普通高等教育"十二五"规划教材

辽宁省精品课程配套教材

线性代数

主　编　靖　新　赵德平
副主编　徐厚生　孙海义

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
辽宁省精品课程配套教材

线性代数

主　编　靖　新　赵德平
副主编　徐厚生　孙海义

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是编者在总结了多年教学经验和辽宁省精品课程建设成果的基础上，为适应“线性代数”教学改革的要求，为培养学生的抽象能力、计算能力和推理能力的需要而编写的教材．编者将“线性代数的可视化和实验化的改革与实践”项目研究的主要内容渗透到教学实践中并在教材编写中予以体现．

全书共6章，内容包括绪论，行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性，线性方程组，矩阵的相似及二次型化简，线性空间与线性变换．同时，书中适当安排了基于软件 Matlab 的线性代数实验，书后附有自测题及各章习题参考答案．

本书适合作为大学本科非数学专业的线性代数课程的教材，也可以作为需要线性代数知识的科技工作者和准备考研的非数学专业本科生、大专院校的老师和其他读者的参考资料．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/靖新，赵德平主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-034623-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①靖… ②赵… Ⅲ.① 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 191645 号

责任编辑：昌 盛 王胡权 / 责任校对：朱光兰
责任印制：闫 磊 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012年8月第一次印刷 印张：14 3/4
字数：297 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

线性代数是普通高等院校理工类和经管类等本科专业的一门重要基础课，是教育部规定的主要课程之一，其概括性强，内容抽象，应用广泛，与现代科学技术有着密切的联系．随着现代科学技术的快速发展，实际问题的规模越来越大，复杂程度越来越高．一方面，相当广泛的实际问题所建立的数学模型是线性的或者接近于线性的；另一方面，解决许多非线性问题的一种重要方法是把问题线性化．

该课程有助于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、综合运用知识分析解决问题的能力、数值计算能力及应用创新能力，并为后续课程的学习提供必要的数学基础，具有重要的意义．

我们在多年的教学实践中发现，目前很多教材在内容和体系上采用从概念到概念、从定理到定理的结构，使教师在原本不多的学时内讲授的内容过于抽象，学生"照猫画虎"地学习过后，对许多概念、定理和方法理解得不透，因此，许多学生十分惧怕线性代数课程的学习．另外，这些教材对于如何借助于计算机软件、如何运用几何的思想、对线性代数中的概念和方法"从何而来"、"有什么用"、"怎么用"研究得不够，同时由于缺少与实际问题联系紧密的案例，使得学生的学习兴趣不高．

本教材是在教学改革研究与实践的基础上，通过分析传统线性代数教材中的不足，汇集了编者多年的教学体会而形成的一本改革教材．

本教材遵循教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会数学基础课程教学指导分委员会线性代数教学基本要求，全面覆盖"线性代数"课程的主要内容和思想，在深刻领会基本要求的基础上，改革教学内容、方法和手段，探索创新人才培养途径，并着力体现了以下特点：

1. 强调符号语言训练，通过以实际问题切入，开展"问题驱动式"教学方法，引导学生了解线性代数概念和符号的来龙去脉．

2. 适当介绍线性代数发展史，使学生深刻理解线性代数的重要性，进而加深理解数学作为研究客观世界数量关系和空间关系的一种解释世界的语言的精妙．

3. 渗透了数学模型和数学建模的思想，使线性代数教育教学更加遵循数学科学的发展规律．

4. 注重对学生进行分级分类培养，通过设置习题 A、习题 B、上机实验实习题和包括部分考研试题的自测题，根据学生的不同学习要求，为准备考研的学生创造学习条件．

5. 以提高学生的实践应用创新能力、青年教师的教育教学能力和使用现代计

算机软件解决问题的能力贯穿教材编写的全过程．

6．教材内容通过“可视化”与“实验化”，提高学生的学习兴趣，使学生通过有效的训练，超出几何直观范畴，去理解线性代数的思想方法．

7．与考试改革相配套，我们的考试改革的方案是：成绩评定由四部分组成，平时成绩占 20%，数学软件 Matlab 处理线性代数的计算问题占 10%，线性代数方法建模占 10%，期末笔试考试占 60%．

8．提供了配套的教学课件．

本教材写作分工如下：前言、第 5 章、附录二由靖新编写，第 1 章由赵德平编写，第 2 章由徐厚生编写，第 3 章由缪淑贤编写，第 4 章由陈仲堂编写，第 6 章由朱宝彦编写，附录一由孙海义编写，李旸、孙海义、郑莉、徐启程、岳田鑫参与了习题和课件制作等工作，最后由靖新统稿和主审，靖新、赵德平、徐厚生、孙海义对全书进行了复审．

本教材是由靖新教授负责的辽宁省“线性代数”精品课程及其主持的辽宁省“十一五”教育科学规划课题“线性代数的可视化和实验化的改革与实践”的成果之一．本教材的编写和出版，得到沈阳建筑大学教务处、科学出版社同志的大力支持，在此表示衷心的感谢！

限于水平，书中难免存在不足和疏漏之处，恳请同行和读者批评指正！

靖新

2012 年 5 月

数学家的话

算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图像化的公式，没有一个数学家能缺少这些图像化的公式.

——希尔伯特

没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此，用这种方式来表达事物是非常有意义的.

——笛卡尔

如果我们习惯于把分析几何化，这只能说明我们还不够成熟.

——詹姆斯·纽曼

但是，老天总是善待那些还不够成熟的孩子.

——比利·霍利迪

我们已有的空间科学所研究的问题是在特定的三维空间中的距离关系，但是，这不意味着在高于三维的空间中不存在距离关系.

——威廉·金登·克利福德

数学训练的重要性在于它可以使各种关系的表达和推理变得更加简洁、严谨和清晰.

——阿弗里德·马歇尔

目　录

绪论

一、线性代数的发展简史

1. 了解数学史的重要意义

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，数学科学与社会科学、自然科学共同构成当今人类的三大科学体系．

数学是人类文明的一个重要组成部分，是几千年来人类智慧的结晶．推动数学科学发展有两个主要因素：一个是人们解决实际问题的需要，数学是认识和解释世界的一种特殊的方式；另一个是来自数学自身演变的巨大生命力和数学各学科分支的交叉和融合．

在学习数学时，我们基本是通过学习教材来认识这门学科的．教材是将历史上的数学材料按照一定的逻辑结构和学习要求加以重组、取舍编撰而成．一般来说，数学发展的实际情况与教材的编写体系有着许多不同，数学教材通常舍去了许多数学概念和方法形成的实际背景、演化历程以及导致其演化的各种因素．

数学和任何一门科学一样，有着自身发展的丰富历史，是积累性的科学．数学的发展历史展示了人类追求理想和美好生活的力量，历史上数学家的成果、业绩和品德无不闪耀着人类思想的光辉，照亮人类社会发展和进步的历程．

了解一些数学史，可以使我们了解数学科学发生、发展的规律．通过追溯数学概念、思想及方法的演变和发展过程，探究数学科学发展的规律和文化内涵，能够帮助我们认识数学科学与人类社会发展的互动关系以及数学概念和方法的重要意义．

2. 代数学的历史发展情况

数学通过数与形，与其他科学互相渗透，出现了许多边缘学科和交叉学科．大体说来，数学中研究数的部分属于代数学的范畴；研究形的部分，属于几何学的范畴；沟通形与数且涉及极限运算的部分，属于分析学的范围．这三大类数学分支构成了整个数学的本体与核心．

“algebra”(代数)一词最初来源于公元 9 世纪阿拉伯数学家、天文学家阿尔·花拉子米(al-Khwārizmi，约 783～850)所著的代数教程《还原与对消的计算概要》一书，其书名中的 al-jabr 这个词意为“还原”，它所指的意思是把方程式一边的负

项移到方程另一端"还原"为正项；al-muqabala 意即"对消"或"化简"，指方程两端可以消去相同的项或合并同类项．在翻译中把"al-jabr"译为了拉丁文的"aljebra"．"aljebra"一词后来被许多国家采用，英文词"algebra"就是由此而来．花拉子米科学研究的范围十分广泛，包括数学、天文学、历史学和地理学等领域，他撰写了许多重要的科学著作，在数学方面，花拉子米编著了两部传世之作：《代数学》和《印度的计算术》．

1859 年，我国数学家李善兰首次把"algebra"译成"代数"．后来清代学者华蘅芳和英国人傅兰雅合译英国瓦里斯的《代数学》，卷首有"代数之法，无论何数，皆可以任何记号代之．"，即代数就是运用文字符号来代替数字的一种数学方法．

古希腊数学家丢番图（Diophantus）用文字缩写来表示未知量．在公元 250 年前后，丢番图写了一本数学巨著《算术》（Arithmetic），其中他引入了未知数的概念，创设了未知数的符号，并有建立方程的思想，故有"代数学之父"（Father of algebra）的称号．

代数是巴比伦人、希腊人、阿拉伯人、中国人、印度人和西欧人相继完成的伟大数学成就．发展至今，代数学包含了算术、初等代数、高等代数、数论、抽象代数五个部分．

17 世纪中叶以后，诞生了抽象代数，抽象代数包含有群论、环论、伽罗瓦理论、格论、线性代数等许多分支，抽象代数成为当代大部分数学的通用语言．

在高等代数中，一次方程组（即线性方程组）发展成为线性代数理论，而二次以上方程发展成为多项式理论．前者是关于向量空间、线性变换、型论、不变量论和张量代数等内容的一门近世代数分支学科，后者是研究只含有一个未知量的任意次方程的一门近世代数分支学科．

线性代数是高等代数的一大分支．作为大学课程的线性代数，研究的是线性代数理论最基础的内容．一次方程叫做线性方程，讨论线性方程及线性运算的代数就叫做线性代数．

在线性代数中最重要的内容就是行列式和矩阵．行列式和矩阵在 19 世纪得到迅速发展，有成千篇关于这两个课题的文章问世．向量的概念，从数学的观点来看不过是有序三元数组的一个集合，然而它具有明确的物理意义，如力或速度．因此，可以用它创造性地想象和描述物理问题．向量用于表示梯度、散度、旋度也很有说服力．因此，虽然行列式和矩阵不过是一种记载数据的符号，但它却对新的思想领域的研究提供了钥匙，因此，这两个概念成为数学物理上非常有用的工具．

到现在为止，数学家们已经研究过 200 多种代数结构，其中最主要的若尔当代数和李代数是不服从结合律的代数的例子．这些工作绝大部分完成于 20 世纪，它们使一般化和抽象化的思想在现代数学中得到了充分的反映．

我们可以笼统地把代数学解释为关于字母符号计算的学科，但字母符号的含

义是在不断地拓广的．在初等代数中，字母表示数；而在高等代数和抽象代数中，字母则表示向量（或 n 元有序数组）、矩阵、张量、旋量、超复数等各种形式的量．因此，代数已经发展成为一门关于形式运算的学科．

一个带有形式运算的集合称为代数系统，代数学就是研究一般代数系统的科学．

3. 线性代数主要概念的形成

线性代数作为高等代数的重要组成部分，研究的是线性关系．我们知道，研究关联着多个因素的量所引起的问题，需要使用多元函数．如果所研究的关联性是线性的，那么就称这个问题为线性问题．历史上线性代数的第一个问题是解线性方程组，而线性方程组理论的发展又促成了作为工具的矩阵论和行列式理论的创立与发展，这些内容成为线性代数教材的主要部分．

最初的线性方程组模型来源于生活实践，正是实际问题刺激了线性代数学科的诞生与发展．另外，近现代数学分析与几何学等数学分支的要求也促使了线性代数的进一步发展．对线性代数中主要概念的形成过程简述如下．

(1) 行列式和矩阵

行列式出现于线性方程组的求解过程中，它最早是一种速记的表达式，现在已经是数学中一种非常有用的工具．

行列式是由莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646～1716）和日本数学家关孝和（Guanxiaohe，1642～1708）分别发明的．1693 年 4 月，莱布尼茨在写给洛比达（L. Hospital，1661～1704）的一封信中使用并给出了行列式，并给出方程组的系数行列式为零的条件．同时代的日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中也提出了行列式的概念与计算方法．《解伏题之法》的意思就是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开进行了清晰的叙述．

1750 年，瑞士数学家克拉默（G. Cramer，1704～1752）在其著作《线性代数分析导引》中，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述，并给出了现在我们所称的解线性方程组的克拉默法则．稍后，数学家贝祖（E. Bezout，1730～1783）将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化，利用系数行列式概念指出了判断一个齐次线性方程组有非零解的条件．

总之，在很长一段时间内，行列式只是作为解线性方程组的一种工具使用，并没有人意识到它可以独立于线性方程组之外而单独形成一门理论．

在行列式的发展史上，第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述，即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人，是法国数学家范德蒙德（A. T. Vandermonde，1735～1796）．

范德蒙德自幼在父亲的指导下学习音乐，但对数学有着浓厚的兴趣，后来成为了法兰西科学院院士．他给出了用二阶子式和它们的余子式对行列式降阶展开的

法则．因此，他是这一理论的奠基人．1772 年，拉普拉斯(Laplace，1749～1827)在一篇论文中证明了范德蒙德提出的一些规则，推广了他的行列式展开的方法．

继范德蒙德之后，在行列式的理论研究方面，另一位做出突出贡献的人是法国大数学家柯西(A. L. Cauchy，1789～1857)．1815 年，柯西在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理．其中的主要结果之一是行列式的乘法定理．另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双下标记法，引进了行列式特征方程的术语，给出了相似行列式概念，改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明．

19 世纪的半个多世纪中，对行列式理论研究始终不渝的数学家之一是詹姆士·西尔维斯特(J. Sylvester，1814～1894)，他还在 1850 年提出了矩阵(matrix)概念．

西尔维斯特出生在伦敦的一个犹太人家庭，在剑桥大学学习了几年之后，在都柏林的圣三一学院获得了博士学位．西尔维斯特是一个活泼、敏感、兴奋、热情、甚至容易激动的人．由于是犹太人，他曾受到剑桥大学的不平等对待，但是，西尔维斯特用火一般的热情介绍他的学术思想，并且在代数学方面取得了重要的成就．西尔维斯特曾经在伍尔里奇的皇家军事学院作了 15 年的数学教授，曾在巴尔迪摩新成立的约翰·霍普金斯大学担任数学系主任，并在那里创建了《美国数学杂志》，并帮助开创了美国的研究生数学教育．

在行列式理论方面成果最多的人是德国数学家雅可比(J. Jacobi，1804～1851)，他引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中有重要的作用，并给出了函数行列式的导数公式．雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式理论系统的建立．由于行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面的应用，使行列式理论自身在 19 世纪得到了很大发展．整个 19 世纪都有行列式的新结果出现．除了一般行列式的大量定理之外，还有许多有关特殊行列式的其他定理相继产生．

(2) 矩阵

矩阵是线性代数中的一个重要的基本概念，是代数学的一个主要研究对象，也是数学研究和应用的一个重要工具．“矩阵”这个词是由西尔维斯特首先使用的，他是为了将数字的矩形阵列区别于行列式而发明了这个术语．而实际上，矩阵这个课题在其诞生之前就已经有了很好的发展．这可以从对行列式的大量研究工作中表现出来．为了很多目的，不管行列式的值是否与问题有关，方阵本身都可以研究和使用，矩阵的许多基本性质也是在行列式的发展中建立起来的．在逻辑上，矩阵的概念应先于行列式的概念，然而在历史上次序正好相反．

1850 年，西尔维斯特指出，矩阵是“表示由 m 行 n 列元素组成的矩形排列”，由那个排列，“我们能够形成各种行列式组”．

英国数学家凯莱(A. Cayley,1821～1895)一般被公认为是矩阵论的创立者,因为他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来,并首先发表了关于这个题目的论文.凯莱出生于一个古老而有才能的英国家庭,剑桥大学三一学院大学毕业后留校讲授数学,三年后他转从律师职业,工作卓有成效,并利用业余时间研究数学,发表了大量的数学论文.

凯莱首先用字母来作为矩阵的简化记号.1858 年,他发表了关于这一课题的第一篇论文《矩阵论的研究报告》,系统地阐述了关于矩阵的理论.文中他定义了矩阵的相等,给出了矩阵相乘、相加以及相减等运算法则,以及矩阵的转置、矩阵的逆等一系列基本概念.在论文中,他首次把矩阵方程与只含有一个变量的简单一元方程做类比,把线性方程组的解用系数矩阵的逆和右端项的乘积来表示,他还指出了矩阵加法的可交换性与可结合性.

他在论文中写到:“我们很容易发现,同阶的矩阵和单个的量非常相似,它们可以被加、减或复合到一起,并且其加法和一般代数量的加法非常相似.考察它们之间的复合,发现矩阵的相乘顺序是不可交换的.尽管如此,构造一个(正的或负的,整数的或小数的)矩阵的乘幂还是可能的,因而就有矩阵的有理函数和整函数,或者更一般的任何矩阵代数函数.”

之后,凯莱继续寻找一般的代数运算和矩阵运算之间的关系,通过仔细观察这种相似性不成立的情况,凯莱给出了矩阵的逆的公式.他指出:“当行列式变成 0 的时候,逆矩阵就没有了,这种矩阵就是不定的.只有当两个矩阵中的一个或两个都是不定时,它们的乘积才可能是 0.”

在凯莱把矩阵用单个符号表示以后,推出了著名的凯莱-哈密顿(W. R. Hamilton,1805～1865)定理.凯莱提出凯莱-哈密顿定理的动机就是想证明:“任何矩阵都会满足一个与它同阶的代数方程”.另外,凯莱还给出了方阵的特征方程和特征根(特征值)以及有关矩阵的一些基本结果.

1855 年,埃尔米特(C. Hermite,1822～1901)证明了其他数学家发现的一些矩阵的特征根的特殊性质,如现在称为埃尔米特矩阵的特征根性质等.后来,克莱伯施(A. Clebsch,1831～1872)、布克海姆(A. Buchheim)等证明了对称矩阵的特征根性质.泰伯(H. Taber)引入矩阵的迹的概念并给出了一些有关的结论.

在矩阵理论的发展史上,弗罗比纽斯(G. Frobenius,1849～1917)的贡献不可磨灭.他讨论了最小多项式问题,引进了矩阵的秩、不变因子和初等因子、正交矩阵、矩阵的相似变换、合同矩阵等概念,以合乎逻辑的形式提出了不变因子和初等因子的理论,并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质.1854 年,若尔当(Jordan,1838～1922)研究了矩阵化为标准形的问题.若尔当通过现今被称作的若尔当标准形把矩阵进行了基本的分类,若尔当的分类不是基于矩阵的形式运算,而是特征值(也称谱)理论.在历史上,特征值概念是独立于矩阵理论自身,从不同

领域研究和发展起来的．18 世纪达朗贝尔(J. R. d'Alembert，1717～1783)对常系数的线性微分方程组解的研究最早引起对矩阵特征值问题的研究，而柯西是通过二次曲面、二次型的研究，证明了所有对角矩阵的特征向量都是实的，对称矩阵可以通过正交变换实现对角化．

1892 年，梅茨勒(H. Metzler)引进了矩阵的超越函数概念并将其写成矩阵幂级数的形式．傅里叶(Fourier，1768～1830)和庞加莱(H. Poincare，1854～1912)在其著作中还讨论了无限阶矩阵问题，这是为了满足方程理论发展的需要而进行的研究．

经过两个多世纪的发展，矩阵由最初作为一种工具成为独立的一门数学分支——矩阵论．而矩阵论又可分为矩阵方程论、矩阵分解论和广义逆矩阵论等矩阵的现代理论，矩阵及其理论现在已经广泛地应用于现代科技的各个领域．

(3) 线性方程组

线性方程组的解法，早在中国古代的数学著作《九章算术——方程》中已作了比较完整的论述．其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵施行初等行变换从而消去未知量的方法，即高斯消元法．在西方，线性方程组的研究是在 17 世纪后期由莱布尼茨开创的．他曾研究含两个未知量的三个线性方程组组成的方程组．麦克劳林(C. Maclaurin，1698～1746)在 18 世纪上半叶研究了具有二、三、四个未知量的线性方程组，得到了现在称为克拉默法则的结果．克拉默不久也发表了这个法则．18 世纪下半叶，法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究，证明了 n 元齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零．

19 世纪，英国数学家史密斯(H. Smith)和道吉森(C. L. Dodgson)继续在线性方程组理论研究中取得重要成果．

史密斯是牛津大学的一位几何学教授，是对线性方程组理论做出重要贡献的科学家之一．他引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的概念．在 1861 年的论文中，史密斯发展了齐次线性方程组的通解概念，他用不定指标、独立解的概念建立了齐次线性方程组完全解集合的概念，证明了任何解都是独立解的线性组合，并进一步指出，要解决非齐次线性方程组，只需找到一个特解，任何解都可以表示成该特解和对应的齐次通解的和的形式．

史密斯并没有考虑独立方程的个数比实际方程的个数小的情况，后来由道吉森解决．他在 1867 年出版了《行列式初论》一书，书中讨论了矩阵和方程的增广矩阵，从增广矩阵来研究方程是否相容，提出并证明了一个确定一般线性方程组解集性质的定理，并用构造的方法给出了证明．道吉森证明了 n 个未知数 m 个方程的方程组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同．这正是现代线性方程组理论的重要结果之一．

该定理已经隐含了秩的思想，但是，道吉森并没有抽象出来矩阵秩的概念．