龙门品牌 学子至爱

龍門書局 1930-2010

名誉主编 雷洁琼
丛书主编 希 扬

升级版
三点一测

当选“改革开放30年最具影响力的300本书”

优秀畅销书奖

九年级数学

北京师大版

分册主编 许细元

重点难点提示
知识点全解
综合应用检测

上

科学出版社 龍門書局

☆ 与北京师大版最新教材同步 ☆

升级版

三点一测

九年级数学(上)

分册主编：许细元

科学出版社 龍門書局

北 京

举报电话:010－64030229;010－64034315;13501151303
邮购电话:010－64034160

图书在版编目(CIP)数据

三点一测. 九年级数学. 上:北京师大版课标本/希扬丛书主编;许细元分册主编. —修订版. —北京:科学出版社 龙门书局,2009
ISBN 978-7-80191-694-5

Ⅰ. 三…　Ⅱ. ①希…②许…　Ⅲ. 数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 045236 号

责任编辑:李妙茶　王黛君　王丽红/封面设计:嘉华永盛

科学出版社
龍門書局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
www.longmenbooks.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2004 年 7 月第　一　版　开本:A5(890×1240)
2010 年 4 月第六次修订版　印张:10 1/2
2010 年 6 月第十四次印刷　字数:363 000

定　价: 20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

编者的话

亲爱的同学们，在日常的学习中，你是否碰到过这样的情形：

课堂上用心听讲的你，因为小小的走神忽略了老师一句重要的讲解；

尽管听清了老师的每一句话，但是仍有不能理解的地方，却又不好意思上前询问；

明明全都听明白了，也把公式全都记住了，可是解题的时候却突然不知道该用什么、怎么用了；

…………

别担心，《三点一测》来了，她将为你排忧解难！

翻开这本书：

就可以找到详细的知识点讲解，弥补你的漏听错解；

就可以找到每个知识点需要注意的地方和易错点的提醒，帮助你深入理解所学；

就可以找到与知识点相对应的各种形式的例题，基础的、综合的、探究的，让解题更加有法可循；

还可以找到各地名师为你精选出来的习题，进一步巩固所学，让你在各种检测中得心应手。

《三点一测》丛书自面世以来，历经十三个春秋，无数次荣登全国各地图书销售排行榜榜首，累计销量突破三百万套。当年使用过《三点一测》的学子们，现在很多已经成为硕士、博士，是国家的栋梁之材。

如今，《三点一测》丛书的编者们积十三年青少年教育辅导之底蕴，本着"教育为振兴中华之本"的精神，潜心研究青少年学习所需，倾力推出了**升级版《三点一测》**。

升级版《三点一测》充分体现了**探究式学习理念**，同时力求在教辅书中体现**工具书的性质**：随用随查——解决你对课堂所学存有的疑问。

升级版《三点一测》体现了**金字塔式学法策略**，即"夯实基础＋掌握技巧＋拓展能力"，将所需要掌握的知识，系统地、完整地呈现在你的眼前。

升级版《三点一测》的**全新版式**，带给你层次分明的版式设计，重点突出的内容讲解——阅读也可以很舒适。

亲爱的同学们，学习的过程虽然是一个艰苦的过程，但对自己未知领域的探索永远充满着极大的诱惑力和无限的乐趣。《三点一测》愿做你攀登知识高峰的阶梯，遨游无垠学海的龙舟，给你的学习以最大的智力支持！

"宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来"，希望同学们通过自身的努力，不断奋进，取得成功！

成功路上，《三点一测》伴你同行！

听力录音免费下载办法：登陆 www.longmenbooks.com，弹出界面后，点击"下载中心"，即可找到相关下载。

在使用本书的过程中如有什么疑问或本书有遗漏，请与 sdhlw452@163.com 联系，我们将为你答疑解惑。

编　者

编委会

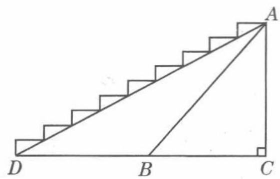
目录

CONTENTS

第一章　证明(二)

本章综述

近些年,随着人们安全意识的不断加强,青岛某商场发现原有楼梯坡度较陡,存在安全隐患,现准备改善原有楼梯的安全性能.楼梯原长 $AB=6$ 米,原倾斜角为 $45°$,计划降低坡度,调整后使楼梯的倾斜角减少 $15°$,并绘制了楼梯截面的效果图.



针对施工方案,商场经理提出了两个问题:(1)调整后的楼梯,会多占多长一段地面?(2)商场计划在调整后的楼梯上(自 A 至 D)铺设宽 1.5 米,价格为80 元/平方米的迎宾地毯,购买地毯的费用大约需要多少呢? 同学们,你能帮助商场经理解决这两个问题吗?

课程标准要求

1.经历探索、猜测、证明的过程,进一步体会证明的必要性,发展同学们初步的演绎推理能力.

2.进一步掌握综合法的证明方法,结合实例体会反证法的含义.

3.了解作为证明的几条公理的内容,能够证明与三角形、线段垂直平分线、角平分线等有关性质定理及判定定理.

4.结合具体例子了解逆命题的概念,会识别两个互逆命题,并知道原命题成立其逆命题不一定成立.

5.能够利用尺规作已知线段的垂直平分线和已知角的平分线;已知底边及底边上的高,能用尺规作出等腰三角形.

快乐导学——新知预览

三个概念	反证法、互逆命题、互逆定理
四个公理	SSS,SAS,ASA,全等三角形的性质
十五个定理	等腰三角形的性质定理与判定定理,等边三角形的性质定理与判定定理,直角三角形的性质与判定定理,直角三角形全等的判定定理,线段垂直平分线的性质定理与逆定理,角平分线的性质定理与逆定理
二个推论	AAS;三线合一
三种方法	综合法、反证法、数形结合法

1.1 你能证明它们吗

学习目标导航

◆ **重点** 掌握并运用全等三角形的判定和性质定理,等腰三角形(含等边三角形)的判定定理和性质定理进行有关的证明和计算.

◆ **难点** 通过发现和构造全等三角形进行相关证明,运用等腰三角形的判定及性质定理进行有关的证明.

重点难点透视

教材知识点全解

详解点一 三角形全等的有关公理与推论

公理 1:三边对应相等的两个三角形全等.(SSS)

公理 2:两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.(SAS)

公理 3:两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.(ASA)

公理 4:全等三角形的对应边相等、对应角相等.

推论:两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.(AAS)

难点突破

(1)三个公理中的"对应"二字是指两个三角形中具体的边、角相等关系,不可漏掉.在寻找三角形对应边、对应角时可以借鉴以下方法:

①两个三角形的最长边、最短边分别为对应边;②两个三角形的公共边为对应边;③两个三角形的最大角、最小角分别为对应角;④两个三角形的公共角为对应角;⑤两个三角形的对应边所对的角分别为对应角,对应角所对的边为对应边.

(2)在"SAS"公理中的角一定是两边的夹角,不能理解为两边及一角对应相等的两个三角形全等,"SAS"公理中的两角及其夹边也是如此.

(3)"SSS"、"SAS"、"ASA"、"AAS"是判定三角形全等的条件,但符合三组量对应相等的不一定都能作为三角形全等的条件,例如"AAA"、"SSA".各组条件中至少有一个是边相等的条件.

【例 1】 如图 1-1-1,$\angle BAC = \angle ABD$,请你添加一个条件:________,使 $OC = OD$(只添一个即可).

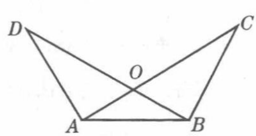


图 1-1-1

分析 根据三角形全等的性质及判定方法进行判断,要 $OC=OD$,则需$\triangle ABC \cong \triangle BAD$,$\because \angle BAC=\angle ABD$,

又 $AB=BA$（公共边），所以用 AAS 可得是 $\angle C=\angle D$，用 ASA 可得是 $\angle ABC=\angle BAD$ 或 $\angle OAD=\angle OBC$，用 SAS 可得是 $AC=BD$.

答案 $\angle C=\angle D$（或 $\angle ABC=\angle BAD$ 或 $\angle OAD=\angle OBC$ 或 $AC=BD$）.

点评 利用公共边是关键，同时注意边、角的对应关系，避免出现“AAA”、“SSA”.

详解点二 等腰三角形(含等边三角形)的性质

定理：等腰三角形的两个底角相等（简述为等边对等角）.

推论：等腰三角形的顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合（简述为“三线合一”）.

推论：等边三角形三个角都相等，并且每个角都等于 60°.

难点突破

(1)“等边对等角”的两个角必须在同一个三角形中.

(2)“三线合一”是等腰三角形才具有的性质，一般三角形不具有这个性质.“三线”中只要有“一线”成立，其余两线都成立.

(3)等腰三角形中的相等的线段：①等腰三角形两底角的平分线相等；②等腰三角形两腰上的中线相等；③等腰三角形两腰上的高相等；④过底边的端点且与底边夹角相等的两线段相等；⑤两腰上距顶点等距的两点与底边顶点的连线段相等.

【例2】 如图 1-1-2，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上，且 $BD=AD$，$DC=AC$，求$\angle B$ 的度数.

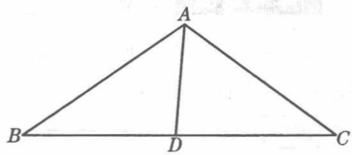


图 1-1-2

分析 题中有三对边相等，可用等边对等角，然后假设$\angle B$ 为 x°，结合三角形内角和定理，用方程思想解决.

解 $\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle C$（等边对等角）

同理得$\angle B=\angle BAD$，$\angle CAD=\angle CDA$

设$\angle B$ 为 x°，则$\angle C=\angle BAD=x^\circ$.

$\therefore \angle CAD=\angle CDA=2x^\circ$.

在$\triangle ADC$ 中，$\because \angle C+\angle CDA+\angle CAD=180^\circ$，

$\therefore x+2x+2x=180$，$\therefore x=36$.

$\therefore \angle B=36^\circ$.

点评 先利用等边对等角找出各相等的角，再用方程思想解决，这样可使几何的计算问题化繁为简.

详解点三 等腰三角形的判定

定理：有两个角相等的三角形是等腰三角形（等角对等边）.

定义：有两边相等的三角形叫做等腰三角形.

说明 只有在同一个三角形中,才有"等角对等边".

【例 3】 如图 1-1-3,$DE/\!/BC$,$CG=GB$,$\angle 1=\angle 2$.求证:$\triangle DGE$ 是等腰三角形.

分析 要证$\triangle DGE$是等腰三角形,可证$\triangle DGE$的两条边DG、GE相等,进而转化为证$\triangle DBG$与$\triangle ECG$全等,由$\angle 1=\angle 2$得$AD=AE$,再由$DE/\!/BC$得$\angle B=\angle C$,可得$AB=AC$,从而得$DB=EC$,可得两个三角形全等的条件.

证明 $\because \angle 1=\angle 2$,$\therefore AD=AE$

又$\because DE/\!/BC$,

$\therefore \angle 1=\angle B$,$\angle 2=\angle C$,$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore AB=AC$,$\therefore AB-AD=AC-AE$,即$DB=EC$.

$\therefore$在$\triangle DBG$和$\triangle ECG$中,

$$\begin{cases} DB=EC \\ \angle B=\angle C \\ BG=CG \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBG\cong\triangle ECG$(SAS)

$\therefore DG=GE$,$\therefore \triangle DGE$是等腰三角形.

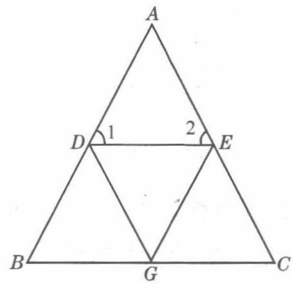


图 1-1-3

点评 本题较易产生想用等角对等边的方法证明,但此题等角对等边的条件难得到.应注意用定义证明.在证明中确定思路的方向很重要.

详解点四 反证法

定义:在证明时,先假设命题的结论不成立,然后推导出与定义,公理、已证定理或已知条件相矛盾的结果,从而证明命题的结论一定成立,这种证明方法称为反证法.

重点详解

(1)用反证法证题的一般步骤:

①假设:先假设命题的结论不成立.

②从这个假设出发,应用正确的推论方法,得出与定义、公理、已证定理或已知条件相矛盾的结果.

③由矛盾的结果判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

(2)有时原命题的反面不止一种情况,这时要一一列举出来.

(3)"推理"必须顺着假设的思路进行,即把假设当作已知条件,"得出矛盾"是指推出与公理、定理、定义或已知条件相矛盾.

【例 4】 用反证法证明:一个三角形中不能有两个角是直角.

分析 先写出已知、求证,再按反证法证明命题的步骤进行证明,首先要假定结论"$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中不能有两个角是直角"不成立,即它的反面"$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中有两个角是直角"成立,然后,从这个假定出发推下去,找出矛盾.

已知:$\triangle ABC$.

求证:$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中不能有两个角是直角.

证明 假设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中有两个角是直角,不妨设$\angle A=\angle B=90°$,则

$\angle A+\angle B+\angle C=90^\circ+90^\circ+\angle C>180^\circ$.

这与三角形内角和定理矛盾，$\angle A=\angle B=90^\circ$不成立.

所以一个三角形中不能有两个角是直角.

点评 由假设去推出矛盾是关键，而不是由其他条件推出矛盾.

详解点五 等边三角形的判定

定理：有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

重点详解

(1)用这个判定定理时是先判定三角形是等腰三角形，再证明它有一个角是60°.

(2)其他方法：①定义：三边都相等的三角形是等边三角形. ②定理：三个角都相等的三角形是等边三角形.

【例5】 如图1-1-4，已知$\triangle ABC$和$\triangle BDE$都是等边三角形，求证：$AE=CD$.

分析 要证$AE=CD$，可考虑证$\triangle ABE\cong\triangle CBD$，由已知的$\triangle ABC$和$\triangle BDE$都是等边三角形可得$AB=BC$，$\angle ABE=60^\circ$，$BE=BD$，$\angle DBE=60^\circ$，得$\angle ABE=\angle DBE$，故可用SAS证得.

证明 $\because\triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AB=BC$，$\angle ABE=60^\circ$

又$\because\triangle BDE$是等边三角形，

$\therefore BE=BD$，$\angle DBE=60^\circ$，

$\therefore\angle ABE=\angle DBE$

$\therefore$在$\triangle ABE$和$\triangle CBD$中，$\begin{cases}AB=CB\\ \angle ABE=\angle DBE\\ BE=BD\end{cases}$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle CBD$(SAS)，$\therefore AE=CD$

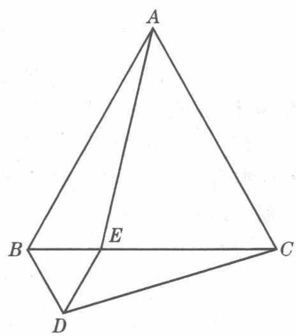


图1-1-4

点评 本题的关键在于判断AE与CD落在哪个三角形中，确立全等的方向，再寻找相应的条件，从而解决问题.

详解点六 有一个角是30°的直角三角形的性质

定理：在直角三角形中，如果有一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

说明 (1)本定理的前提条件是在直角三角形中，不是直角三角形不能用这个定理.

(2)这个定理主要用于计算线段的长度或证明一条线段长是另一条线段长的一半或两倍.

【例6】 如图1-1-5，在$Rt\triangle ABC$中，AD是$\angle CAB$的平分线，$DM\perp AB$于点M，且$AM=MB$. 求证：$CD=\frac{1}{2}DB$.

分析 由题意，易得$AD=BD$，故只要证$CD=\frac{1}{2}AD$，因此在$Rt\triangle ACD$中，只要证$\angle 1=30°$即可.

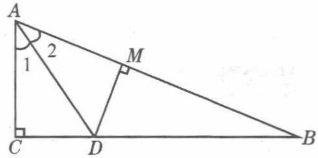


图 1-1-5

证明 $\because DM\perp AB$，$\therefore \angle DMA=\angle DMB$，

在$\triangle DMA$与$\triangle DMB$中，

$\because AM=MB$，$\angle DMA=\angle DMB$，$DM=DM$，

$\therefore \triangle DMA\cong\triangle DMB$(SAS)

$\therefore DA=DB$，$\angle B=\angle 2$.

$\because AD$平分$\angle CAB$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle B$.

$\because \triangle ABC$是直角三角形，$\angle C=90°$，$\therefore \angle CAB+\angle B=90°$，即$\angle 1+\angle 2+\angle B=90°$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle B=30°$.

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD$，$\therefore CD=\frac{1}{2}DB$.

点评 求线段的长度或证一条线段是另一条线段的一半或两倍，常用到含30°角的直角三角形的性质定理.

方法规律聚焦

类型一 全等三角形判定和性质的应用

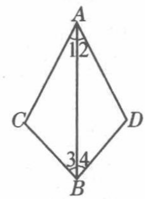


图 1-1-6

【例 7】 如图 1-1-6，要判定$\triangle ABC\cong\triangle ABD$，已具备$AB=AB$，还需增加什么条件，并说明用哪一种判定方法.

分析 判定两个三角形全等需要三个条件，根据已知条件$AB=AB$，还需增加两个适当的条件，此题有多种添加方法.

解 增加：(1)$AC=AD$，$\angle 1=\angle 2$(SAS)

(2)$BC=BD$，$\angle 3=\angle 4$(SAS)

(3)$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$(ASA)

(4)$\angle C=\angle D$，$\angle 1=\angle 2$(AAS)

(5)$\angle C=\angle D$，$\angle 3=\angle 4$(AAS)

(6)$AC=AD$，$BC=BD$(SSS)

启示 AAA和SSA不能判定两个三角形全等.

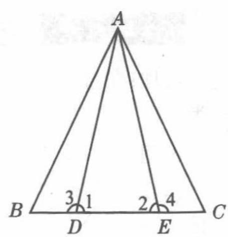


图 1-1-7

【例 8】 如图 1-1-7，已知$AB=AC$，$AD=AE$，求证：$BD=CE$. 小强的证明过程如下：

$\because AB=AC$(已知)，$\therefore \angle B=\angle C$(等边对等角).

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中

$\begin{cases}AB=AC\\ \angle B=\angle C\\ AD=AE\end{cases}$ $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS)，$\therefore BD=CE$.

你认为小强的证明正确吗？如果不正确，请进行纠正.

分析 BD与CE这两条线段分别位于两个三角形中，证明这两条线段相等的基本

思路是证明$\triangle ABD$和$\triangle ACE$全等，而判定三角形全等需要三个条件. 本题已知两个条件($AB=AC$和$AD=AE$)，需再得到一个条件. 小强得到的条件为$\angle B=\angle C$. 虽构成了三个条件，却是SSA——不成立的.

解 小强的证明是不正确的. 正确证明如下：

$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because AD=AE$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 3=\angle 4$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中

$$\begin{cases}\angle B=\angle C\\ \angle 3=\angle 4\\ AD=AE\end{cases} \quad \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE(\text{AAS})，\therefore BD=CE.$$

启示 证明两条线段相等或两个角相等时，如果这两条线段或这两个角分别位于两个三角形中，可考虑证明三角形全等.

归纳 a. 三角形全等的判定定理包括四个：SAS、ASA、SSS、AAS，但SSA和AAA是不成立的，不能用啊！

b. 要证明两条线段相等或两个角相等，常可借助证明两个三角形全等来实现. 这要求我们要善于寻找这样的一对三角形：它们既包含了要证明的相等线段或角，又便于利用图形及已知条件和有关定理、公理等来证明它们全等.

c. 证明三角形全等需要找足三个条件，证明过程要注意规范性，不能缺少条件.

类型二 等腰三角形性质定理和判定定理的应用

【例9】 如图1-1-8，$AB=AE$，$\angle ABC=\angle AED$，$BC=ED$，F为CD的中点.

(1)求证：$AF\perp CD$.

(2)在你连接BE后，还能得到什么新的结论？(请写三个，不证明)

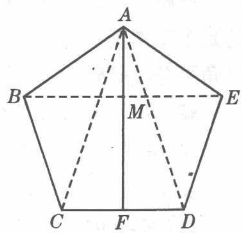


图1-1-8

分析 (1)连接AC、AD，要证$AF\perp CD$，已有F是CD的中点，由等腰三角形三线合一定理可知，只需要证$AC=AD$，而这可由证$\triangle ABC\cong\triangle AED$来得到. (2)可利用等腰三角形性质得到.

(1)**证明** 连接AC、AD

在$\triangle ABC$和$\triangle AED$中

$$\begin{cases}AB=AE\\ \angle ABC=\angle AED\\ BC=ED\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED(\text{SAS})$，

$\therefore AC=AD$.

$\because F$是CD的中点，

∴$AF\perp CD$(等腰三角形三线合一).

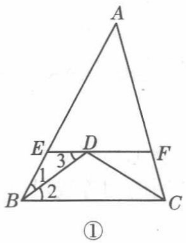
(2)可得如下结论:$AM\perp BE$、$BM=EM$、$\angle ABM=\angle AEM$.

启示 等腰三角形三线合一定理是证明垂直、两线段相等、两角相等的重要方法,其核心内容在于知一线得两线,要有意识的加以应用.

【例 10】 已知:如图 1-1-9①,D 是$\angle ABC$ 的角平分线和$\angle ACB$ 的角平分线的交点,过点 D 作 $EF\parallel BC$,交 AB 于 E,交 AC 于 F.

(1)请你确定 EF、BE、CF 三者之间的关系,并加以证明.

(2)如图 1-1-9②,当点 D 为$\angle ABC$ 的角平分线和与$\angle ACB$ 的邻补角角平分线的交点时,EF、BE、CF 三条线段还满足上面的关系吗?若满足,直接写出关系式;若不满足,请写出新的关系式并加以证明.



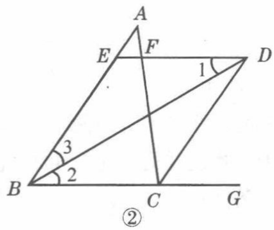


图 1-1-9

分析 (1)图形中既有平行又有角平分线,可以通过角之间的代换出现等腰三角形,这是个基本图形.(2)变式与(1)间的不同在于 D、E、F 三点的位置,这是由 CD 为$\triangle ABC$ 外角平分线导致的,但这不影响平行线和角平分线得出的角之间的关系.

解 (1)$EF=BE+CF$

∵$EF\parallel BC$,∴$\angle 2=\angle 3$,

又∵$\angle 1=\angle 2$,∴$\angle 1=\angle 3$.

∴$BE=DE$.

同理可证:$CF=DF$.

∴$BE+CF=DE+DF$.

即 $EF=BE+CF$.

(2)$EF=BE-CF$

∵$ED\parallel BC$,∴$\angle 1=\angle 2$.

∵$\angle 2=\angle 3$,∴$\angle 1=\angle 3$.

∴$BE=DE$.

同理可证:$CF=DF$.

∴$DE-DF=BE-CF$,即 $EF=BE-CF$.

启示 过一个角的平分线上的一点作一边的平行线与另一边相交,所构成的三角形是等腰三角形,这是一个常见的基本图形.

【例 11】 如图 1-1-10 所示，将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠一次，你认为图中重合的部分是什么图形？

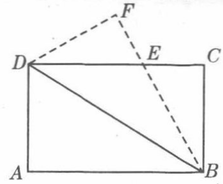


图 1-1-10

分析 因为虚线部分是$\triangle DAB$ 折叠上去的，所以$\angle DBA=\angle FBD$，相当于 BD 平分$\angle EBA$，而 DE 又平行于 AB，与上题类似，所以$\triangle DEB$ 将是等腰三角形.

证明 ∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴$AB/\!/CD$，∴$\angle CDB=\angle DBA$.

又$\triangle DAB\cong\triangle DFB$，∴$\angle DBA=\angle FBD$，

∴$\angle CDB=\angle EBD$.

∴$DE=BE$，即$\triangle DEB$ 是等腰三角形.

归纳 一个图形中既有平行又有角平分线，则图中可能会出现等腰三角形，记住这个基本图形的组合.

【例 12】 如图 1-1-11，在$\triangle ABC$ 中，D 为 AC 边上一点，$DE\perp AB$ 于 E，ED 延长后交 BC 的延长线于 F. 求证：

(1)若 $CD=CF$，则$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2)若 $CD=CF$，且$\angle F=30°$，则$\triangle ABC$ 为等边三角形.

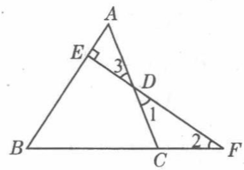


图 1-1-11

分析 (1)题目中 $DE\perp AB$ 与 $CD=CF$ 这两个条件均可得到与角有关的结论. 可试图在$\triangle ABC$ 中通过角相等去证明边相等；(2)在等腰$\triangle ABC$ 的结论上去证明$\triangle ABC$ 为等边三角形只需得到一个角是 60°这一条件.

证明 (1)∵$CD=CF$，∴$\angle 1=\angle 2$.

∵$\angle 1=\angle 3$，∴$\angle 2=\angle 3$.

又∵$DE\perp AB$，

∴$\angle 3+\angle A=90°$，$\angle 2+\angle B=90°$.

∴$\angle A=\angle B$.

∴$AC=BC$，即$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2)∵$DE\perp AB$，$\angle F=30°$，

∴$\angle B=60°$.

又∵$\triangle ABC$ 为等腰三角形，

∴$\triangle ABC$ 为等边三角形.

启示 在一个三角形中证明两条线段相等或两个角相等，经常利用“等角对等边”和“等边对等角”这一对互逆定理联合作战.

【例 13】 已知：如图 1-1-12，C 为线段 AE 上的任意一点，在 AE 的同一侧作等边$\triangle ABC$ 及等边$\triangle CDE$，且线段 AD、BE 的中点分别为 M、N，求证：$\triangle CMN$ 为等边三角形.

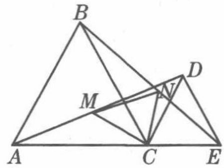


图 1-1-12

分析 本题可利用"SAS",证明$\triangle ACD\cong\triangle BCE$、$\triangle ACM\cong\triangle BCN$,得出对应的边相等,即$CM=CN$,再证$\angle MCN=60^\circ$,从而解决问题.

证明 $\because\triangle ABC$和$\triangle CDE$都是等边三角形,

$\therefore AC=BC,CD=CE,\angle ACB=\angle DCE=60^\circ$.

$\therefore\angle BCE=\angle ACD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

在$\triangle ACD$和$\triangle BCE$中,

$$\begin{cases}AC=BC\\\angle ACD=\angle BCE\\CD=CE\end{cases}$$

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle BCE$, $\therefore\angle CAD=\angle CBE,AD=BE$.

$\because M$、N分别是AD、BE的中点,$\therefore AM=BN$.

在$\triangle ACM$和$\triangle BCN$中,

$$\begin{cases}AM=BN\\\angle CAD=\angle CBE\\AC=BC\end{cases}$$

$\therefore\triangle ACM\cong\triangle BCN$, $\therefore CM=CN$, $\angle ACM=\angle BCN$.

又$\because\angle ACM+\angle MCB=60^\circ$

$\therefore\angle MCB+\angle BCN=60^\circ$,即$\angle MCN=60^\circ$.

$\therefore\triangle MCN$是等边三角形.

启示 证明一个三角形是等边三角形有三种方法:①证三条边相等;②证三个角相等;③证等腰三角形有一个角等于60°. 其中方法③的应用最为广泛.

归纳 a. 在一个三角形中证明两条线段相等或两个角相等,可利用等腰三角形的性质定理和判定定理;在两个三角形中证明两条线段相等或两个角相等,可利用全等三角形.

b. 在一个三角形中出现角相等条件时可考虑得到边相等的结论. 反之,在一个三角形中出现边相等条件时可考虑得到角相等的结论.

类型三 30°所对直角边性质定理的应用

【例 14】 如图 1-1-13, Rt$\triangle ABC$中,$\angle C=30^\circ$,$\angle CAB=90^\circ$,$AD\perp BC$,你能看出BD与BC的大小关系吗?

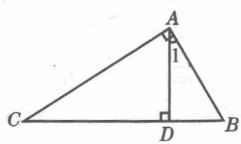


图 1-1-13

分析 在直角三角形中,存在30°的角,一定存在较短直角边(即30°所对的直角边)与斜边之间的$\frac{1}{2}$的关系. 此题中,存在不止一个30°的角,关键之处是AB的作用,它既是$\triangle ADB$的斜边,又是$\triangle ABC$的30°角所对的直角边,因此起了等量代换的作用.