

圆柱齿轮

几何计算原理及实用算法

Yuan Zhu Chi Lun Ji He Ji Suan Yuan Li
Ji Shi Yong Suan Fa

田培棠 田凌 等编著

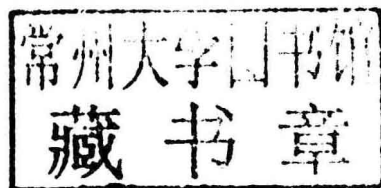


国防工业出版社

National Defense Industry Press

圆柱齿轮几何计算 原理及实用算法

田培棠 田凌 陈志明 编著
谢平 张鹏 田波 施万群



国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书分两篇。第一篇系统介绍了涉及渐开线圆柱齿轮几何计算的各个方面,阐述了齿轮各个几何尺寸参数的定义、由来及计算方法。第二篇详细介绍了利用本书研究制作的专用函数表和线图简捷进行齿轮几何计算的方法和大量实例。

本书可作为工厂技术人员的工具书,工科大、中专院校师生教学、课程和毕业设计的参考书,技术人员继续教育的教材,从事齿轮和齿轮刀具研究的技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

圆柱齿轮几何计算原理及实用算法/田培棠等编著. —
北京:国防工业出版社,2012.4
ISBN 978-7-118-07945-6

I. ①圆... II. ①田... III. ①圆柱齿轮—齿轮精
度—计算几何 IV. ①TH132.417

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 035821 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 34 $\frac{3}{4}$ 字数 870 千字

2012 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 88.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

齿轮计算主要包括几何计算(亦即主要为尺寸参数计算)和强度计算两部分。系统的强度计算多在新产品的技术设计中应用,而几何计算则对每个齿轮都必须进行。其计算结果的主要用途为设计人员需根据计算结果绘制成齿轮工作图,同时对其啮合性能进行必要的验算;工艺人员要根据齿轮工作图标注的尺寸参数选择机床、刀具(必须验算刀具是否可用?),分析加工、检测中产生的问题,设计专用齿轮刀具;维修人员必须进行齿轮辨识,依据测得的少数尺寸计算并确定出所有齿轮参数等。因此,齿轮的几何计算是工厂机械工程师必须要掌握的知识 and 技能,也是大、中专学校机械专业教学、研究的重要内容。

本书是主要面向工厂现场技术人员而编著的一本资料,其主要特点如下:

(1) 制作了大量工程师们习惯的、有助于直观了解啮合几何原理的图形;阐述并汇集了几乎所有圆柱齿轮几何尺寸参数的计算原理和公式;收入了近期国内外学者(包括本书作者)最新的研究成果。凡涉及渐开线圆柱齿轮啮合几何计算的有关问题,均可在本书内找到解答,故是一本系统、全面论述渐开线圆柱齿轮几何计算的专著。

(2) 制作了大量精确的能在实践中应用的数表,将所有复杂的齿轮几何计算过程均变成查表并辅以简单的四则运算的形式,节约了 $1/3 \sim 1/2$ 的计算工作量。此外,所有重要的几何参数尺寸计算都附有算例,以供使用者借鉴。书中新制的专用函数表还能用于齿轮刀具设计和选用并能大大减少计算工作量。

(3) 利用本书新介绍的内容(包括作者的研究成果),能在齿轮设计和加工时,迅速估计出某个参数的变化引起其他参数的变化值。这不但对现场工程师们有用,对齿轮研究工作者也很有参考价值。

(4) 由于本书的撰写仅建立在初等数学(三角、代数)和普通高等数学(平面解析几何和微分)的基础上,因此学习本书不需具备更高深的数学知识。

本书引用了一些国内学者的研究成果,除尽可能标明出处外,还借此表示感谢。本书蒙国务院特殊津贴获得者、教授级高级工程师董仁扬先生仔细审阅,在此一并感谢!

本书适合作为工厂技术人员的工具书;工科大、中专院校师生教学、课程和毕业设计的参考书;技术人员继续教育的教材;从事齿轮和齿轮刀具研究的技术人员的参考书。

对于一切来自读者的意见,我们均会怀着感激的心情接受并及时回复。

联系方式:tpt44@sina.com

编著者
2011年9月

目 录

第一篇 圆柱齿轮几何计算

第一章 圆柱齿轮几何计算的理论基础	1	二、斜齿轮	34
第一节 渐开线及其性质	1	三、公法线长度测量的限制条件	36
一、渐开线的形成及极坐标方程	1	第三节 跨距测量及量棒(球)直径选择	37
二、渐开线及渐开线传动的特性	1	一、跨距 M	37
三、渐开线函数的解算	3	二、斜齿轮跨距计算方法的理论分析	40
四、渐开线的弧长	5	三、量棒(球)直径 d_p 的选择	47
第二节 圆柱齿轮的基本参数与基本齿廓	6	第四节 中心距及啮合角	49
一、齿数 z 、模数 m 、齿形角 α	6	一、平行轴	49
二、基本齿廓	7	二、交错轴	53
三、常用名词术语的代号及定义	9	第五节 直径和齿高	54
第三节 斜齿圆柱齿轮参数	11	一、分度圆直径	54
一、渐开螺旋面的形成及特性	11	二、基圆直径	55
二、端面和法面齿形参数间的关系	12	三、节圆直径	55
三、当量齿轮和当量齿数	16	四、齿顶圆直径	55
第四节 交错轴齿轮副	16	五、齿根圆直径	58
一、传动原理	16	六、齿高	58
二、角度参数间的关系	17	第三章 齿轮啮合特性及啮合质量指标	60
三、传动比	21	第一节 齿顶厚 s_a	61
第五节 齿轮的变位	21	一、方法 1	61
一、变位齿轮的形成原理及特点	21	二、方法 2	63
二、变位齿轮副	23	三、允许的最小齿顶厚 $[s_a]_{\min}$	66
第二章 圆柱齿轮几何尺寸计算	25	第二节 过渡曲线干涉	66
第一节 齿厚	25	一、有效渐开线齿廓高度及对正确啮合的影响	66
一、分度圆齿厚	25	二、有效渐开线齿廓高度的计算	67
二、任意圆周上的齿厚	25	三、不发生过渡曲线干涉的判别条件	68
三、分度圆弦齿厚及固定弦齿厚	27	四、过渡曲线干涉现象的讨论	70
四、斜齿轮法平面中的弦齿厚	29	第三节 内齿轮副的齿廓重叠干涉	70
第二节 公法线长度及跨越齿数	33		
一、直齿轮	33		

一、齿廓重叠干涉的产生	70	四、插齿刀倒棱切削部分与齿轮齿顶倒棱	
二、不发生齿廓重叠干涉的判别条件	71	尺寸间的关系	126
第四节 重合度 ε 及斜齿轮副接触线		第五节 插制内齿轮时的展成顶切	129
长度	73	一、不产生展成顶切的条件	129
一、重合度的概念	73	二、最大顶切高度的计算	131
二、重合度的确定	74	三、内齿轮展成顶切校验的讨论	133
三、斜齿轮副的接触线长度	78	第五章 圆柱齿轮几何尺寸及参数的	
第五节 压比	83	微分简式	134
一、齿廓的曲率半径	83	第一节 啮合中心距的简化计算	134
二、啮合点的综合曲率	84	一、平行轴齿轮副中心距的简化计算	134
第六节 滑动比	88	二、交错轴齿轮副中心距的简化计算	142
一、渐开线齿廓的相对滑动	88	第二节 啮合角的简化计算	146
二、滑动比	88	一、平行轴齿轮副啮合角的简化计算	146
第四章 切齿几何计算	95	二、交错轴齿轮副啮合角的简化计算	149
第一节 齿廓曲线的构成及方程	95	第三节 齿轮几何参数尺寸间的微分	
一、齿廓曲线的构成	95	简式	151
二、齿廓曲线方程	98	一、分度圆齿厚、公法线长度和跨距尺寸间	
三、齿廓上各特殊点的位置	102	的微分关系	151
第二节 齿轮的根切	103	二、顶圆齿厚 s_a 与变位系数 x 的微分关	
一、根切现象的产生和消除	103	系式	152
二、根切量的计算	105	第四节 微分简式的汇总	155
第三节 剃前齿轮齿廓与滚刀齿廓	111	附录 常用数学公式及计算器编程	
一、剃前齿轮齿廓的形成	111	方法	157
二、齿轮齿根过渡曲线与刀尖圆角的关系	112	一、三角函数	157
三、确定非造形切削刃的齿形角	115	二、微分公式及法则	158
四、滚刀倒棱切削刃与齿轮齿顶倒棱尺寸		三、在函数计算器上编程解算超越	
间的关系	116	方程	159
五、齿轮的根切量及齿根加厚量的		第六章 齿轮主要参数的选择原则和	
计算	119	方法	161
第四节 剃前齿轮齿廓与插齿刀		第一节 渐开线圆柱齿轮传动的特点和	
齿廓	122	主要参数选择	161
一、剃前插齿刀齿廓和齿轮齿廓间的相互		一、渐开线圆柱齿轮传动的特点	161
关系	122	二、主要参数选择	161
二、按刀顶凸起点的尺寸来确定齿轮齿根		第二节 变位系数的选择	164
沉割(挖根)开始点的位置	123	一、变位系数的选择原则	164
三、按齿轮齿根沉割(挖根)开始点的位置来		二、变位系数的选择方法	167
确定刀顶凸起点的尺寸	125	第三节 齿轮图样上应注明的尺寸	
		数据	172

一、需要在图样上标注的一般尺寸 数据	172	二、其他	173
		三、图样示例	173

第二篇 利用专用图表简化几何计算

第一章 专用函数及专用函数表	175	三、计算例	214
第一节 专用函数	175	第二节 交错轴齿轮副的中心距和 啮合角	217
一、概述	175	一、一般计算	217
二、基本专用函数	175	二、精确计算	218
三、衍生的专用函数	176	三、计算例	219
第二节 专用函数表及其使用方法	177	第四章 啮合特性及啮合质量指标的 专用函数简化计算	221
一、 J, C, P 专用函数表(附录表 A2-1)	177	第一节 过渡曲线干涉校验时有效渐开 线齿廓最低点的曲率半径	221
二、 N_{β}, M, K 函数表(附录表 A2-2)	178	一、直齿轮副	221
第二章 齿厚的专用图表简化计算	180	二、斜齿轮副	221
第一节 齿厚	180	三、交错轴齿轮副	222
一、任意圆周上的齿厚	180	第二节 重合度的专用函数计算	223
二、顶圆齿厚	180	一、直齿轮副的重合度	223
三、节圆齿厚	184	二、斜齿轮副的重合度	224
第二节 弦齿厚	184	三、螺旋齿轮副的重合度	225
一、分度圆弦齿厚及弦齿高	184	四、计算例	225
二、固定弦齿厚及弦齿高	186	第三节 压比和滑动比	228
第三节 公法线长度及跨越齿数	187	一、压比	228
一、公法线长度	187	二、滑动比	229
二、跨越齿数 k	188	三、计算例	230
三、测量限制条件的专用函数简化 计算	202	第四节 内齿轮副的齿廓重叠干涉和 展成顶切校验	231
四、计算例	203	一、发生齿廓重叠干涉的判别条件	231
第四节 跨距测量及量棒(球)直径 选择	204	二、内齿轮不产生展成顶切的校验	232
一、跨距 M	204	第五章 专用函数简化齿轮几何计算的 实例汇总	235
二、量棒(球)直径 d_p	208	第一节 标准圆柱齿轮几何尺寸参数 计算	235
三、齿厚偏差与跨距变化量的关系	208	一、直齿外齿轮副	236
四、计算例	208	二、直齿内齿轮副	236
第三章 中心距和啮合角的专用函数 简化计算	212	三、斜齿外齿轮副	237
第一节 平行轴齿轮副的中心距和 啮合角	212	四、斜齿内齿轮副	238
一、直齿轮副	212		
二、斜齿轮副	213		

第二节 高变位圆柱齿轮几何尺寸		三、角变位斜齿圆柱外齿轮副	253
参数计算	240	四、角变位斜齿圆柱内齿轮副	255
一、高变位直齿外齿轮副	241	第四节 剃齿刀选用的专用函数	
二、高变位直齿内齿轮副	242	验算法	257
三、高变位斜齿外齿轮副	243	附录	262
四、高变位斜齿内齿轮副	244	表 A2-1 α_x - J 、 C 、 P 专用	
第三节 角变位圆柱齿轮几何尺寸		函数表	262
参数计算	245	表 A2-2 β - α_i 、 N_β 、 M 、 K 专用	
一、角变位直齿圆柱外齿轮副	246	函数表	312
二、角变位直齿圆柱内齿轮副	249		
参考文献			544

第一篇 圆柱齿轮几何计算

第一章 圆柱齿轮几何计算的理论基础

第一节 渐开线及其性质

一、渐开线的形成及极坐标方程

当一直线在一圆周上做纯滚动时,该直线上任一点的轨迹称为该圆的渐开线,这个圆称为基圆而该直线称为渐开线的发生线。例如在图 1.1-1 中,发生线从位置 I-I 沿逆时针方向在半径为 r_b 的基圆圆周上做纯滚动,转到位置 II-II 时,其上任一点 A 的轨迹 AK 为渐开线。它就是渐开线齿轮轮齿一侧的齿廓曲线。当发生线从位置 I-I 沿顺时针方向滚动时,则形成另一侧渐开线齿廓曲线(见图 1.1-1 中虚线曲线所示)。

因为 $\overline{KN} = \widehat{AN}$, 故由图 1.1-1 可得

$$\theta_k = \text{inv}\alpha_k = \tan\alpha_k - \alpha_k \quad (1.1-1)$$

式中 θ_k 为展开角,又称为 α_k 的渐开线函数,用 $\text{inv}\alpha_k$ 表示; α_k 为渐开线上 K 点的压力角。

传动时,若不考虑齿廓间的摩擦力,则压力是沿渐开线上 K 点的法线方向(即发生线方向),而该点的速度方向垂直于 OK 线。这两个方向线之间的夹角 α_k 与压力的推动分量有关,故称为齿廓在该点的压力角。

显而易见,齿廓上各点压力角的大小是不等的。K 点离中心 O 越远,其压力角越大。在渐开线的始点 A 处, $\alpha_A = 0^\circ$ 。

从图 1.1-1 还可得到齿廓上 K 点的半径 r_k (向径)为

$$r_k = \frac{r_b}{\cos\alpha_k} \quad (1.1-2)$$

式中 r_k 为渐开线齿廓上任意点 K 的向径; r_b 为齿轮的基圆半径。

式(1.1-1)和式(1.1-2)则是渐开线齿廓的极坐标方程。

二、渐开线及渐开线传动的特性

从渐开线的形成可以知道其具有如下特性:

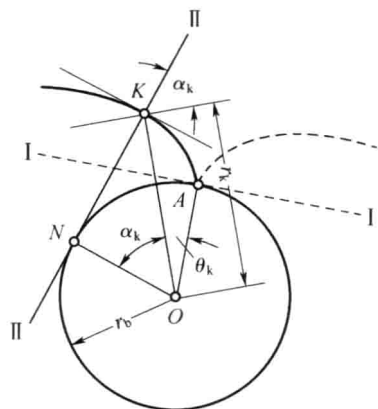


图 1.1-1 渐开线的形成

(1) 发生线在基圆上滚过的线段长度 \overline{KN} 等于基圆上被滚过的圆弧长度 \widehat{AN} 。

(2) 渐开线上任一点的法线切于基圆。直线 \overline{KN} 为渐开线在 K 点处的曲率半径,即为法线。渐开线上各点的曲率半径不同,离基圆越近曲率半径越小,在基圆上的曲率半径为零。

(3) 渐开线的形状仅取决于基圆的大小,基圆越小,渐开线越弯曲;基圆越大,渐开线越平直(如图 1.1-2 所示);当基圆半径为无穷大时,其渐开线将成为垂直于 N_3K 的直线,后面讨论的齿条的齿廓就是这种直线齿廓。

(4) 因渐开线从基圆开始向外展开,故基圆以内无渐开线。

(5) 一个渐开线齿轮的齿廓,是由同一个基圆形成的两条对称的渐开线组成的。两个渐开线齿轮啮合时,轮齿啮合点(接触点)的轨迹(称为啮合线),恒为二齿轮基圆的内公切线 N_1N_2 (如图 1.1-3 所示)。同时在 N_1N_2 之外,齿轮不能正确啮合。

(6) 一对渐开线齿廓啮合传动时,其啮合线始终为与两齿轮基圆相切的内公切线(如图 1.1-3 和图 1.1-4 所示),它与中心线交于固定的一点 P ,该点称为节点,过节点的圆称为节圆。齿轮传动可当成是二节圆做纯滚动的摩擦轮传动,于是传动比 i 可按下式计算:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} = \frac{r_{b2}/\cos\alpha}{r_{b1}/\cos\alpha} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (1.1-3a)$$

若中心距由 a 变大为 a_x (如图 1-4 所示),其传动比 i_x 为

$$i_x = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2'P'}}{\overline{O_1'P'}} = \frac{r_{b2}/\cos\alpha_x}{r_{b1}/\cos\alpha_x} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (1.1-3)$$

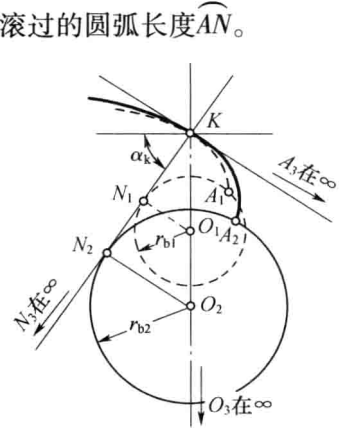


图 1.1-2 基圆变化对渐开线形状的影响

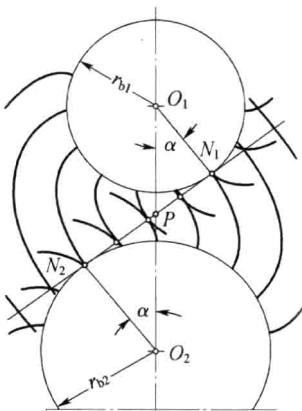


图 1.1-3 啮合线

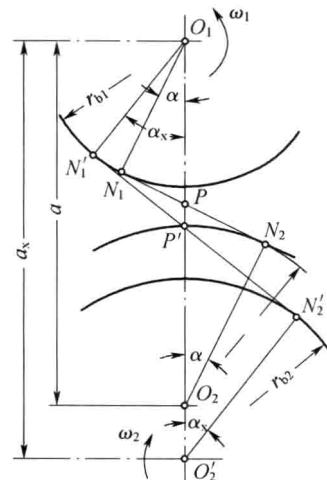


图 1.1-4 中心距变化不影响传动比恒定

比较式(1.1-3a)和式(1.1-3)可知, $i_x \equiv i$ 。这说明不论该对齿轮传动的中心距如何改变,其传动比总等于其二轮基圆半径的反比。这种中心距改变不影响传动比大小的性质,又称为渐开线齿轮的可分性。

三、渐开线函数的解算

1. 渐开线函数

如前述图 1.1-1 所示,我们得到如式(1.1-1)所示的渐开线函数表达式,为简便起见,去掉下标“k”则有:

$$\theta = \text{inv}\alpha = \tan\alpha - \alpha \quad (1.1-4)$$

根据已知的 α 值,由上式很容易求得渐开线函数 $\text{inv}\alpha$ 之值。为了简化计算,还广泛使用渐开线函数表,根据已知的 α 值直接查取渐开线函数 $\text{inv}\alpha$ 之值。这里应当指出的是:在齿轮几何计算过程中,需要的渐开线函数 $\text{inv}\alpha$ 多为中间计算值,为保证后续计算结果的准确性,一般要求 $\text{inv}\alpha$ 之值应准确至 0.0000001mm,这就要求使用七位渐开线函数表并加之以插值计算。文献[1]附有七位渐开线函数表,利用本书所附的专用函数表亦可得到准确至 0.0000001mm 的渐开线函数值。

2. 反渐开线函数

根据渐开线函数 $\theta = \text{inv}\alpha$ 之值求角 α 值的过程称为求解反渐开线函数。同样,为保证后续计算结果的准确性,一般要求 α 之值应准确至 0.000000174rad(即 0.00001°)。显而易见,利用七位渐开线函数表并加之以插值计算,不难得到所要求精度的 α 值。

在不使用七位渐开线函数表的情况下,求解 α 值则需求解超越方程(1.1-4),这将需要用数值解法进行多次重复计算以逼近满足精确度的 α 值。当然,在计算机上利用预先编制的程序,求解 α 值并非难事,但在不便使用计算机和函数表的情况下,按表 1.1-1 所列的计算公式,亦可得到十分精确的 α 值。

表 1.1-1 反渐开线函数的快速解算

序号	θ 的范围	相应 α 角范围	计算初始值 α_0 的公式	计算 α_1 的公式
1	$\theta \leq 0.045536862$	$\alpha \leq 28.5^\circ$	$\alpha_0 = \sqrt[3]{3\theta} - 0.4\theta + 0.10697574\theta^{\frac{5}{3}} - 0.01648285\theta^{\frac{7}{3}}$	取 $\alpha = \alpha_0$
2	$0.045536862 < \theta \leq 0.684853256$	$28.5^\circ < \alpha \leq 60^\circ$		按左列公式求出 α_0 ; $\theta_0 = \tan\alpha_0 - \alpha_0$ $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\theta - \theta_0}{\tan^2\alpha_0}$ 取 $\alpha = \alpha_1$
3	$0.684853256 < \theta \leq 1.996762265$	$60^\circ < \alpha \leq 73^\circ$		按左列公式求出 α_0 ; $\theta_0 = \tan\alpha_0 - \alpha_0$ $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\theta - \theta_0}{\tan^2\alpha_0} - \frac{\sec^2\alpha_0}{\tan^5\alpha_0}(\theta - \theta_0)^2$ 取 $\alpha = \alpha_1$
4	$1.996762265 < \theta \leq 5.684199735$	$73^\circ < \alpha \leq 82^\circ$		$\alpha_0 = 1.378810109 + 0.37783704G - 0.007621907G^2 + 0.001574845G^3 - 0.000332878G^4$ $G = \varphi - 3.765743907$

由表 1.1-1 可知:当 $\theta \leq 0.045536862$ ($\alpha \leq 28.5^\circ$) 时,取 $\alpha = \alpha_0$,初始值 α_0 由表列公式算出,其精度已足够(详见表 1.1-2)。

表 1.1-2 初始值 α_0 的计算精度

$\theta \leq 0.045536862$ ($\alpha \leq 28.5^\circ$)

(rad)

精确值		按表 1.1-1 所列公式计算的初始值 α_0	误差 $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$
α	$\theta = \tan\alpha - \alpha$		
(10°) 0.174532925	0.001794056	0.174532941	-0.000000016
(20°) 0.34906585	0.014904384	0.349065858	-0.000000008
(25°) 0.436332313	0.029975345	0.436332365	-0.000000052
(28.5°) 0.497418836	0.045536862	0.49741901	-0.00000174

表 1.1-1 中序 1~3 计算 α_0 的公式由回归分析得出;序 4 计算 α_0 的公式是将 α 展成级数并令初始值为 79° 而得。计算 α_1 的公式系取 α 展成级数的前 2、3 项。在用袖珍计算器计算 α_0 时,如利用其上的内存把多次使用的 θ 值存入调用,则计算更为简便。

当 $0.045536862 < \theta \leq 0.684853256$ ($28.5^\circ < \alpha \leq 60^\circ$) 时,按表 1.1-1 序 1 所列公式计算的 α_0 与准确值的误差随 θ 的增大而相应增大(详见表 1.1-3),此时应按表 1.1-1 序 2 计算更准确的近似值 α_1 。由表 1.1-3 可看出,在此范围内取 $\alpha = \alpha_1$,其误差精度已达到预期要求。

表 1.1-3 α_0 、 α_1 之值及误差

$0.045536862 < \theta \leq 0.684853256$ ($28.5^\circ < \alpha \leq 60^\circ$)

(rad)

精确值		按表 1.1-1 所列公式计算的初始值 α_0 和 θ_0		误差 $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ $\Delta\theta = \theta - \theta_0$		按表 1.1-1 所列公式计算的 α_1 及 $\Delta\alpha' = \alpha - \alpha_1$	
α	(30°)0.523598775	α_0	0.523599061	$\Delta\alpha$	-0.00000286	α_1	0.523598776
θ	0.053751493	θ_0	0.053751588	$\Delta\theta$	-0.00000095	$\Delta\alpha'$	-0.000000001
α	(35°)0.610865238	α_0	0.610806467	$\Delta\alpha$	-0.00001229	α_1	0.610865239
θ	0.0893423	θ_0	0.089342902	$\Delta\theta$	-0.00000602	$\Delta\alpha'$	-0.000000001
α	(40°)0.6981317	α_0	0.698136145	$\Delta\alpha$	-0.00001445	α_1	0.698131701
θ	0.14096793	θ_0	0.140971059	$\Delta\theta$	-0.00003129	$\Delta\alpha'$	-0.000000001
α	(45°)0.785398163	α_0	0.785412243	$\Delta\alpha$	-0.00001408	α_1	0.785398163
θ	0.214601836	θ_0	0.214615916	$\Delta\theta$	-0.00001408	$\Delta\alpha'$	0
α	(50°)0.872664626	α_0	0.872704758	$\Delta\alpha$	-0.000040132	α_1	0.872664628
θ	0.319088966	θ_0	0.31914597	$\Delta\theta$	-0.000057004	$\Delta\alpha'$	-0.00000002
α	(55°)0.959931088	α_0	0.960035269	$\Delta\alpha$	-0.000104181	α_1	0.959931111
θ	0.468216918	θ_0	0.468429453	$\Delta\theta$	-0.000212535	$\Delta\alpha'$	-0.000000023
α	(60°)1.047197551	α_0	1.047441703	$\Delta\alpha$	-0.000244151	α_1	1.047197689
θ	0.684853256	θ_0	0.685586123	$\Delta\theta$	-0.000732867	$\Delta\alpha'$	-0.000000138

计算 α_1 的算式是解超越方程牛顿法的求根公式,只需令 $f(\alpha) = \tan\alpha - \alpha - \theta$ 并注意其一阶导数 $f'(\alpha) = \tan^2\alpha$ 即可求得。此外,对 $60^\circ < \alpha \leq 82^\circ$ 的求解公式,表 1.1-1 亦一并列出(表中序 3、序 4),以备选用。

[例 1] 已知 $\theta = \text{inv}\alpha = 0.0364730$, 求解 α 之值。

由表 1.1-1 所列公式可得

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{3 \times 0.036473} - 0.4 \times 0.036473 + 0.10697574 \times 0.036473^{\frac{5}{3}} - 0.01648285 \times 0.036473^{\frac{7}{3}} = 0.4641295 = 26.59266^\circ$$

因 $\theta = 0.0364730 < 0.045536862$, 故取 $\alpha = \alpha_0 = 26.59266^\circ$ 。

验算: $\tan 26.59266^\circ - 26.59266^\circ \times (\pi/180^\circ) = 0.0364730$, 与已知的 $\text{inv}\alpha$ 完全相同。

[例 2] 已知 $\theta = \text{inv}\alpha = 0.2146018$, 求解 α 之值。

由表 1.1-1 所列公式可得

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt[3]{3 \times 0.2146018} - 0.4 \times 0.2146018 + 0.10697574 \\ &\quad \times 0.2146018^{\frac{5}{3}} - 0.01648285 \times 0.2146018^{\frac{7}{3}} \\ &= 0.7854122 = 45.00081^\circ \end{aligned}$$

因为 $0.045536862 < \theta \leq 0.684853256$, 故继续用表 1.1-1 所列公式计算 α_1 :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \tan\alpha_0 - \alpha_0 = \tan 0.7854122 - 0.7854122 = 0.2146159 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{\theta - \theta_0}{\tan^2\alpha_0} = 0.7854122 + \frac{0.2146018 - 0.2146159}{\tan^2 0.7854122} \\ &= 0.7853981 = 45.00000^\circ \end{aligned}$$

取 $\alpha = \alpha_1 = 45^\circ$

验算: $\tan 45^\circ - 45^\circ \times (\pi/180^\circ) = 0.2146018$, 与已知的 $\text{inv}\alpha$ 完全相同。

四、渐开线的弧长

图 1.1-5 是根据图 1.1-1 画出的渐开线 AK 在直角坐标系 Oxy 中的情形,其起点 A 位于 Ox 轴上,其上任意点的压力角为 α ,其坐标按下式计算:

$$\begin{cases} x = r_b \frac{\cos(\text{inv}\alpha)}{\cos\alpha} \\ y = r_b \frac{\sin(\text{inv}\alpha)}{\cos\alpha} \end{cases} \quad (1.1-5a)$$

上式即是渐开线 AK 的参数方程(参数为压力角 α)。在已知基圆半径 r_b 的情况下,根据 α 的大小即可由上式求出 K 点的直角坐标。

现在我们来计算渐开线 AK 段(见图 1.1-5 中阴影部分)的弧长。

方程(1.1-5a) x 对 α 求导并注意 $(\text{inv}\alpha)' = \tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$, 则经下述变换可得

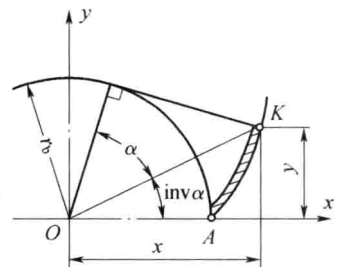


图 1.1-5 渐开线的弧长

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= r_b \frac{\cos\alpha \cdot [-\sin(\operatorname{inv}\alpha)\tan^2\alpha] - [-\sin\alpha \cdot \cos(\operatorname{inv}\alpha)]}{\cos^2\alpha} \\ &= r_b \frac{[\sin\alpha\cos(\operatorname{inv}\alpha) + \cos\alpha\sin(\operatorname{inv}\alpha)] - \sin(\operatorname{inv}\alpha)/\cos\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= r_b \frac{\sin(\tan\alpha) - [\sin(\tan\alpha)\cos\alpha - \cos(\tan\alpha)\sin\alpha]/\cos\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= r_b \frac{\tan\alpha\cos(\tan\alpha)}{\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

同理可得 $\frac{dy}{d\alpha} = r_b \frac{\tan\alpha\sin(\tan\alpha)}{\cos^2\alpha}$

根据高等数学可知:如果曲线(此处为渐开线)的方程由参数式给定,见式(1.1-5a),则曲线的弧长为

$$\begin{aligned} L_{AK} &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{r_b\tan\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2 [\cos^2(\tan\alpha) + \sin^2(\tan\alpha)]} d\alpha \\ &= \int_0^\alpha \frac{r_b\tan\alpha}{\cos^2\alpha} d\alpha = r_b \int_0^\alpha (\tan\alpha + \tan^3\alpha) d\alpha = r_b \left(\int_0^\alpha \tan\alpha d\alpha + \int_0^\alpha \tan^3\alpha d\alpha \right) \end{aligned}$$

最后得到渐开线 AK 段的弧长为

$$L_{AK} = r_b \left[-\operatorname{In}\cos\alpha + \left(\frac{1}{2}\tan^2\alpha + \operatorname{In}\cos\alpha \right) \right] = \frac{1}{2}r_b\tan^2\alpha \quad (1.1-5)$$

第二节 圆柱齿轮的基本参数与基本齿廓

一、齿数 z 、模数 m 、齿形角 α

齿数 z ——分布在齿轮圆周上的轮齿总数,用代号 z 表示。

模数 m ——设齿轮分度圆的齿距为 p 、直径为 d ,则有: $\pi d = pz$ 、 $d = (p/\pi)z$;为便于齿轮设计、制造,把比值 (p/π) 用模数 m 取代,即齿轮分度圆直径为 $d = mz$ 。

齿形角 α ——齿形角即齿轮分度圆压力角。GB/T 1356—2001 标准中规定 $\alpha = 20^\circ$,系综合考虑了大、小齿形角的利弊。我国航空工业标准则规定标准齿形角 $\alpha = 25^\circ$ 。

齿数 z 、模数 m 、齿形角 α 的变化对齿轮形状的影响见表 1.1-4。

表 1.1-4 齿轮基本参数的变化对齿轮的影响

序号	变化参数	简图	变化主要特征说明
1	模数 m		<p>随着 m 的增大,会引起下述变化:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 齿轮尺寸成比例放大 (2) 轮齿变高变厚 (3) 基圆直径增大,从而使渐开线齿廓曲率半径增大

(续)

序号	变化参数	简图	变化主要特征说明
2	齿形角 α		<p>(1) 小齿形角可以减少齿轮传动过程中的径向力,减轻轴承的负荷,但会导致轮齿弯曲强度和接触强度的下降</p> <p>(2) 大齿形角不仅可以使轮齿的齿根变厚,提高轮齿的弯曲强度,还能提高齿面的接触强度。因而近年来,世界各国中,大齿形角渐开线齿轮已得到日益广泛的应用</p>
3	齿数 z		<p>(1) 齿高不变</p> <p>(2) 随着 z 的增加,会引起下述变化:</p> <p>① 齿轮直径增大</p> <p>② 基圆直径增大,从而使渐开线齿廓曲率半径增大</p> <p>③ 齿根厚增大</p>

二、基本齿廓

1. 标准基本齿条齿廓(GB/T 1356—2001)

基本齿廓是确定某种齿制的轮齿尺寸比例的依据的齿廓。基本齿条是指在法平面内具有基本齿廓的假想齿条。基本齿条相当于齿数 $z = \infty$, 直径 $d = \infty$ 的外齿轮。GB/T 1356—2001“通用机械和重型机械用圆柱齿轮 标准基本齿条齿廓”, 规定了其形状和参数(见表 1.1—5)。为了确定渐开线类齿轮的轮齿尺寸, 在本标准中, 标准基本齿条的齿廓仅给出了渐开线类齿轮齿廓的几何参数。在设计齿轮刀具时, 亦可根据本标准基本齿条的齿廓规定刀具的参数。

为方便齿轮的设计制造, 减少刀具规格, GB 1357—87 还规定了渐开线圆柱齿轮的模数系列, 其值列于表 1.1—6。

表 1.1—5 渐开线圆柱齿轮的标准基本齿条齿廓(GB/T 1356—2001)

	符号	意义	数值	单位
	α_P	压力角	20	(°)
	h_{aP}	标准基本齿条轮齿齿顶高	$1m$	mm
	c_P	标准基本齿条轮齿与相啮合标准基本齿条轮齿之间的顶隙	$0.25m$	mm
	h_{fP}	标准基本齿条轮齿齿根高	$1.25m$	mm
	ρ_P	基本齿条的齿根圆角半径	$0.38m$	mm

注: 对于不同场合所推荐的基本齿条尺寸参数见本标准的附录 A; 或见本篇第六章第一节所述

表 1.1-6 渐开线圆柱齿轮的模数

(mm)

第一系列	0.1	0.12	0.15	0.2	0.25	0.3		0.4	0.5	0.6		08	
第二系列							0.35				0.7		0.9
第一系列	1	1.25	1.5		2		2.5		3				
第二系列				1.75		2.25		2.75		(3.25)		3.5	(3.75)
第一系列	4		5		6			8		10		12	
第二系列		4.5		5.5		(6.5)	7		9		(11)		
第一系列		16		20		25		32		40		50	
第二系列	14		18		22		28		36		45		

注：(1) 对于斜齿圆柱齿轮是指法向模数 m_n 。
(2) 优先选用第一系列, 括号内的数值尽可能不用

2. 国外圆柱齿轮常用基本齿廓参数

根据齿轮实物确定其相关设计尺寸参数称为齿轮辨识(或齿轮测绘)。在这种情况下,了解机器产地(特别是制造国)惯用的齿制标准是非常必要的,表 1.1-7 列出了一些国家的齿制标准,供齿轮辨识时参考。

3. 其它齿形及有关参数

生产实践中,有时也采用以下几种齿形:

(1) 齿形角 $\alpha \neq 20^\circ$ 的齿形。

在径节制中(径节 $P = z/d, m = \frac{25.4}{P}$ mm),常用 $\alpha = 14\frac{1}{2}^\circ$ 或 $\alpha = 15^\circ$ 的齿形角。

大齿形角的齿形 $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$ 时,常用于汽车、拖拉机齿轮传动中; $\alpha = 25^\circ$ 、 28° 时,常用于航空齿轮传动中。

(2) 齿顶高系数 $h_a^* < 1$ 的齿形 如取 $h_a^* = 0.8$ 或 0.9 ,这种齿形多用于汽车、拖拉机齿轮,用以提高轮齿的弯曲强度。

(3) 齿顶高系数 $h_a^* > 1$ 的齿形 一般取 $h_a^* = 1.2$,用于航空或船舶的高精度齿轮,用以提高传动的重合度。

(4) 双模数制齿形。即用 m_1/m_2 制,如用 $2/1.75$ 、 $3/2.25$ 、 $4/3$ 等,用大模数 m_1 计算齿轮的分度圆直径,用小模数 m_2 计算齿轮的齿高,这种齿形制相当于选用某种短齿制,以提高轮齿的弯曲强度。

同样亦有双径节制齿形。即用 P_1/P_2 制,如用 $3/4$ 、 $4/5$ 、 $5/7$ 等,用小径节 P_1 计算齿轮的分度圆直径,用大径节 P_2 计算轮齿的齿高,其目的与双模数制齿形相同。

表 1.1-7 国外圆柱齿轮常用基本齿廓主要参数

组织与国别	齿形种类	标准号	m 或 P	α	h_a^*	c^*	ρ_f	备注
国际标准化组织	标准齿高	ISO R53—1974	m	20°	1	0.25	$0.38m$	
德国	标准齿高 短齿	DIN867	m	20°	1	0.1~0.3		
				20°	0.8	0.1~0.3		
日本	标准齿高	JIS B1701—1973	m	20°	1	0.25		

(续)

国别	齿形种类	标准号	m 或 P	α	h_a^*	c^*	ρ_f	备注
法国	标准齿高	NFE 23—011—1979	m	20°	1	0.25	$0.38m$	
瑞士	标准齿高 马格齿形	VSM 15520	m	20°	1	0.25		用于插齿法
				15°	1	0.167		
				20°	1	0.167		
英国	标准齿高	BS436—1940	P	$14\frac{1}{2}^\circ$	1	0.157	$0.25 \sim 0.39$	
	标准齿高	BS436:Part1—1967	P	20°	1	$0.25 \sim 0.4$		
	标准齿高	BS436:Part2—1970	m	20°	1	$0.25 \sim 0.4$		
美国	标准齿高	ASAB6.1—1968	P	20°	1	$0.25 \sim 0.35$	$0.3 \times 1/P$	$> P20$ 剃齿法
	标准齿高	ASAB6.1—1968	P	25°	1	$0.25 \sim 0.35$		
	标准齿高	ASAB6.1—1968	P	20°	1	0.20		
	短齿	ASME	P	22.5°	0.875	0.125		
苏联	标准齿高	ГОСТ 13755—68	m	20°	1	0.25	$0.4m$	
	短齿	ГОСТ 13755—68	m	20°	0.8	0.30		

注:表中径节 $P = \frac{z}{d} 1/\text{in}; m = \frac{25.4}{P} \text{mm}$

三、常用名词术语的代号及定义

图 1.1-6、图 1.1-7、图 1.1-8 绘出了外、内齿轮副(标准啮合)以及齿轮齿条的啮合情况,并在图中标注了主要参数尺寸。表 1.1-8 列出了齿轮几何计算时常用的名词、术语、代号及定义。

表 1.1-8 渐开线齿轮常用名词术语的代号及定义
(根据 GB/T 3374—92 齿轮基本术语)

名称	代号	定义	名称	代号	定义
中心距			基圆齿距	p_b	端平面上相邻的两个同侧齿廓的渐开线所截的基圆弧长,它与这两个齿廓之间恒定的法向距离在数值上相等
标准齿轮	a	平行轴或交错轴齿轮副的两轴线之间的最短距离	齿厚	s	一个齿的两侧端面齿廓之间的分度圆弧长
变位齿轮	a_w				
齿宽	b	分度圆柱面是齿轮上的一个约定的假想曲面。轮齿尺寸均以此为基准而加以确定。它与端平面的交线称分度圆	端面啮合线		轮齿啮合时,其瞬时接触点在端平面上的运动轨迹,它与两相啮齿廓的公法线相重合
分度圆直径	d				