 五个数全部不相同,则第一次取数可在十个数字中任意取一个数,第二次取数可在余下的九个数字中任意取一个数,依此类推,共有 $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ 种情况.则有

$$P(A_1)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}=0.302\ 4.$$

(2) 不含 4 与 7,那么这五个数应从余下的八个数中取得,满足此条件的样本点个数为 8^5,则有

$$P(A_2)=\frac{8^5}{10^5}=0.327\ 7.$$

(3) 两个奇数的情况共有 5^2 种可能,因这两个奇数没有规定在哪两次中取得,所以取得两个奇数的可能情况共有 $C_5^2\cdot 5^2$ 种;其余的三个偶数有 5^3 种可能,则满足条件的事件数共有 $C_5^2\cdot 5^2\cdot 5^3$ 种,故所求事件的概率为

$$P(A_3)=\frac{C_5^2\cdot 5^2\cdot 5^3}{10^5}=0.312\ 5.$$

例 8(分房问题) 设有 n 个人,他们以同等的机会被分配到 N 间房间中($n\leqslant N$),试求事件 $A=\{$恰好 n 个人各住一间房间$\}$的概率.

解题提示 计算样本空间所含样本点个数时,应注意:任何人都可住任何一间房间.

解 因为每个人都可以在 N 间房间中任意挑选一间房间住,所以样本空间包含的样本点个数是 N^n. n 个人各住一间房间,即他们在 N 间房间中任选 n 间房间住,共有 C_N^n 种可能情况,而每种情况又有 $n!$ 种排列,即有利事件数为 $C_N^n\cdot n!$,故有

$$P(A)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n\cdot(N-n)!}.$$

例 9 袋中有 a 只黑球，b 只白球．无放回地随机摸球，求第 $k(1 \leqslant k \leqslant a+b)$ 次摸到黑球的概率．

解题提示 换位思考，从球被摸到的角度考虑该问题．或者放大样本空间，反而有利于概率的计算．

解法一 可以这样考虑，把 a 只黑球，b 只白球编号（将它们都作为不同的球），将球全部取出来，把摸出的球排列成一列，对应的就是试验的一个样本点，样本空间共有 $(a+b)!$ 个样本点．

用 A 表示第 k 次摸到黑球，A 事件包含的样本点的基本特征是：在第 k 个位置放的是黑球，共有 a 种可能；在其他 $a+b-1$ 个位置上的球可任意排列，其排列的种数为 $(a+b-1)!$，所以 A 事件包含的有利事件数为 $a \cdot (a+b-1)!$．故所求概率为

$$P(A)=\frac{a \cdot (a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

评注 通常，大家在思考该问题的时候，考虑的只是取出 k 个球，样本空间包含哪些样本点，第 k 次摸到黑球有多少种可能结果．而解法一一改常规，考虑的是将球全部取出来，这样一来将样本空间放大了，反而简化了问题的讨论．

解法二 下面换一种方式考虑该问题．简单地说，现在我们不要从摸球人的角度去考虑该问题，而是从球的角度去考虑该问题，即哪一个球在第 k 次可能被摸到．因为，第 k 次可能被摸到的球可以是 $a+b$ 只球中的任何一只，所以，样本空间包含的样本点个数有 $a+b$ 个，第 k 次取到的黑球可以是 a 只黑球中的任意一只，所以有利事件数为 a，故所求事件的概率为

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

评注 解法二的关键在于我们抓住了所求事件概率的本质特点（即第 k 次球被摸出来的各种可能性），而把无关紧要的因素（即第 k 次以外的球被摸出来的可能情况）都丢掉不去考虑，大大缩小了样本空间，从而避免了繁杂的排列组合的计算，简化了该问题的解决．

例 10 投掷两颗骰子，试求下列事件发生的概率：

（1）两颗骰子出现的点数和为偶数的概率是多少？

（2）两颗骰子出现的点数和小于 5 的概率是多少？

（3）两颗骰子出现的点数和为偶数或小于 5 的概率是多少？

解题提示 搞清复合事件和简单事件的关系，利用相应的概率公式去计算．

解 （1）设 $A=\{$出现点数和为偶数$\}$．对事件 A，两颗骰子都出现奇数的可能性有 $C_3^1 \cdot C_3^1=9$；同理，两颗骰子都出现偶数的可能性有 $C_3^1 \cdot C_3^1=9$，所以事件 A 包含的样本点数是 $2 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1=18$．又因为样本空间包含的样本点数为 $C_6^1 \cdot C_6^1=36$，所以两颗骰子出现的点数和为偶数的概率为

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

（2）设 $B=\{$出现点数和小于 5$\}$．因为事件 B 包含的样本点为 $(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(3,1)$，即事件 B 的有利事件数为 6，所以事件 B 发生的概率为

$$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

（3）设 $C=\{$出现点数和为偶数或小于 5$\}$．按照计算事件 C 的有利事件数来求事件 C 发生

的概率比较繁琐. 注意到事件 A, B, C 之间有关系: $C = A \cup B$, 又因为事件 AB 所含样本点为 $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, 即事件 AB 包含的样本点个数为 4,根据概率的加法公式,有

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{18}{36} + \frac{6}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{9}.$$

例 11 已知 12 件产品中有 2 件是次品,从中任意取 4 件,问其中至少有一件是次品的概率是多少?

解题提示 利用事件的和或对立事件求概率.

解法一 设 $A_i = \{$取出的产品中有 i 件是次品$\}$, $i = 0,1,2$, $A = \{$取出的产品中至少有一件次品$\}$. 样本空间所含样本点数是 C_{12}^4, 对事件 A_i, 取出的 4 件产品中有 i 件是次品可能结果有 C_2^i 种,4 件产品中剩余 $4-i$ 件合格品的取法有 C_{12-2}^{4-i} 种情况. 于是事件 A_i 的有利事件数为 $C_2^i \cdot C_{10}^{4-i}$, $i = 0,1,2$. 显然, $A = A_1 \cup A_2$, 且 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 故

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_{10}^3 + C_2^2 \cdot C_{10}^2}{C_{12}^4} = \frac{19}{33}.$$

解法二 根据对立事件公式求概率. 易知, $A_0 = \overline{A}$, 故

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{C_2^0 \cdot C_{10}^4}{C_{12}^4} = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}.$$

评注 在本例中,比较两种解题方法,显然解法二比解法一要好,因为计算 $P(\overline{A})$ 要比直接计算 $P(A)$ 简单许多. 当一个事件的概率直接计算比较困难或繁琐时,利用对立事件公式求概率是一种行之有效的办法.

例 12 有四封信,四个信封(地址全部不同),将四封信随意地塞入四个信封,每个信封塞入一封信,求至少有一封信塞对信封的概率.

解题提示 利用推广的概率加法公式计算.

解 许多学生在看到求"至少有一封……"的概率时,立即想到用对立事件公式求概率. 这种想法是不正确的,本例就不能这么做,而直接用加法公式计算更简单.

设 $A_i = \{$第 i 封信装到第 i 个信封$\}$, $i = 1,2,3,4$. 容易算得

$$P(A_i) = \frac{1}{4},\ i = 1,2,3,4;$$

$$P(A_iA_j) = \frac{1}{4 \cdot 3},\ i,j = 1,2,3,4\ (i \neq j);$$

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2},\ i,j,k = 1,2,3,4\ (i,j,k \text{ 全不相同});$$

$$P(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

所求概率

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant 4} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} P(A_iA_jA_k) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= 4 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{4 \cdot 3} + 4 \times \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

评注 如将本例推广到 n 封信和 n 个信封的情况时,这就是历史上著名的"匹配问题". 至少有一封信塞对信封的概率为 $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

例 13　将 a 只白球和 b 只 $(b \geqslant a)$ 黑球随机排成一列,问至少有两只白球放在一起的概率是多少?

解题提示　利用对立事件公式计算概率.

解　设事件 $A = \{$至少有两只白球放在一起$\}$,我们首先来计算 $\overline{A}$ 的概率. 将 a 只白球和 b 只黑球随机排成一列,共有 $(a+b)!$ 种排列法. $\overline{A}$ 表示没有两只白球放在一起,这可理解为先将 b 只黑球随机排成一列,共有 $b!$ 种排列法,随后再将 a 只白球依次逐个地放在最前、任意两只黑球之间以及最后这些位置上,共有 $b+1$ 个不同位置,每个位置上最多只能放一只白球,所以白球的放法共有 $\mathrm{C}_{b+1}^{a} \cdot a!$ 种,故 $\overline{A}$ 的有利事件数为 $b! \cdot \mathrm{C}_{b+1}^{a} \cdot a!$. 因此,$\overline{A}$ 事件的概率为

$$P(\overline{A}) = \frac{b! \cdot \mathrm{C}_{b+1}^{a} \cdot a!}{(a+b)!},$$

则

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{b! \cdot \mathrm{C}_{b+1}^{a} \cdot a!}{(a+b)!} = 1 - \frac{b!(b+1)!}{(a+b)!(b-a+1)!}.$$

例 14　甲、乙两人约定中午 12 点至下午 1 点在某公园门口会面. 讲好先到者等 20 分钟后才能离去,假设两人等可能地在中午 12 点至下午 1 点之间的任意一个时刻到达约会地点. 问两人能会面的概率是多少?

解题提示　将两人到达约会地点的时间看成是直角坐标系上的一点. 在直角坐标系上画出样本空间和事件所在区域,用区域面积计算概率.

解　设事件 $A = \{$两人能会面$\}$, x, y 分别代表甲、乙两人到达约会地点的时间(中午 12 点记为 0,下午 1 点记为 1),则 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. 满足上述要求的点 (x,y) 构成了一个边长为 1 的正方形. 两人能会面的充分必要条件是 $|x-y| \leqslant \frac{1}{3}$, 即在两直线 $x-y=\frac{1}{3}$ 和 $x-y=-\frac{1}{3}$ 之间的区域,如图 1.1 所示. 由几何概率的定义知,两人能会面的概率为

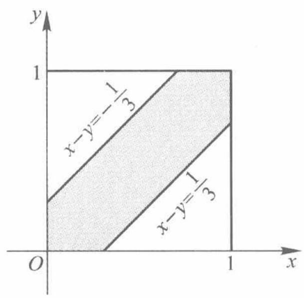


图 1.1

$$P(A) = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1^2} = \frac{5}{9}.$$

例 15　已知一批药品共有 100 箱,其中有 10 箱不合格,10 箱不合格品中有 6 箱是等外品,4 箱是次品. 现从 100 箱药品中任取一箱,已知取到的是不合格品,求它是次品的概率.

解题提示　缩小样本空间或用条件概率公式计算.

解　设 $A = \{$取到的是次品$\}$, $B = \{$取到的是不合格品$\}$.

所求事件的概率实际上就是求在事件 B 出现的条件下,事件 A 发生的条件概率 $P(A|B)$,即

$$P(A|B) = \frac{\text{在 } B \text{ 发生的前提下 } A \text{ 包含的基本事件数}}{B \text{ 包含的基本事件数}} = \frac{\text{次品数}}{\text{不合格品数}} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

或者用条件概率公式 $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 来计算,即

$$P(AB) = \frac{\text{不合格品中的次品数}}{\text{总产品数}} = \frac{4}{100}, P(B) = \frac{\text{不合格品数}}{\text{总产品数}} = \frac{10}{100},$$

于是

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4/100}{10/100} = 0.4.$$

例 16 袋中有 7 只白球和 3 只红球,从中无放回地任取 2 只球,试求:

(1) 取到的 2 只球都是白球的概率;

(2) 只取到 1 只白球的概率;

(3) 第一次取到白球的概率;

(4) 第二次取到白球的概率.

解题提示 用概率的乘法公式和加法公式计算.

解 (1) 设 $A = \{$取到的 2 只球都是白球$\}$, $A_i = \{$第 i 次取到白球$\}$, $i = 1,2$, 则有

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}.$$

(2) 设 $B = \{$只取到 1 只白球$\}$,显然有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2} \mid A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1}) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

(3) 第一次取到白球的事件即为 A_1, 有

$$P(A_1) = \frac{7}{10}.$$

(4) 显然第二次取到白球的事件即为 A_2, 又 $A_2 = A_1A_2 \cup \overline{A_1}A_2$, 所以

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1A_2 \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1}) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

评注 由本例(3)、(4)可知: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{7}{10}$, 即无论抽球的前后顺序如何,抽到白球的概率都是相等的. 我们把此结论应用到抽签问题当中去,说明我们平时用抽签的方法来确定谁中签是一种公平的方法.

例 17 甲、乙两人同时独立地破译密码,甲译出密码的概率为 0.8,乙译出密码的概率为 0.6,求密码被破译的概率.

解题提示 利用事件的独立性.

解法一 设 $A = \{$甲破译密码$\}$, $B = \{$乙破译密码$\}$. 由题意,这两个事件相互独立. 当这两个事件只要有一个事件发生时,密码就被破译,于是所求事件的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6 = 0.92. \end{aligned}$$

解法二 四对事件 A,B; $\overline{A},B$; $A,\overline{B}$; $\overline{A},\overline{B}$ 只要有一对事件相互独立,其余三对事件必定相互独立. 利用这一性质,得 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$. 故

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) \\ &= 1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.6) = 0.92. \end{aligned}$$

例 18 投掷两枚质量均匀的硬币,设 $A=\{$第一枚硬币出现正面$\}$, $B=\{$第二枚硬币出现反面$\}$, $C=\{$两枚硬币同为正面或同为反面$\}$,试判断 A,B,C 三事件的两两独立性和相互独立性.

解题提示 注意事件间两两独立和相互独立的区别.

解 因为 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, 且 $P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, 所以

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P(AC)=P(A)P(C\mid A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P(BC)=P(B)P(C\mid B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

即

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(A)P(B)=P(A)P(C)=P(B)P(C)=\frac{1}{4}.$$

故 A,B,C 三事件两两独立. 又

$$P(ABC)=P(\varnothing)=0.$$

所以,由事件独立性的定义知, A,B,C 三事件不相互独立.

例 19 有朋友自远方来,他乘火车、船、汽车、飞机的概率分别为 0.3、0.2、0.1、0.4,如果他乘火车、船、汽车来的话,迟到的概率分别为 0.2、0.25、0.3,而他乘飞机来的话,就不会迟到. 求:

(1) 该朋友迟到的概率;

(2) 如果该朋友迟到了,那么他最有可能乘坐的是哪种交通工具?

解题提示 (1) 利用全概率公式计算.

(2) 利用贝叶斯公式计算.

解 设 A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示乘火车、船、汽车、飞机,事件 B 表示朋友来时会迟到. 由题意知

$$P(A_1)=0.3, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.1, P(A_4)=0.4,$$
$$P(B\mid A_1)=0.2, P(B\mid A_2)=0.25, P(B\mid A_3)=0.3, P(B\mid A_4)=0.$$

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)+P(A_4)P(B\mid A_4)\\&=0.3\times0.2+0.2\times0.25+0.1\times0.3+0.4\times0=0.14.\end{aligned}$$

(2) 只要算出概率值 $P(A_i\mid B)$, $i=1,2,3,4$, 即可. 由贝叶斯公式可得

$$\begin{aligned}P(A_1\mid B)&=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)+P(A_4)P(B\mid A_4)}\\&=\frac{0.06}{0.14}=0.428\,6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_2\mid B)&=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)+P(A_4)P(B\mid A_4)}\\&=\frac{0.05}{0.14}=0.357\,1,\end{aligned}$$