实变函数

卢同善 王学锋 赵元章 编著

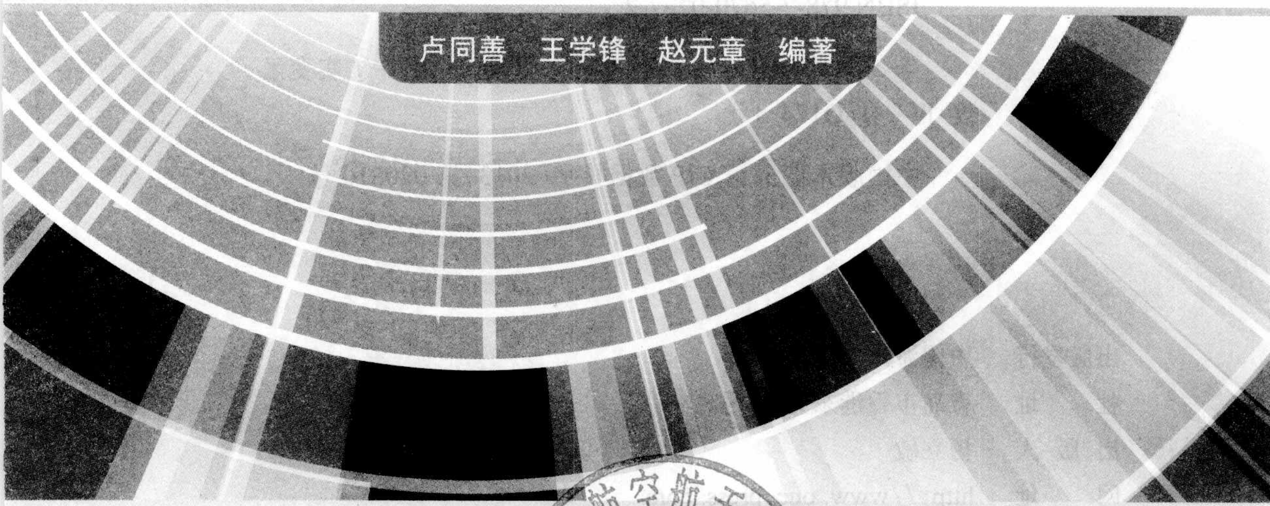
FUNCTION OF REAL VARIABLE

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

中国海洋大学教材建设基金资助

Function of Real Variable
实变函数

卢同善 王学锋 赵元章 编著



中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/卢同善，王学锋，赵元章编著．—青岛：中国海洋大学出版社，2013．2

ISBN 978-7-5670-0227-2

Ⅰ．①实… Ⅱ．①卢… ②王… ③赵… Ⅲ．①实变函数 Ⅳ．①O174．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 020810 号

出版发行 中国海洋大学出版社

社　　址 青岛市香港东路 23 号　　**邮政编码** 266071

出 版 人 杨立敏

网　　址 http://www.ouc-press.com

电子信箱 coupljz@126.com

订购电话 0532-82032573(传真)

责任编辑 李建筑　　**电　　话** 0532-85902505

印　　制 日照报业印刷有限公司

版　　次 2013 年 2 月第 1 版

印　　次 2013 年 2 月第 1 次印刷

成品尺寸 170 mm × 230 mm

印　　张 16.75

字　　数 310 千

定　　价 32.80 元

前 言

一、本课程的目的

“实变函数”这一课程的最终目的是建立一种新的(对于已有的 Riemann 积分而言)积分理论——Lebesgue 积分理论。

既然已经有了 Riemann 积分,并且这一积分已经得到了成功、广泛的应用,那么,为什么还要建立 Lebesgue 积分呢?在学习 Lebesgue 积分之前,我们有必要简要地讲述一下这个问题。

1. Riemann 积分存在着其自身不可克服的缺陷

19 世纪后期,Riemann 积分日趋成熟,其应用日趋广泛和深入;但同时,Riemann 积分本身所存在的严重缺陷,也逐渐暴露出来,逐渐被人们所认识。这些缺陷主要有以下三个方面。

首先,Riemann 积分的可积函数范围过于狭窄。例如,像 Dirichlet 函数这么简单的函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为}[0,1]\text{上的有理数}\\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{上的无理数}\end{cases}$$

对 Riemann 积分来说,都是不可积函数。这一缺陷,是由 Riemann 积分的定义所直接产生的。按 Riemann 积分之定义,一个函数的 Riemann 可积性本身就已经包含着对该函数的这样一个要求:该函数不能“太不连续”(这一“太不连续”的确切含义,只有到 Lebesgue 积分建立之后才能严格地描绘清楚)。也就

是说，事实上，Riemann 积分基本上是为连续函数“服务”的积分理论。而随着数学和其他自然科学的发展，提出了大量的不连续函数，这时，Riemann 积分的可积函数范围过于狭窄这一缺陷，也就更为突出了。

第二，Riemann 积分的运算不够灵活，不够方便。例如，对于积分与极限运算次序的交换、级数的逐项积分和累次积分的积分次序的交换等运算，Riemann 积分都要求很强的条件。但在许多问题中，这些条件根本就不具备，有时即使具备，验证起来也常常十分困难。因此，人们深深地感到，Riemann 积分在运算上不够灵活、不够方便。

第三，对于积分理论体系本身，Riemann 积分也有一些不尽如人意之处。比如，作为微积分学中枢的微积分基本定理的条件过强，又如可积函数空间的不完备性等等。

2. Lebesgue 积分的产生及其在理论上和应用上的重要意义

正由于 Riemann 积分的上述缺陷，到 19 世纪末，许多数学家都意识到，Riemann 积分应该被发展、被推广，并且都在为创立一种其应用范围更加广泛、运算更加灵活方便并且其理论体系也更加完善的新的积分理论而努力。其中比较著名的数学家有 Jordan(1838—1922)，Borel(1871—1956) 和 Lebesgue(1875—1941)等，而以 Lebesgue 的工作最为成功。20 世纪初，在集合论诞生的基础上，一种新的被人们以 Lebesgue 的名字命名的积分——Lebesgue 积分应运而生。在 Lebesgue 之后有许多数学家，如 Riesz(1880—1956)，Radon(1887—1956)等对新的积分理论又作了进一步的发展和改进。

Lebesgue 积分在很大程度上克服了 Riemann 积分的缺陷，它的应用范围大大扩展(像 Dirichlet 函数等大量的 Riemann 不可积函数，均已属 Lebesgue 可积函数之列)；前面所提到的种种运算，都将方便灵活得多；Lebesgue 积分的理论体系也更加完善。因而当这种新的积分理论或者说积分工具产生之后，立即在数学的许多分支中得到了广泛的应用，产生了深远的影响。例如，它促进了泛函分析这一重要的数学学科的诞生；它的概念、理论和方法被广泛应用于微分方程、积分方程和计算数学等学科；Fourier 分析、逼近论等学科也和实变函数论有紧密的联系。在这里我们要特别提到的是，实变函数论与概率论这门数学学科之间的密切联系。实变函数论或者说 Lebesgue 积分理论产生之后，立即成为概率论的理论基础。概率论中的一些基本概念，如概率、随机变量

及其数学期望都只不过分别是概率测度空间中的测度、可测函数和积分。由于概率论和实变函数论在其基本概念之间的这种令人意想不到的相似性，人们甚至可以说，概率论就是概率测度空间上的实变函数论。总之，Lebesgue积分的广泛而深刻的应用说明，实变函数论已成为现代数学的重要分支，它在各个数学学科中的应用，已成为现代数学的一个特征。

二、本课程的特点

与其他一些数学课程相比较，本课程有以下三个明显的特点：

(1) 本课程中基本上没有计算问题，整个内容就是由概念和定理（以及引理、推论等）所组成，其中的习题也是某些定理、结论的证明。

(2) 本课程中的概念有较高的抽象性，即使背过其定义，也未必能真正理解其本质含义。

(3) 本课程呈现出较强的逻辑性，其整个内容就是由严密的逻辑性将所有的概念和定理联系在一起所构成的一个理论体系。本课程中的许多定理的证明过程较长，技巧性较强，难度较大，其中的不少习题也有较高的难度和技巧性。因此可以说，本课程是训练提高学生的逻辑思维能力的最好的课程之一。

正由于本课程的以上特点，使得本课程成为（学习该课程的）学生感到难度最大、最为难学的课程之一。正如一本实变函数教科书的前言中所说："然而不幸的是，这门课程似乎名声欠佳。不少学过实变函数的学生除了留下'抽象、诲涩'的印象之外，收获不多。一种为分析数学带来如此巨大简化的理论，竟被当做一种复杂得令人难以接受的东西！这值得数学家们深思。"（参考文献[6]）

三、本教材的编写目的及其实施途径

针对"实变函数"的上述课程特点，在广采已有教材之长，在取材适宜、先进，体系完美，逻辑严谨和论述精练等一般编写目的的基础上，本教材以降低本课程的接受难度、提高教学质量为主要编写目的，以加强基本技能的训练和采用简洁明了的阐述方式为实施途径。与已有其他实变函数教材比较，本教材的这一编写目的及其实施途径，具有鲜明特色。

1. 本教材加强了本课程基本技能的训练，如

(1) 在概念方面：本教材在介绍了一个概念的定义之后，不是立即转入定

理的证明，而是尽可能先对这一概念本身作一些探讨，其内容诸如对此概念的简单解释，此概念的简单性质，其充分条件和必要条件等。通过这些探讨，一方面可从不同的侧面反映此概念的本质含义，使学生在刚开始接受这一概念时，就对它有一个全面深刻的认识（这无疑对整个课程的学习是有益的）；另一方面，这些探讨也常常正是对后面的定理证明在基本技能方面的准备，为其铺平了道路。

(2) 在定理证明方面：对于一些证明过程较长、难度较大的定理，在证明这一定理之前，尽量为这一定理作一些基本技能上的准备工作。比如，在对课程内容深入研究的基础上，将该定理证明中的部分结论（这常常是一些基础性、工具性的基本结论）在该定理前面的有关章节中预先得到解决（有时编为习题）。因为此时仅解决一两个部分结论，学生不会感到困难。这样，在证明这一定理本身时，学生已具备了证明这一定理的某些技能和方法，因而大大降低了这一定理接受上的难度。

(3) 在第一章集合论和第二章点集论中，本教材为以后内容做了更多的基本技能方面的准备工作，从而大大降低后面不少难点的难度。

这些基本技能的训练，不仅对概念的认识更加深入、透彻，使疑难定理的证明思路自然、顺畅，使其证明过程简明、清晰，更重要的是为本课程中的难点预先做了充分的准备和铺垫，使学生在学习这一难点之前在概念上、在论证技巧上就具有了更多的解决这一难点的能力，能力提高了，自然会感到“难点不难”，因而有效地降低了课程的接受难度。并且这些训练主要由学生自行完成，从而激发了学生的学习兴趣，促进了学生的独立工作能力的培养和提高，提高了教学质量。

2. 本教材在采用简洁明了的阐述形式方面所做的工作，除了使论述严谨、精练，步骤、层次更加清晰、分明外，特别采用了以逻辑符号“⇒”分步列出定理的证明步骤及证明依据的论证形式。与一般的文字阐述形式相比较，这种形式使定理的证明步骤、方法技巧以及证明依据和所用工具都以形象化的形式，清清楚楚、一目了然地展现在读者面前，既加深了定理的理解，又便于记忆。因而也有效地降低了课程内容的接受难度，促进了教学质量的提高。第一版使用中学生对这种论证形式反映很好。

四、关于本教材内容及阐述格式上的几点说明

本教材共六章，另有两个附录，详见目录或正文。下面对本教材内容作三点说明：

(1) 本教材没有包括不少实变函数教材中所包含的关于 L^p 空间的内容。因为这一内容在泛函分析中阐述更为恰当，在作者所编《泛函分析基础及应用》一书中已作了论述。

(2) 本教材附录一对抽象测度和抽象积分理论作了简单的阐述。由于本教材所采用的 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的建立方式都很易于向抽象测度和抽象积分推广，所以虽然附录一篇幅不长，但是，通过其内容的学习，读者可对抽象测度和抽象积分理论有一个初步的认识，以满足某些应用上的需要。同时，该附录内容的学习，对于在高观点之下，进一步加深读者对 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的理解，也是有益的。

(3) 本教材第五章对 Lebesgue 积分的建立，采用了从非负简单函数的积分到非负可测函数的积分，最后到一般可测函数的积分的方式。事实上，Lebesgue 积分的建立尚有多种方式，比如，有以 Riemann 积分的“分割，求和，取极限”的思想方法为基础(当然和 Riemann 积分有本质的不同之处)的建立方式。国内部分教材即采用这一方式。这两种方式相比，前者论述简捷，且更易于向抽象积分推广。因此，近年来这一方式为许多中外实变函数著作所采用。但是，不能不看到，这一方式在一定程度上掩盖了 Lebesgue 积分和 Riemann 积分在积分的基本思想上的本质差别，不能使人们直接看到在积分的基本思想上，Lebesgue 积分对 Riemann 积分的改进之处、高明之处。因此，本教材附录二阐述了 Lebesgue 积分的后一建立方式。作者希望这一附录能有助于读者进一步加深对 Lebesuge 积分的认识。

对于本教材的阐述格式，作以下说明：

(1) 本教材中常用如下阐述格式：

“命题 A $\Longrightarrow$ 命题 B　　　　(定理 C)”

或

“式 A＝式 B　　　　　　　　(定理 C)”

上面各式右端括号中之定理(或推论等)即为左端逻辑式或等式之依据。

(2) 在对充要条件的证明中,记号“证‘ $\Longrightarrow$ ’:”即表示必要条件的证明,记号“证‘ $\Longleftarrow$ ’:”即表示充分条件的证明。

(3) 在对两集 A 和 B 的相等关系“$A=B$”的证明中,记号“证‘$\subset$’:”即表示包含关系“$A\subset B$”的证明,记号“证‘$\supset$’:”即表示包含关系“$A\supset B$”的证明。

为阅读方便,本教材末附有符号索引和名词索引。

本教材是 2001 年版的修订版。2001 年版是在作者为 10 多届学生讲授实变函数课讲稿的基础上,经认真整理而成。此次出版对 2001 年版某些内容作了修改或调整,使得更加有利于课堂教学,更有利于学生自学,更有利于教学质量的提高。

由于水平所限,本教材中定有错误和不当之处,敬请专家和读者不吝指正。

作　者

2012 年 10 月

目 录

第一章 集合

研究集合的一般性质的数学分支称为集合论。这一数学分支是由德国数学家 Cantor 于 19 世纪末创立的。集合论被创立之后，其基本概念和方法很快渗透到数学的各个领域中去，并成为整个数学的基础。实变函数论即是在集合论的观点和方法渗入数学分析的过程中所产生，并且其本身就是建立于集合论的基础之上的。

本章分集合的运算和集合的基数两部分。§1.1 研究集合的运算。在这一节中，除了集合运算的基本内容外，也包括了集合运算的一些更加深入的结果，为以后各章的某些重要内容做好准备，打下宽广坚实的基础。这一节对于学好本课程十分重要，读者必须给予足够的重视。可以这样说，这个课程中的不少难点，就难在集合运算上。本章 §1.2，§1.3 和 §1.4 建立集合的"基数"概念及其性质。所谓"基数"，即是有限集的"元素个数"这一概念在无限集合上的推广，这一概念也是本课程的重要基础之一。

§1.1 集合及其运算

一、集合的概念

1. 集合概念及其表示法

"集合"和"元素"是集合论乃至整个数学的基础概念。这两个概念不能进行定义。在实变函数论中，对这两概念，我们将满足于如下朴素的描述：

所谓**集合**，就是具有某些特殊性质的事物的全体。集合中的事物即称为该集合的**元素**。以后也简称集合为**集**。

我们将用大写字母 A,B,X,Y 等表示集合，用小写 a,b,x,y 等表示其元素。

设 A 是一个集合，x 是一个事物，若 x 是 A 的元素，则称 x **属于** A，记为 $x\in A$；若 x 不是 A 的元素，则称 x **不属于** A，记为 $x\overline{\in}A$。

注 1　任一集合 A 和任一事物 x 之间，$x\in A$ 和 $x\overline{\in}A$ 二者必居其一且仅居其一。

通常，集合的表示法有以下两种：

(i) **列举法**，即把一个集合，比如集合 A 的所有元素 $a,b,c,\cdots$ 全部列举出来，表示为

$$A=\{a,b,c,\cdots\}。$$

(ii) **描述法**，即用一集合 A 的元素所必须且只需满足的条件 P 来描述，表示为

$$A=\{x:x\text{ 满足条件 }P\}。$$

例 1　由四个自然数 1,2,3 和 4 所构成的集合 A 可表示为

$$A=\{1,2,3,4\}。$$

例 2　自然数的全体所成之集，以后记为 $\mathbf{N}$，可表示为

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}。$$

例 3　实数全体所成之集，以后记为 $\mathbf{R}^1$，即表示为

$$\mathbf{R}^1=\{x:x\in(-\infty,+\infty)\}。$$

例 4　方程 $x^2-1=0$ 的解 x 的全体所成之集即表示为

$$\{x:x^2-1=0\}。$$

例 5　设 E 为一集合，$f(x)$ 是定义于 E 的一个实值函数，a 为一实常数，则我们用记号

$$E[x:f(x)>a]$$

表示 E 中使 $f(x)$ 的值大于 a 的那些 x 的全体所成之集，即

$$E[x:f(x)>a]=\{x:x\in E,f(x)>a\}。$$

以后我们也将记号 $E[x:f(x)>a]$ 简记为 $E[f>a]$。类似可定义 $E[f\geqslant a]$，$E[f<a]$ 和 $E[f\leqslant a]$ 等。

下面我们引入空集、单元素集、集族和集列的概念。

不含任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$。

仅含一个元素的集合，称为**单元素集**。比如：$\{a\}$ 即表示仅含一个元素 a 的单元素集。因而，$\{a\}\neq a$。

定义 1.1.1　设 Λ 为一集合。若 $\forall\lambda\in\Lambda$，均给定一集合 A_λ，那么，即给定了一个以诸集合 A_λ 为元素的集合，称该集合为一个**集族**，记为$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，并称集合 Λ 为其**号标集**。本教材中集族也用一黑体字表示，如 $\mathbf{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$。

定义 1.1.2　若一集族的号标集 Λ 为 $\mathbf{N}$ 时，则称该集族为一**集列**，记为$\{A_n:n$

$=1,2,\cdots\}$ 或简记为$\{A_n\}$。

2. 集合之间的关系

定义 1.1.3 若集合 A 和 B 所包含的元素相同，则称 A 和 B **相等**，记为 $A=B$。

例如：$\{x:x^2-1=0\}=\{1,-1\}$。

定义 1.1.4 若属于 A 的元素均属于 B，则称 A 是 B 的**子集**或 A **包含于** B，记为 $A\subset B$。此时也称 B **包含** A，而记为 $B\supset A$。

定义 1.1.5 若 $A\subset B$，而 B 中确有元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，或 A **真包含于** B。

集合间相等和包含关系显然有以下性质：

定理 1.1.1 $A=B\Longleftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$。

该定理是我们证明两集相等的最基本的方法。

定理 1.1.2

(i) $A\subset A$;

(ii) $A\subset B$ 且 $B\subset C\Longrightarrow A\subset C$。

注 2 空集是任何集合的子集，即对任何集合 A，均有 $\varnothing\subset A$。

下面我们引入两种集列概念。称满足条件

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$$

的集列为**递增集列**；称满足条件

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$$

的集列为**递减集列**。

二、集合的运算

1. 并集运算

定义 1.1.6 由集合 A 和 B 的元素合在一起所组成的集合，称为集合 A 和 B 的**并集**，或简称为 A 和 B **之并**，记为 $A\cup B$。

由定义知：

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

类似可定义多个集合之并。设有集族$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，则有

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x:\exists\lambda\in\Lambda,\text{使 } x\in A_\lambda\}。$$

应熟记以下结论(其中 $\lambda\in\Lambda$)：

$$\boxed{\begin{aligned} x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda &\Longleftrightarrow x\in\text{某一 }A_\lambda \\ x\overline{\in}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda &\Longleftrightarrow x\overline{\in}\text{任一 }A_\lambda \end{aligned}} \tag{1}$$

例 6　设

$$A_k=\left[-1+\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right],\quad k=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right],\quad \forall\, n\in\mathbf{N},$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=(-1,1)。$$

例 7　设

$$A_n=(n-1,n],\quad n=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,+\infty)。$$

注 3　在作并集运算时，同时是两个或两个以上的集合所共有的元素，在其并集中只算作一个元素。

易证并集运算有以下简单性质：

定理 1.1.3

(i) $A\cup B\supset A, A\cup B\supset B$;

(ii) 幂等律：$A\cup A=A$;

(iii) 交换律：$A\cup B=B\cup A$;

(iv) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(v) 吸收律：$A\cup B=A\Longleftrightarrow B\subset A$;

(vi) $A_\lambda\subset B_\lambda,\ \forall\,\lambda\in\Lambda\Longrightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$。

2. 交集运算

定义 1.1.7　由集合 A 和 B 的公共元素的全体所成之集，称为集合 A 和 B 的**交集**，或简称为 A 和 B 之**交**，记为 $A\cap B$。

由定义知：

$$A\cap B=\{x: x\in A\text{ 且 }x\in B\}。$$

类似可定义多个集合之交。设有集族$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，则有

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x:\forall\,\lambda\in\Lambda,\text{均有 }x\in A_\lambda\}。$$

应熟记以下结论(其中 $\lambda\in\Lambda$)：

$$\boxed{\begin{aligned} x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda &\Longleftrightarrow x\in 任一\ A_\lambda \\ x\overline{\in}\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda &\Longleftrightarrow x\overline{\in} 某一\ A_\lambda \end{aligned}} \tag{2}$$

若 $A\cap B=\varnothing$，则称集 A 与 B **不相交**。对于集族 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，若对任意不同的 $\lambda,\lambda'\in\Lambda$，均有 $A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\varnothing$，则称该集族中诸集合**两两不交或互不相交**。

例 8 设

$$A_k=(-1-\frac{1}{k},1+\frac{1}{k}),\quad k=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}),\quad \forall\, n\in\mathbf{N},$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=[-1,1]。$$

易证交集运算有以下简单性质：

定理 1.1.4

(i) $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$；

(ii) 幂等律：$A\cap A=A$；

(iii) 交换律：$A\cap B=B\cap A$；

(iv) 结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(v) 吸收律：$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subset B$；

(vi) $A_\lambda\subset B_\lambda,\forall\lambda\in\Lambda\Longrightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$。

3. 差集运算

定义 1.1.8 属于集合 A 而不属于集合 B 的元素全体所成之集，称为集合 A 和 B 的**差集**，或简称为 A,B **之差**，记为 $A\backslash B$。

由定义知：

$$A\backslash B=\{x:x\in A\ 且\ x\overline{\in}B\}。$$

故

$$x\in A\backslash B\Longleftrightarrow x\in A\ 且\ x\overline{\in}B。$$

注 4 在差集运算 $A\backslash B$ 中，并不要求 $A\supset B$。

例 9 设 $A=\{1,2,3,4\}$。

若 $B=\{3,4\}$，则 $A\backslash B=\{1,2\}$；

若 $B=\{3,4,5,6\}$，则仍有 $A\backslash B=\{1,2\}$；

若 $B=\{5,6,7,8\}$，则 $A\backslash B=A$。

易证差集运算有以下简单性质：

定理 1.1.5

(i) $A\backslash B\subset A, (A\backslash B)\cap B=\varnothing$；

(ii) $A\backslash A=\varnothing$；

(iii) $A\backslash B=A \Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

(iv) 设 S 为一集合，则

$$S\supset A \Longleftrightarrow (S\backslash A)\cup A=S。$$

4. 余集运算

定义 1.1.9 若集 $S\supset A$，则称 $S\backslash A$ 为集 A 相对于集 S 的**余集**(或**补集**)，记为 $\mathscr{C}_S A$，或简记为 $\mathscr{C}A$，或记为 A^C，称 S 为**基本集**。

在 $x\in S$ 的前提下，由定义知：

$$x\in\mathscr{C}A \Longleftrightarrow x\overline{\in}A,$$

$$x\overline{\in}\mathscr{C}A \Longleftrightarrow x\in A。$$

易证，余集运算有以下简单性质：

定理 1.1.6 设 S 为基本集，$A\subset S, B\subset S$，

(i) $\mathscr{C}S=\varnothing, \mathscr{C}\varnothing=S$；

(ii) $A\cup\mathscr{C}A=S, A\cap\mathscr{C}A=\varnothing$；

(iii) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$；

(iv) $A\subset B \Longleftrightarrow \mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$；

(v) $A\backslash B=A\cap\mathscr{C}B$。

其中性质(v)非常重要，经常用到，其证明留作习题。望读者从一开始，即将其搞透、记熟。

三、运算规律

定理 1.1.7 分配律

(i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(ii) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$；

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(iv) $A\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$；

(v) $A\cup(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cup B_\lambda)$。

证明 我们仅证明结论(iv)，其他结论的证明均留作练习。

证(iv)： $x\in A\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)$